Optimización Lineal: Una mirada introductoria

ISBN: 978-956-306-070-6
Registro de Propiedad Intelectual: 200.528
Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas.
Diseño: Jessica Jure de la Cerda.
Diseño de Ilustraciones: Cristina Felmer Plominsky, Catalina Frávega Thomas.
Diagramación: Pedro Montealegre Barba, Francisco Santibáñez Palma.
Financiamiento: Proyecto Fondef D05I-10211.

Datos de contacto para la adquisición de los libros:
Para Chile:
1. En librerías para clientes directos.
2. Instituciones privadas directamente con:
   Juan Carlos Sáez C.
   Director Gerente
   Comunicaciones Noreste Ltda.
   J.C. Sáez Editor
   jcsaezc@vtr.net
   www.jcsaezeditor.blogspot.com
   Oficina: (56 2) 3260104 - (56 2) 3253148
3. Instituciones públicas o fiscales: www.chilecompra.cl

Desde el extranjero:
1. Liberalia Ediciones: www.liberalia.cl
2. Librería Antártica: www.antartica.cl
3. Argentina: Ediciones Manantial: www.emanantial.com.ar
4. Colombia: Editorial Siglo del Hombre
   Fono: (571) 3377700
5. España: Tarahumara, tarahumara@tarahumaralibros.com
   Fono: (34 91) 3656221
6. México: Alejandría Distribución Bibliográfica, alejandria@alejandrialibros.com.mx
   Fono: (52 5) 556161319 - (52 5) 6167509
7. Perú: Librería La Familia, Avenida República de Chile # 661
8. Uruguay: Dolmen Ediciones del Uruguay
   Fono: 00-598-2-7124857

Optimización Lineal: Una mirada Introductoria | Fabián Flores-Bazán
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción
fflores@ing-mat.udec.cl

ESTA PRIMERA EDICIÓN DE 2.000 EJEMPLARES
Se terminó de imprimir en febrero de 2011 en WORLDCOLOR CHILE S.A.

OPTIMIZACIÓN LINEAL: UNA MIRADA INTRODUCTORIA

Fabián Flores-Bazán

Universidad de Concepción

Dirección del Proyecto Fondef D05I-10211
Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática

Patricio Felmer, Director del Proyecto
Universidad de Chile.

Leonor Varas, Directora Adjunta del Proyecto
Universidad de Chile.

Salomé Martínez, Subdirectora de Monografías
Universidad de Chile.

Cristián Reyes, Subdirector de Estudio de Casos
Universidad de Chile.

Presentación de la Colección

La colección de monografías que presentamos es el resultado del generoso esfuerzo de los autores, quienes han dedicado su tiempo y conocimiento a la tarea de escribir un texto de matemática. Pero este esfuerzo y generosidad no se encuentra plenamente representado en esta labor, sino que también en la enorme capacidad de aprendizaje que debieron mostrar, para entender y comprender las motivaciones y necesidades de los lectores: Futuros profesores de matemática.

Los autores, encantados una y otra vez por la matemática, sus abstracciones y aplicaciones, enfrentaron la tarea de buscar la mejor manera de traspasar ese encanto a un futuro profesor de matemática. Éste también se encanta y vibra con la matemática, pero además se apasiona con la posibilidad de explicarla, enseñarla y entregarla a los jóvenes estudiantes secundarios. Si la tarea parecía fácil en un comienzo, esta segunda dimensión puso al autor, matemático de profesión, un tremendo desafío. Tuvo que salir de su oficina a escuchar a los estudiantes de pedagogía, a los profesores, a los formadores de profesores y a sus pares. Tuvo que recibir críticas, someterse a la opinión de otros y reescribir una y otra vez su texto. Capítulos enteros resultaban inadecuados, el orden de los contenidos y de los ejemplos era inapropiado, se hacía necesario escribir una nueva versión y otra más. Conversaron con otros autores, escucharon sus opiniones, sostuvieron reuniones con los editores. Escuchar a los estudiantes de pedagogía significó, en muchos casos, realizar eventos de acercamiento, desarrollar cursos en base a la monografía, o formar parte de cursos ya establecidos. Es así que estas monografías recogen la experiencia de los autores y del equipo del proyecto, y también de formadores de profesores y estudiantes de pedagogía. Ellas son el fruto de un esfuerzo consciente y deliberado de acercamiento, de apertura de caminos, de despliegue de puentes entre mundos, muchas veces, separados por falta de comunicación y cuya unión es vital para el progreso de nuestra educación.

La colección de monografías que presentamos comprende una porción importante de los temas que usualmente encontramos en los currículos de formación de profesores de matemática de enseñanza media, pero en ningún caso pretende ser exhaustiva. Del mismo modo, se incorporan temas que sugieren nuevas formas de abordar los contenidos, con énfasis en una matemática más pertinente para el futuro profesor, la que difiere en su enfoque de la matemática para un ingeniero o para un licenciado en matemática, por ejemplo. El formato de monografía, que aborda temas específicos con extensión moderada, les da flexibilidad para que sean usadas de muy diversas maneras, ya sea como texto de un curso, material complementario, documento básico de un seminario, tema de memoria y también como lectura personal. Su utilidad ciertamente va más allá de las aulas universitarias, pues esta colección puede convertirse en la base de una biblioteca personal del futuro profesor o profesora, puede ser usada como material de consulta por profesores en ejercicio y como texto en cursos de especialización y post-títulos. Esta colección de monografías puede ser usada en concepciones curriculares muy distintas. Es, en suma, una herramienta nueva y valiosa, que a partir de ahora estará a disposición de estudiantes de pedagogía en matemática, formadores de profesores y profesores en ejercicio.

El momento en que esta colección de monografías fue concebida, hace cuatro años, no es casual. Nuestro interés por la creación de herramientas que contribuyan a la formación de profesores de matemática coincide con un acercamiento entre matemáticos y formadores de profesores que ha estado ocurriendo en Chile y en otros lugares del mundo. Nuestra motivación nace a partir de una creciente preocupación en todos los niveles de la sociedad, que ha ido abriendo paso a una demanda social y a un interés nacional por la calidad de la educación, expresada de muy diversas formas. Esta preocupación y nuestro interés encontró eco inmediato en un grupo de matemáticos, inicialmente de la Universidad de Chile, pero que muy rápidamente fue involucrando a matemáticos de la Pontificia Universidad Católica de Chile, de la Universidad de Concepción, de la Universidad Andrés Bello, de la Universidad Federico Santa María, de la Universidad Adolfo Ibáñez, de la Universidad de La Serena y también de la Universidad de la República de Uruguay y de la Universidad de Colorado de Estados Unidos.

La matemática ha adquirido un rol central en la sociedad actual, siendo un pilar fundamental que sustenta el desarrollo en sus diversas expresiones. Constituye el cimiento creciente de todas las disciplinas científicas, de sus aplicaciones en la tecnología y es clave en las habilidades básicas para la vida. Es así que la matemática actualmente se encuentra en el corazón del currículo escolar en el mundo y en particular en Chile. No es posible que un país que pretenda lograr un desarrollo que involucre a toda la sociedad, descuide el cultivo de la matemática o la formación de quienes tienen la misión de traspasar de generación en generación los conocimientos que la sociedad ha acumulado a lo largo de su historia.

Nuestro país vive cambios importantes en educación. Se ha llegado a la convicción que la formación de profesores es la base que nos permitirá generar los cambios cualitativos en calidad que nuestra sociedad ha impuesto. Conscientes de que la tarea formativa de los profesores de matemática y de las futuras generaciones de jóvenes es extremadamente compleja, debido a que confluyen un sinnúmero de factores y disciplinas, a través de esta colección de monografías, sus editores, autores y todos los que han participado del proyecto en cada una de sus etapas, contribuyen a esta tarea, poniendo a disposición una herramienta adicional que ahora debe tomar vida propia en los formadores, estudiantes, futuros profesores y jóvenes de nuestro país.

Patricio Felmer y Salomé Martínez
Editores

Agradecimientos

Agradecemos a todos quienes han hecho posible la realización de este proyecto Fondef: “Herramientas para la formación de Profesores de Matemáticas". A Cristián Cox, quien apoyó con decisión la idea original y contribuyó de manera crucial para obtener la participación del Ministerio de Educación como institución asociada. Agradecemos a Carlos Eugenio Beca por su apoyo durante toda la realización del proyecto. A Rafael Correa, Edgar Kausel y Juan Carlos Sáez, miembros del Comité Directivo. Agradecemos a Rafael Benguria, Servet Martínez y Fidel Oteiza, miembros del Comité Editorial de la colección, quienes realizaron valiosos aportes a los textos. A Guillermo Marshall, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile y José Sánchez, entonces Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción, quienes contribuyeron de manera decisiva a lograr la integridad de la colección de 15 monografías. A Jaime San Martín, director del Centro de Modelamiento Matemático por su apoyo durante toda la realización del proyecto. Agradecemos a Víctor Campos, Ejecutivo de Proyectos de Fondef, por su colaboración y ayuda en las distintas etapas del proyecto.

Agradecemos también a Bárbara Ossandón de la Universidad de Santiago, a Jorge Ávila de la Universidad Católica Silva Henríquez, a Víctor Díaz de la Universidad de Magallanes, a Patricio Canelo de la Universidad de Playa Ancha en San Felipe y a Osvaldo Venegas y Silvia Vidal de la Universidad Católica de Temuco, quienes hicieron posible las visitas que realizamos a las carreras de pedagogía en matemática. Agradecemos a todos los evaluadores, alumnos, académicos y profesores -cuyos nombres no incluimos por ser más de una centena- quienes entregaron sugerencias, críticas y comentarios a los autores, que ayudaron a enriquecer cada uno de los textos.

Agradecemos a Marcela Lizana por su impecable aporte en todas las labores administrativas del proyecto, a Aldo Muzio por su colaboración en la etapa de evaluación, y también a Anyel Alfaro por sus contribuciones en la etapa final del proyecto y en la difusión de los logros alcanzados.

Dirección del Proyecto

Índice General

No existen preguntas banales,
sólo respuestas simples.

Prefacio

La optimización se puede considerar como una parte de la matemática que se ocupa del estudio de problemas de decisión con el fin de determinar, entre todas las posibles alternativas, aquella que resulte la mejor respecto de objetivos pre-establecidos. Esta monografía sólo considera funciones objetivo lineales y con restricciones del tipo desigualdad o igualdad, definidas también por funciones lineales, es decir, se va a considerar problemas de optimización con funciones objetivos lineales y cuyas regiones factibles sean poliedros.

La confección de esta monografía surge de la necesidad de contar con un material de referencia para nuestros profesores encargados de la educación media de nuestro país, en el área de Programación Lineal. Para su elaboración, he considerado el hecho de que no existe una asignatura dedicada exclusivamente a este tema, por lo que he tratado de extraer los tópicos que a mi juicio son los que merecen ser estudiados en un primer curso para este fin y abordarlos de modo esquemático (por ejemplo, el análisis de sensibilidad y programación paramétrica han sido excluídos).

Iniciando cada capítulo con ejemplos ilustrativos, he preferido dar un carácter motivador a la presentación por sobre la generalidad de los resultados, pero sin perder la rigurosidad matemática, cuando la intuición se ve amenazada. También, immediatamente después de algunos ejemplos, he incorporado ejercicios relacionados con el afán que el lector afirme su confianza en el manejo de los conceptos, sin que tenga que esperar la lista de problemas al final de cada capítulo.

Creo importante incluir un capítulo introductorio sobre optimización lineal multiobjetivo debido a su importancia en la modelación de muchos problemas reales.

El material incluído en la presente monografía es más de lo que podría presentarse en un primer curso, que en general es sobre sistemas lineales, donde una fracción de él se dedica a programación lineal. Sin embargo, el profesor está muy bien capacitado para abordar los otros tópicos en un segundo curso.

El contenido de esta monografía se ha dividido en 5 capítulos.

El Capítulo 1 presenta algunos problemas de optimización que aparecieron en la antigüedad y otros que corresponden al mundo actual; además, se describen algunos modelos de aplicación y se formula el problema general de optimización lineal, para terminar con la resolución gráfica de problemas bidimensionales.

En el Capítulo 2 se introducen algunas nociones básicas topológicas y algebraicas de conjuntos convexos. En particular, la cápsula convexa permite describir el conjunto solución del problema. También se establecen varias caracterizaciones del hecho que el conjunto solución no sea vacío.

El método del Simplex se presenta en el Capítulo 3, junto con su formato tabla que resulta ser el más adecuado para su manipulación. También, se discute la formación de ciclos en el uso del simplex y se establece la regla de Bland que evita la aparición de ciclos.

El Capítulo 4 estudia la teoría de dualidad, que consiste en establecer las posibles relaciones simétricas entre un problema de optimización dado llamado "primal" y otro asociado, llamado "dual", donde las versiones débil y fuerte del teorema de dualidad juegan un papel muy importante. Para ello, se establece el lema de Farkas y las condiciones de optimalidad de Karush, Kuhn y Tucker. Finalmente, se presenta una interpretación económica del problema dual.

En el Capítulo 5, motivado por las aplicaciones, lo cual hace que sea un tema muy actual, se incluye una introdución básica sobre optimización lineal multiobjetivo, de modo de entusiasmar al lector por esta área que sólo se ve en cursos avanzados de otras carreras. Aquí se estudia el problema de optimizar más de una función objetivo y la noción de solución a utilizar es debido a Pareto, igualmente conocida como solución "eficiente".

Debido a la manera como se abordan los tópicos presentes en esta monografía, el lector puede continuar su lectura desde el Capítulo 1 al 3, aunque algunas nociones del 2, además del Teorema (de representación) 2.16, se necesitan en el 3; y dejar el Capítulo 2 para una segunda parte. Claramente, no se puede prescindir del Capítulo 1. El Capítulo 5 está basado en los Capítulos 2 y 4, y no requiere los conocimientos del Capítulo 3. Respecto del Capítulo 4, se necesita conocer el método simplex para entender únicamente la Observación 4.5.

En esencia, en esta monografía se presenta: la formulación del problema de optimización lineal; su solución a través del método simplex; o cuando sea necesario, la caracterización mediante las condiciones de optimalidad debido a Karush, Kuhn y Tucker; la teoría de dualidad; y un capítulo adicional sobre optimización lineal multiobjetivo.

La optimización ha sido la línea principal de mis investigaciones en matemática, las cuales han sido llevadas a cabo gracias al ininterrumpido apoyo de CONICYT-Chile a través de los Proyectos FONDECYT desde 1994 a la fecha, y del Proyecto FONDAP - Matemáticas Aplicadas.

Pero sin duda, la publicación de esta monografía es gracias al Proyecto FONDEF D05I-10211, "Herramientas para la formación de Profesores de Matemática" y a su Director Patricio Felmer, a quien agradezco por la invitación a formar parte de esta gran aventura y ojalá este escrito cumpla con su cometido.

Quiero agradecer a mis colegas del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción, en particular a Roberto Riquelme quien, como Director del Departamento, me ha brindado todo el apoyo necesario para que este proyecto llegue a buen término; a Juan Molina por su disposición a escuchar mis reflexiones sobre Optimización y entregarme sus aportes sobre el vaivén de la matemática. He recibido muchos comentarios de Adriana Piazza y Carlos Caamaño, a ambos les agradezco muchísimo por haberse tomado el trabajo de leer una versión preliminar, también a Patricio Felmer y Salomé Martínez.

Igualmente va el agradecimiento a mi familia por el apoyo otorgado. Quiero dedicar esta monografía a mi madre y a la memoria de mi padre, quien desde donde esté quisiera que supiera lo mucho que aportó; a mi madre se lo hago saber siempre.

Concepción, Invierno del 2010 **Fabián Flores-Bazán**

Capítulo 1: Antecedentes Históricos y Motivación

En este capítulo se describen brevemente ciertos problemas de optimización que aparecieron en la antiguedad y otros que corresponden al mundo moderno, así como la formulación general del problema de optimización lineal. Además, se presentan algunos modelos de aplicación representativos: un problema de bienestar, un problema de transporte, un problema de la inversión, un problema de producción, un problema de la dieta y el problema de la mochila. Después, se da un esbozo de la geometría presente en dichas situaciones y se termina el capítulo con la resolución gráfica de problemas bidimensionales, incluyendo el problema de Herón.

1.1 Introducción

No hay duda que la palabra "Optimización" cada vez nos resulta más familiar hoy en día, tal vez porque el mundo actual siendo mucho más competitivo nos exige optimizar casi todo, principalmente para ganar tiempo y así realizar el mayor número de actividades posibles. La Optimización está presente en cualquier actividad planificada del ser humano, porque aparece en todos los ámbitos de nuestra vida cotidiana y en cualquier contexto: desde elegir la ruta más corta para llegar a nuestro destino o decidir a qué supermercado ir a realizar las compras con el objeto de minimizar costos, hasta cómo distribuir nuestro tiempo en el trabajo para permanecer mucho más en casa y menos agotados. Por ejemplo, los supermercados optimizan los horarios de trabajo y el número del personal, así como su distribución, para la atención al público durante el día; algo parecido ocurre con las compañías aéreas al momento de planificar sus vuelos y la rotación de la tripulación; los inversionistas toman decisiones de modo que minimicen sus riesgos de inversión.

En general, cualquier fábrica desea una eficiencia máxima en cada etapa del proceso de elaboración de sus productos, así como en el proceso organizacional de la empresa misma. Este proceso, que se origina con la llegada de la Revolución Industrial y que transforma los pequeños talleres en grandes organizaciones industriales (o empresas), tiene que ver con el mayor grado de especialización que muchas componentes de una misma organización estaba logrando alcanzar y, por lo tanto, se estaban planteando objetivos propios. Esto a su vez, dificultaba enormemente la asignación de recursos a las diferentes actividades para conseguir el mayor grado de eficacia para toda la empresa.

Pese a que las situaciones arriba mencionadas parecieran propias de nuestro mundo actual, ya en la antiguedad también se dedicaban a optimizar. Por ejemplo,

Dada una recta en el plano y dos puntos A y B a un lado de ella, encontrar un punto C sobre la recta de modo que la suma de las distancias de C a A y de C a B sea mínima.

Este problema fue propuesto por el matemático Herón, de Alejandría

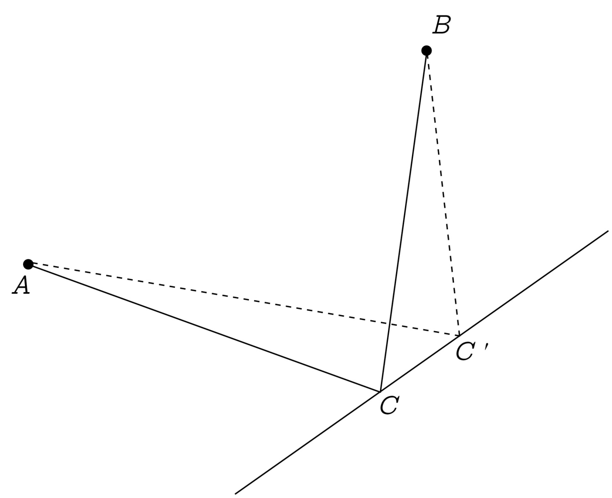


Figura 1.1. Suma de distancias mínima

Aunque lo anterior no obedece a ninguna situación de necesidad aparente, el intelecto humano ya sentía curiosidad por este problema de matemática (ver Figura 1.1). Su solución geométrica se mostrará en la Sección 1.6.

También existe un relato asociado a uno de los problemas más antiguos de optimización y data del siglo IX a. C. Tal problema es conocido como el problema de Dido (ver, por ejemplo, la Eneida de Virgilio, aunque también aparece en otras fuentes literarias, para ello dirigirse a cualquier buscador en internet, escribiendo "princesa de Dido" o "leyenda de Dido") el cual tiene que ver con la princesa fenicia del mismo nombre. La historia cuenta que la princesa, huyendo de la persecución de su hermano Pigmalión (quien asesinó a Siqueo, esposo de Dido), se dirigió, hacia el oeste de las costas del Mediterráneo en busca del paraíso. En su recorrido encontró un lugar por el cual se sintió atraída y decidió comprar una extensión de terreno que pudiese ser medido con la piel de un toro (el lugar es conocido actualmente como la bahía de Túnez). Al cerrar la compra con el líder local, aparentemente a un precio muy mezquino, la princesa procedió a cortar una piel de toro en tiras tan finas como pudo, las unió y con la única tira resultante cercó un extenso terreno. Sobre éste, con el pasar el tiempo, la princesa construyó una fortaleza y la ciudad de Cartago, donde ella finalmente murió como una mártir. Obviamente, mientras más fina sean las tiras, mayor será el terreno cercado por la tira resultante; pero una vez cortada la piel, la longuitud de la tira se mantiene.

El problema de Dido puede formularse, en lenguaje moderno, de la siguiente manera: *entre todas las curvas cerradas en el plano de una longuitud dada, encontrar aquella que encierra el área máxima.* Tal problema se conoce como un *problema isoperimétrico* y tiene una respuesta muy simple, una *circunferencia*.

Desde entonces, destacados pensadores han establecido principios que daban cuenta de la presencia de la optimización en todo lo que nos rodea. Por ejemplo, Pierre Fermat afirmaba que "la naturaleza opera por vías que son las más fáciles y rápidas". También, Leonard Euler observó que "nada que continúe persiste en el mundo que no provenga de un máximo o mínimo".

Por otro lado, los sistemas físicos tienden a un estado de mínima energía; las moléculas en un sistema químico aislado reaccionan entre ellas hasta que la energía potencial de sus electrones alcanzan su mínimo valor; los rayos de luz siguen aquellas trayectorias que minimizan el tiempo de duración del viaje.

¿Qué es la optimización?

La optimización puede ser considerada como una parte de la matemática que se ocupa del estudio de problemas de decisión, con el fin de determinar, entre las diferentes posibles alternativas, aquella que resulta la mejor respecto de objetivos preestablecidos.

Se debe distinguir dos tipos de problemas de optimización: "*mono-objetivo*" o escalar y "*multiobjectivo*" . La primera, tiene que ver con minimizar o maximizar una sola función objetivo y aquí el concepto de solución está claramente definido; mientras que la segunda, se refiere a optimizar más de una función objetivo, en tal caso el concepto de solución debería ser precisado, distinguiéndose entre ellas la llamada "*eficiente*" (también conocida como solución Pareto optimal) y "*débilmente eficiente*" (o Pareto optimal débil).

En esta monografía se va a considerar una clase particular de problemas de optimización mono-objetivo, los llamados problemas de *optimización lineal*, los que se estudiarán a lo largo de los cuatro capítulos, mientras que sólo uno estará dedicado a la *optimización lineal multiobjetivo* limitándose a lo más básico y fundamental.

Elementos que intervienen en un problema de Optimización

En la definición respecto de qué es Optimización (escalar o mono-objetivo), podemos distinguir dos elementos fundamentales, a saber, la "*función objetivo*" y las "*variables de decisión*". La función objetivo es aquella que uno debe optimizar: maximizar o minimizar y mide cuantitativamente la realización de la actividad, por ejemplo, puede medir el beneficio, tiempo, costo o cualquier cantidad que represente numéricamente el objetivo a alcanzar. Las variables de decisión son aquellas que determinan precisamente la decisión a tomar para que el objetivo se alcance de modo óptimo y que son propias de las características de la actividad considerada. Generalmente, estas variables están restringidas dando origen al conjunto de restricciones, es decir, aquellas condiciones que deben satisfacer las variables sobre las que depende la función objetivo. Nuestro propósito, entonces, es obtener un valor de las variables de manera que ahí la función objetivo alcance su valor óptimo.

1.2 Modelos de Aplicación

A continuación, a modo de ilustración, se presenta algunos modelos de aplicación que aparecen en las ciencias aplicadas e ingeniería. Aun cuando los modelos en el mundo real pueden ser más complejos, los aquí descritos nos muestran el amplio rango de aplicabilidad de la optimización lineal. Otros modelos se pueden encontrar en la lista de problemas al final del capítulo.

Un Problema de Bienestar

Mercedes acaba de ingresar a la universidad y se da cuenta que si sólo estudia y no juega se convertirá en un persona irritable. Por lo tanto, desea distribuir su tiempo disponible, aproximadamente de 10 horas por día, entre estudio y juego. Ella considera que el juego es doblemente más divertido que el estudio y que debe estudiar al menos un tiempo igual al que pasa jugando. Sin embargo, para cumplir con sus obligaciones de estudiante, estima que no puede jugar más de 4 horas diaras, ¿cómo debe distribuir su tiempo para maximizar su bienestar o grado de placer?

Se define las variables de decisión x_1 como el tiempo (en horas) destinadas al estudio en un día y x_2 el tiempo (en horas) dedicadas a jugar en un día. Luego, la función objetivo que mide el placer de Mercedes es:

$$x_1 + 2x_2.$$

Debido a las consideraciones impuestas, se deduce que:

$$x_1 \geq x_2, \; x_2 \leq 4. \tag{1.1}$$

Además, se tienen las restricciones

$$x_1 + x_2 \leq 10, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \tag{1.2}$$

Luego, el problema consiste en maximizar la función $x_1 + 2x_2$ sujeto a las restricciones (1.1) y (1.2).

Un Problema de Transporte

Una empresa productora de zapatos tiene tres plantas situadas en Santiago, Concepción y Valdivia, con una demanda de 400, 300 y 200 cientos de kilogramos de cuero especial, respectivamente. Tal material se provee desde Talca y Temuco donde se disponen de 550 y 350 cientos de kilogramos, respectivamente. Los costos de transporte, en miles de pesos por cientos de kilogramos, están reflejados en la tabla siguiente:

	Santiago	Concepción	Valdivia
Talca	3	5	6
Temuco	4	3	5

Tabla 1.1

Se desea determinar la cantidad del material que debe adquirirse en cada uno de los dos lugares para ser trasladados a las diferentes plantas, de manera que el costo de transporte incurrido sea el menor posible.

Definimos las variables de decisión siguientes,

x_{11}: cantidad del material (100 kg) transportado de Talca a Santiago;
x_{12}: cantidad del material (100 kg) transportado de Talca a Concepción;
x_{13}: cantidad del material (100 kg) transportado de Talca a Valdivia;
x_{21}: cantidad del material (100 kg) transportado de Temuco a Santiago;
x_{22}: cantidad del material (100 kg) transportado de Temuco a Concepción;
x_{23}: cantidad del material (100 kg) transportado de Temuco a Valdivia;

Evidentemente,

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Debido a la disponibilidad del material en Talca y Temuco, se tiene

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350. \end{cases} \tag{1.4}$$

Considerando las demandas en Santiago, Concepción y Valdivia, obtenemos

$$\begin{cases} 400 \leq x_{11} + x_{21} \\ 300 \leq x_{12} + x_{22} \\ 200 \leq x_{13} + x_{23}. \end{cases} \tag{1.5}$$

La función objetivo que debemos considerar es aquella que nos da el costo total, es decir,

$$3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23}. \tag{1.6}$$

En síntesis, el problema consiste en minimizar la función dada por (1.6) sujeto a las restricciones determinadas por las desigualdades (1.3), (1.4) y (1.5).

Un Problema de Inversión

A continuación veamos un modelo simplificado de un problema de inversión de una firma bancaria.

Supongamos que cierto banco tiene 500 millones de pesos para realizar una inversión. Desea destinar parte de ella a PRÉSTAMOS (p) y la diferencia a ACCIONES (a). Evidentemente, los préstamos tienen un interés mayor que las acciones, pero estas últimas tienen la ventaja que pueden ser vendidos en cualquier momento a precio de mercado.

En nuestro modelo se supone que la tasa de ganancia para los préstamos y acciones son, respectivamente, 12 % y 6 % anuales.

Sea p y a la cantidad (en millones de pesos) de dinero destinado para préstamos y para las acciones, respectivamente (aquí las variables de decisión son p y a). En este caso, la función costo se traduce como la ganancia total al año y está determinada por

$$0{,}12p + 0{,}06a, \tag{1.7}$$

la cual el Banco desea maximizar bajo ciertas restricciones que a continuación explicitamos:

capital disponible: suponemos que el Banco dispone de 500 millones de pesos, luego, se debe cumplir

$$p + a \leq 500; \tag{1.8}$$

capacidad de liquidez: por razones de salvaguarda, el Gobierno obliga que el Banco tenga una liquidez de, al menos, 25 % del total de sus inversiones, esto de traduce en $a \geq 0{,}25(p + a)$, de donde

$$p - 3a \leq 0; \tag{1.9}$$

confianza en los clientes: debido a la trayectoria del Banco, éste ya cuenta con un cierto número de clientes a quienes no desea defraudar, digamos que esto significa destinar el monto de 180 millones de pesos. Así,

$$p \geq 180; \tag{1.10}$$

no negatividad: por razones obvias, debemos tener

$$p \geq 0, \;\; a \geq 0. \tag{1.11}$$

En el lenguaje financiero al par (p, a) se le conoce como un portafolio; y un portafolio que satisface las cuatro restricciones anteriores será un portafolio admisible. Luego, el objetivo del Banco es encontrar un portafolio optimal, es decir, uno que satisfaga las desigualdades (1.8), (1.9), (1.10) y (1.11), el cual además maximice la ganancia dada por (1.7). Esto se expresa matemáticamente como:

$$\begin{array}{lcccl}
\max & 0{,}12p & + & 0{,}06a & \\
\text{s.a.} & -p & - & a & \geq -500 \\
 & -p & + & 3a & \geq 0 \\
 & p & & & \geq 180 \\
 & p \geq 0, & a \geq 0. & &
\end{array}$$

El problema de la inversión pertenece al mundo de la "Gestión de inversiones" y el modelo discutido aquí es uno simplificado del que Alfred Broaddus consideró en 1972 en el trabajo "Programación lineal: un nuevo método para la gestión de la cartera bancaria" publicado en la revista *"Monthly review of the federal reserve bank of Richmond"*.

Un problema de Producción

Un restaurante vende empanadas de carne y hamburguesas de carne con queso. En una empanada se usa 120 g de carne, mientras que en una hamburguesa 90 g. El restaurante inicia su día con 99 kg de carne, pero puede solicitar más, con un costo adicional de 240 pesos por kilo para cubrir el costo de la entrega. La carne sobrante se dona al Hogar de Cristo. Las ganancias del local son 93 pesos por una empanada y 75 pesos por una hamburguesa. El establecimiento no espera vender más de 1000 unidades (entre empanadas y hamburguesas) en cualquier día, ¿cuántas empanadas y hamburguesas debe planear el restaurante para el día?

Definimos primero las variables de decisión. Sean x_1 y x_2 el número de empanadas y hamburguesas a producir diariamente: la cantidad diaria de carne dependerá si el restaurante decide quedarse con el límite inicial de 99 kg, o si solicita carne adicional. Si se queda con 99 kg, se tiene

$$120x_1 + 90x_2 \leq 99000;$$

en cambio, si opta por solicitar carne adicional, se tendría

$$120x_1 + 90x_2 \geq 99000.$$

Como, a priori, no se sabe cuál de las dos restricciones considerar, se unifica ambas en una sola:

$$120x_1 + 90x_2 + x_3 = 99000,$$

donde x_3 no tiene restricción de signo, es decir, puede ser negativa o positiva. Se sabe (ver la Subsección 1.3) que es posible escribir $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ con $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$, y donde ambos no pueden ser positivos al mismo tiempo: concretamente se tiene $x_3^+ = \max\{x_3, 0\}$, $x_3^- = \max\{-x_3, 0\}$.

Veamos ahora la función objetivo. El restaurante desea maximizar su ganancia que es $93x_1 + 75x_2$, en el caso de optar por quedarse con la cantidad inicial de carne; mientras que solicitando carne adicional, la ganancia sería $93x_1 + 75x_2 - 0{,}24x_3^-$, pues en tal caso se debe tener $x_3 < 0$, y, por lo tanto, $x_3^- = -x_3$, $x_3^+ = 0$.
Finalmente se tiene la restricción

$$x_1 + x_2 \leq 1000. \tag{1.12}$$

Luego, el problema consiste en maximizar $93x_1 + 75x_2 - 0{,}24x_3^-$, sujeto a las restricciones (1.12) y

$$120x_1 + 90x_2 + x_3^+ - x_3^- = 99000,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0.$$

El Problema de la Dieta

Se formularán dos problemas sobre cómo preparar comidas nutricionalmente adecuadas al menor costo.

1. Una fábrica que produce comida para perros, en latas de 450 gramos (g), desea saber las proporciones de 4 tipos de productos que debe mezclar, de modo que el resultado contenga al menos 90 g de proteínas, 150 g de carbohidratos y 120 g de grasa, con el propósito de obtener el menor costo posible.
El cuadro adjunto muestra el contenido de nutrientes presentes en cada uno de los 4 productos por cada 450 g.

Producto	Proteínas (g)	Carbohidratos (g)	Grasas (g)	Precio (pesos)
1	90	210	150	2800
2	150	120	180	3600
3	60	60	180	1800
4	90	240	60	1200

Tabla 1.2

Considerando la primera fila de la tabla adjunta, se lee que: 450 g del producto 1 cuestan 2800 pesos y contienen 90 g de proteínas, 210 g de carbohidratos y 150 g de grasas; 450 g del producto 2 cuestan 3600 pesos y contienen 150 g de proteínas, 120 g de carbohidratos y 180 g de grasas y así sucesivamente.
Definimos las variables (de decisión) siguientes:

x_1: proporción del producto 1 presente en la comida enlatada (1 lata);
x_2: proporción del producto 2 presente en la comida enlatada (1 lata);
x_3: proporción del producto 3 presente en la comida enlatada (1 lata);
x_4: proporción del producto 4 presente en la comida enlatada (1 lata).

La función costo a considerar es

$$2800x_1 + 3600x_2 + 1800x_3 + 1200x_4, \tag{1.13}$$

que es el costo por 1 lata de comida. Por cuestiones nutricionales, la comida (1 lata) para perros debe contener al menos 90 g de proteínas, 150 g de carbohidratos y 120 g de grasa. Estas restricciones se escriben como:

$$\begin{cases} 90x_1 + 150x_2 + 60x_3 + 90x_4 \geq 90 \\ 210x_1 + 120x_2 + 60x_3 + 240x_4 \geq 150 \\ 150x_1 + 180x_2 + 180x_3 + 60x_4 \geq 120 \end{cases} \tag{1.14}$$

Además, las variables x_i también deben satisfacer

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \tag{1.15}$$

y obviamente,

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \tag{1.16}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a minimizar (1.13) sujeto a las restricciones dadas por (1.14), (1.15) y (1.16).

2. Una escuela de enseñanza básica de Concepción desea diseñar un menú para sus alumnos al más bajo costo, proporcionando, al menos, 2000 kilocalorías de energía, 52 gramos (g) de proteínas y 820 miligramos (mg) de calcio. Los productos a considerar en la elaboración del menú y sus características figuran en la tabla adjunta:

Producto	Tamaño	Energía (kilocalorías)	Proteínas (g)	Calcio (mg)	Precio (pesos)
pollo	100 g	205	32	12	1500
pan	30 g	110	4	2	100
huevo	2 u	160	13	54	100
leche	240 cm^3	160	8	285	300
legumbre	260 g	260	14	80	140
fruta	170 g	420	4	22	150

TABLA 1.3

Por otro lado, se exige que el menú propuesto no incluya más de 250 g de pollo, 90 g de pan, 2 u de huevos, 960 cm^3 de leche, 340 g de fruta y tampoco más de 440 g de legumbre. Transformando estas cantidades en unidades de cada producto, teniendo en cuenta la tabla, lo anterior es equivalente a decir que el menú no debe contener más 2.5 u de pollo, 3 u de pan, 4 u de leche, 1.5 u de legumbre, 2 u de fruta.
Definimos las variables (de decisión) siguientes:

x_1: cantidad (u) de pollo presente en el menú;
x_2: cantidad (u) de pan presente en el menú;
x_3: cantidad (u) de huevos presente en el menú;
x_4: cantidad (u) de leche presente en el menú;
x_5: cantidad (u) de legumbre presente en el menú;
x_6: cantidad (u) de fruta presente en el menú;

La función costo a considerar es

$$1500x_1 + 100x_2 + 100x_3 + 300x_4 + 140x_5 + 150x_6, \tag{1.17}$$

que se debe minimizar sujeta a las restricciones determinadas por las desigualdades (1.18), (1.19), (1.20) y (1.21), donde:

$$\left\{\begin{array}{c} 205x_1 + 110x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 260x_5 + 420x_6 \geq 2000 \\ 32x_1 + 4x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 14x_5 + 4x_6 \geq 52 \\ 12x_1 + 2x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 80x_5 + 22x_6 \geq 820, \end{array}\right. \tag{1.18}$$

$$x_1 \leq 2{,}5,\ x_2 \leq 3,\ x_3 \leq 2,\ x_4 \leq 4,\ x_5 \leq 1{,}5,\ x_6 \leq 2, \tag{1.19}$$

y las restricciones de no negatividad,

$$0 \leq x_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \tag{1.20}$$

Evidentemente, también se deben añadir las restricciones

$$x_2 \in I\!N,\ x_3 \in I\!N,\ x_6 \in I\!N. \tag{1.21}$$

Por lo tanto, el problema es un modelo de optimización lineal entera, cuyo estudio no está entre los objetivos de esta monografía. De manera que en los capítulos siguientes se excluirán problemas con restricciones del tipo (1.21).

El problema de la dieta (aunque no necesariamente el modelo estudiado aquí) fue considerado por George J. Stigler en un trabajo titulado "El costo de la subsistencia" publicado en la revista *"Journal of farm economics"*, en 1945.

Si bien es cierto que el problema **1** de la dieta no ocasiona mucha dificultad tratándose de comidas para perros, pues podemos mezclar los productos en cantidades arbitrarias, el real problema de la dieta, que consiste en preparar las mejores comidas al menor costo, es un problema de optimización lineal entera (ver problema **2**), que requiere herramientas adicionales no tratadas en esta monografía.

La elaboración de menúes especiales es el principal objetivo de la Administración de Alimentos en escuelas, jardines de infancia, hospitales, asilos, hogar de menores, cárceles, o simplemente para adelgazar.

El Problema de la Mochila

Un explorador desea emprender una caminata llevando consigo, entre los n artículos que tiene a su disposición, aquellos más útiles para su propósito. Se sabe que la persona no puede llevar más de $b(> 0)$ kgs en total en su mochila. A cada artículo le asigna un valor $c_i(> 0)$ que refleja el grado de importancia/utilidad relativo, respecto del resto del equipamiento: a mayor valor de c_i, mayor será la importancia que tiene el artículo i en el equipamiento, y, por lo tanto, el explorador estará en mejores condiciones. Sea $a_i(> 0)$ el peso (en kgs) del artículo i. El problema del explorador consiste en determinar cuáles artículos debe llevar consigo; eligiendo aquellos que maximizen la utilidad total del equipamiento, teniendo en consideración el límite acerca del peso que puede soportar.

Se define ahora las variables de decisión. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se pone $x_i = 0$, si el artículo i no se lleva; $x_i = 1$, si el artículo i se lleva. Luego, la función objetivo, que en este caso recibe el nombre de función de utilidad, es

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n. \tag{1.22}$$

Como $a_i x_i$ representa el peso del artículo i en la mochila, la restricción sobre el peso que soporta la mochila queda expresado en la desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b. \tag{1.23}$$

Así, el problema consiste en maximizar la función objetivo dada por (1.22) sujeto a las restricciones determinadas por (1.23) y (1.24):

$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.24}$$

Al igual que el problema **2** de la dieta, este tipo de problemas no es de optimización lineal por el tipo de restricciones (1.24). Estos problemas son llamados problemas lineales binarios: lineales, porque las funciones que determinan las restricciones propiamente tales son de este tipo, pero los valores de las variables son binarios, es decir, sólo toman dos posibles valores.

El estudio de tales problemas están fuera del alcance de esta monografía. La variante de este problema que se obtiene al considerar las restricciones

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

en lugar de (1.24) se presenta en el Ejemplo 1.6 junto con su solución, ver también el Capítulo 4.

El modelo clásico de la mochila hace referencia a un soldado (o montañista) que debe decidir cuáles son los artículos más valiosos que debe llevar en su mochila. A tal complicación también se le conoce como el problema de *equipo de vuelo*, donde en una situación de emergencia, un piloto de avión debe determinar los artículos más importantes para llevar a bordo; y el problema de *carga de flete* o *contenedor*, en el que un barco con capacidad limitada de volumen o peso debe cargarse con los fletes más valiosos.

1.3 Formulación del Problema de Optimización Lineal

El proceso de la formulación del problema consiste en la modelación de él, el cual tiene que ver con la identificación de la función objetivo y las variables, además del conjunto de las restricciones.

Poder resolver el problema depende mucho del modelo, es decir, la formulación debe ser adecuada como para que nos entregue suficiente información sobre éste y no muy compleja que pueda impedir resolverlo numéricamente.

Su resolución requiere de un algoritmo de optimización, la ejecución de él, como ya es conocido, necesitará de un computador, aun cuando el número de restricciones o el número de variables sea dos. En tal caso, algunos problemas podrán resolverse geométricamente como se verá más adelante.

Cualquier problema de optimización lineal se puede representar de la manera siguiente:

$$\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{array}\right. \tag{1.25}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{1.26}$$

Debido a que

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = -\text{minimizar } \sum_{i=1}^{n} (-c_i)x_i,$$

todo problema de maximización puede convertirse en un problema de minimización y viceversa.

La función $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ es la llamada "*función objetivo*" o "*función costo*" o "*función criterio*". Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reciben el nombre de "*coeficientes de costo*", mientras que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las "*variables de decisión*" o "*variables estructurales*" o "*niveles de actividad*" cuyos valores están por determinarse. Cada una de las desigualdades $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ denota la "*i-ésima restricción*" o "*restricción estructural*" o "*restricción tecnológica*"; mientras que las restricciones $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, son las "*restriciones de no negatividad*". El vector b recibe el nombre de "*vector del lado derecho*" y representa los requerimientos mínimos a ser satisfechos. Finalmente, los coeficientes a_{ij} reciben el nombre de "*coeficientes tecnológicos*".
El "*conjunto o región factible*" está determinado por (1.25) y (1.26), es decir, es aquel conjunto de $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface (1.25) y (1.26). Tales elementos se llaman "*soluciones factibles*" o "*puntos factibles*" o "*puntos admisibles*".

En términos matriciales, la formulación del problema anterior queda expresada como

$$\left\{\begin{array}{ccc} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a}: & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0, \end{array}\right. \tag{1.27}$$

donde $c^\top = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)$, $x^\top = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ son vectores filas de n componentes (por lo que x y c son vectores columnas), $b^\top = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_m)$ es un vector fila de m componentes, y $A = (a_{ij})$ es la matriz de orden $m \times n$. Como es habitual, $c^\top$, $x^\top$, representan las transpuestas de los vectores columnas

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Veamos que todo problema de optimización lineal puede escribirse en la forma (1.27).

Invirtiendo una desigualdad
Toda desigualdad de la forma

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \leq b,$$

después de ser multiplicada por -1, se convierte en

$$-r_1x_1 - r_2x_2 - \cdots - r_nx_n \geq -b,$$

que tiene la forma prescrita en (1.25).

Convirtiendo una desigualdad en igualdad
La desigualdad

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \leq b,$$

puede escribirse equivalentemente agregando la variable *"inactiva"*, $x_{n+1} \geq 0$, como la igualdad:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n + x_{n+1} = b.$$

En este caso, x_{n+1} recibe el nombre de *variable de holgura*.
En cambio, si se tiene la desigualdad

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \geq b,$$

ésta puede escribirse equivalentemente como igualdad añadiendo la variable *"inactiva"* $x_{n+1} \geq 0$:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n - x_{n+1} = b.$$

En este caso, x_{n+1} recibe el nombre de *variable de exceso*.

Variables sin restricción de signo
En este caso, cada variable x_j que no tiene restricción de signo en la desigualdad

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_jx_j + \cdots + r_nx_n \geq b,$$

la reemplazamos por $x_j = x_j^+ - x_j^-$ con $x_j^+ \doteq \max\{x_j, 0\}$ y $x_j^- \doteq \max\{-x_j, 0\}$. Así, $x_j^+ \geq 0$ y $x_j^- \geq 0$ y $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$. Por lo tanto, la desigualad anterior, se reduce a

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_jx_j^+ - r_jx_j^- + \cdots + r_nx_n \geq b,$$

junto con las restricciones $x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0$. Esta misma operación se realiza en cada desigualdad donde aparece x_j.

Convirtiendo una igualdad en desigualdad
La igualdad

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = b,$$

puede escribirse equivalentemente como dos desigualdades de la forma deseada:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \geq b,$$

$$-r_1x_1 - r_2x_2 - \cdots - r_nx_n \geq -b.$$

La última equivalencia, aunque útil, tiene la desventaja que por cada igualdad aparecen dos restricciones de desigualdad. El siguiente ejercicio nos da una alternativa para escribir una equivalencia con sólo una restricción adicional.

Ejercicio 1.1. Demostrar que las m ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

equivalen a las $m + 1$ desigualdades siguientes:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Ejercicio 1.2. Usando la metodología antes descrita, concluir que los problemas de la Sección 1.2 pueden escribirse en la forma (1.27), excluyendo las restricciones enteras o binarias.

Cuando las restricciones están expresadas en la forma (1.25), se dice que el problema está escrito en su forma *canónica*; en cambio, si las desigualdades en (1.25) son todas igualdades, decimos que el problema de optimización lineal está escrito en su forma *estándar*, en otras palabras, cuando se tiene

$$\begin{array}{rll} & \min c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0. \end{array}$$

El algoritmo del simplex a ser estudiado en el Capítulo 3 será presentado para problemas escritos en su forma estándar; mientras que la forma canónica servirá para desarrollar el esquema de dualidad en el Capítulo 4.

Ejemplo 1.1. Escribir el problema de maximización siguiente como uno de minimización en su forma estándar.

$$\begin{array}{lccccccl} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq 1 \\ & x_1 & \geq & 0, & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Como x_3 no tiene restricción de signo, en virtud de lo discutido anteriormente, se escribe $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$; se añade la variable de holgura $x_4 \geq 0$ a la segunda restricción y la variable de exceso $x_5 \geq 0$ a la tercera restricción. Luego, resulta:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} -\min & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3^+ & + & 3x_3^- & + & 0x_4 & + & 0x_5 & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3^+ & + & 3x_3^- & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3^+ & + & 5x_3^- & + & x_4 & + & 0x_5 & = 2 \\ & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3^+ & + & x_3^- & + & 0x_4 & - & x_5 & = 1 \\ & x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3^+ & \geq 0, & x_3^- & \geq 0, & x_4 & \geq 0, & x_5 & \geq 0. \end{array}$$

En base a lo anterior se enuncia el lema siguiente, cuyos detalles de la demostración se dejan a lector.

Lema 1.1. *Todo problema de optimización lineal, escrito en forma canónica, puede ser formulado de manera estándar y recíprocamente.*

No obstante el lema anterior, el problema sin restricciones de no negatividad

$$(P_s) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & \min c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \text{sin restricción} \end{array} \right.$$

admite formalmente una formulación estándar (simplemente poner $x_i = x_i^+ - x_i^-$, con $x_i^+ \geq 0$, $x_i^- \geq 0$), pero no tiene mucho sentido considerar dicho problema (P_s), como lo afirma el teorema más adelante. Denotando el "núcleo de A" mediante

$$\ker(A) \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax = 0\},$$

la proposición siguiente es útil para nuestro propósito.

Proposición 1.2. *Sea A una matriz de orden $m \times n$ y $b \in I\!R^m$. Supongamos que*

$$K = \{x \in I\!R^n : \ Ax = b\} \neq \emptyset.$$

Entonces:

(a) $K = x_0 + \ker(A)$, *para cualquier* $x_0 \in K$;

(b) $\ker(A) = \{0\}$, *si y sólo si* K *es un conjunto con un solo elemento.*

Demostración.
(a): Obviamente $x_0 + \ker(A) \subseteq K$, pues $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = Ax_0 = b$ si $v \in \ker(A)$ y $x_0 \in K$. Por otro lado, para cualquier $x \in K$, se tiene que $x = x_0 + (x - x_0) \in x_0 + \ker(A)$, pues $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$; lo que completa la demostración de $x_0 + \ker(A) = K$.
(b): Es una consecuencia de la Parte (a). $\square$

El teorema siguiente muestra que la resolución del problema (P_s) es trivial.

Teorema 1.3. *Sean A una matriz de orden $m \times n$ y $b \in I\!R^m$. Dado $c \in I\!R^n$, $c \neq 0$, se considera el problema (P_s). Si el conjunto factible no es vacío, entonces se cumple sólo una de las dos afirmaciones siguientes:*

(a) *el valor óptimo es $-\infty$; o*

(b) *en el caso de que el valor óptimo sea finito, se tiene que el valor de la función objetivo es constante en cualquier solución factible.*

Demostración. Veamos la Parte (b). Debido a la proposición anterior se considera sólo el caso cuando $\ker(A) \neq \{0\}$. Se sabe que $K = x_0 + \ker(A)$ donde x_0 es cualquier elemento de K. Luego, como el valor óptimo es finito, existe $\gamma \in I\!R$ tal que

$$c^\top(x_0 + tv) \geq \gamma, \ \text{para todo } t \in I\!R \text{ y todo } v \in \ker(A). \tag{1.28}$$

Se postula que $c^\top v \geq 0$, para todo $v \in \ker(A)$. En efecto, si $c^\top v < 0$, entonces, eligiendo t suficientemente grande, por ejemplo, $t > \frac{c^\top x_0 - \gamma}{-c^\top v}$, se obtiene que $\gamma > c^\top(x_0 + tv)$, lo cual contradice (1.28). Por lo tanto, $c^\top v \geq 0$, para todo $v \in \ker(A)$, y como $v \in \ker(A)$ implica $-v \in \ker(A)$, se concluye que $c^\top v = 0$, para todo $v \in \ker(A)$. En consecuencia, para cualquier $x \in K = x_0 + \ker(A)$, se tiene $c^\top x = c^\top x_0 + c^\top v = c^\top x_0$, lo que prueba el teorema. $\square$

Formas equivalentes en optimización lineal

Veremos a continuación diferentes formulaciones de problemas de optimización lineal que pueden expresarse de modo equivalente a un problema en su forma estándar.

Ejemplo 1.2. Dados A, b, c, α y β, el problema formulado de la manera siguiente

$$\begin{array}{lcl} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & \beta \geq x \geq \alpha, & \end{array}$$

se puede escribir en su forma estándar como

$$\begin{array}{rccccc} \min & c^\top x' & + & c^\top \alpha & & \\ \text{sujeto a :} & Ax' & + & 0x'' = & b - A\alpha \\ & Ix' & + & Ix'' = & \beta - \alpha \\ & x' \geq & 0, & x'' \geq 0, & \end{array}$$

donde I representa la matriz identidad del mismo orden que el vector x' o x'', según corresponda. En efecto, poniendo $x' = x - \alpha$, la restricción $Ax = b$ se reduce a $Ax' = b - A\alpha$; la función objetivo $c^\top x$ se convierte en $c^\top x' + c^\top \alpha$ y, además, se tiene $0 \leq x' \leq \beta - \alpha$. Así, añadiendo la variable inactiva $x'' \geq 0$ a la última desigualdad para convertir en igualdad el lado derecho, resulta

$$x' + x'' = \beta - \alpha,$$

de donde se obtiene la formulación deseada.

Ejemplo 1.3. Consideramos el problema siguiente

$$\begin{array}{rcccc} \min & c^\top x & + & \sum_{i=1}^m |v_i| & \\ \text{sujeto a :} & Ax & + & Iv = & b \\ & x \geq 0, & v \text{ sin} & \text{restricción}, & \end{array}$$

donde, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in I\!\!R^m$. Escribiendo $v = v^+ - v^-$ con $v^+ \geq 0$, $v^- \geq 0$, ó más precisamente, $v_i = v_i^+ - v_i^-$, de modo que $|v_i| = v_i^+ + v_i^-$, dicho problema tiene la formulación estándar siguiente:

$$\begin{array}{rcccccc} \min & c^\top x & + & \mathbf{1}^\top v^+ & + & \mathbf{1}^\top v^- & \\ \text{sujeto a :} & Ax & + & Iv^+ & - & Iv^- = & b \\ & x \geq 0, & v^+ \geq 0, & v^- \geq 0. & & & \end{array}$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector (columna) en $I\!\!R^m$ con todas sus componentes iguales a 1 e I es la matriz identidad de orden $m \times m$.

1.4 Antecedentes históricos

Lo que sigue, en parte, fue extraído del libro [**S**].

La Optimización Lineal está ligada históricamente a la "Investigación Operativa", apareciendo ésta, formalmente, en 1938 en el contexto de investigaciones conjuntas entre militares y científicos civiles, sobre planificación de operaciones militares de vuelo, durante la Segunda Guerra Mundial.

Pero la expresión "Programación Matemática" nace en el lenguaje de las colaboraciones científicas - militares, entendiendo por "programa" a los proyectos desarrollados en su ámbito, y esto surge en 1947 con los trabajos de George B. Dantzig en planificación de tareas dentro del Pentágono (Estados Unidos). Se debe destacar que en tales trabajos no se mencionaba ningún modelo donde aparecía la función objetivo a optimizar. El matemático y economista L. V. Kantorovich publicó en la (ex-)URSS una monografía en 1939 sobre Optimización, pero por razones ideológicas, éste se divulgó recien en 1959, cuando ya había avances en el tema. Algo parecido sucedió con un artículo publicado en 1941 por Hitchcock sobre el problema de transporte. Mejor suerte tuvieron los trabajos sobre el problema de distribución desarrollados por el economista y matemático T. C. Koopmann en 1941. Pero la gran metodología para estos problemas fue la desarrollada por Dantzig, inicialmente durante el verano del 1947, para problemas de transporte y, posteriormente, en 1951 extendida para la optimización lineal. Por tanto, la concepción de problemas de programación lineal se debe a Dantzig, aunque el término "programación" fue realmente acuñado por Koopmann en el verano 1948 mientras paseaba junto a Dantzig por la playa de Santa Mónica en California (EEUU).

Claramente, se optó por usar la palabra "Optimización" en el título de la presente monografía en vez de "Programación" para darle un carácter más universal.

1.5 Geometría del Problema de Optimización Lineal

En esta sección se describen geométricamente cada uno de los elementos involucrados en la formulación del problema de optimización lineal: las variables de decisión y la función objetivo.

Las variables de decisión deben ser elementos del conjunto admisible o región factible y el estudio del valor de la función objetivo nos conduce a analizar sus superficies de nivel.

Interpretación geométrica de la factibilidad del problema

Se ha visto que la región factible del problema de optimización lineal tiene la forma:

$$K = \Big\{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\Big\}.$$

Escribiendo la matriz A de orden $m \times n$ a través de sus columnas queda $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$, donde $a_j \in I\!R^m$, $j = 1, \ldots, n$. Luego, el conjunto K está compuesto por los vectores $x \in I\!R^n$, tales que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b, \ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Se introducen los conjuntos siguientes

$$\mathcal{A} \doteq \Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j : \ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \Big\} \text{ y } \mathcal{B} \doteq \Big\{ y \in I\!R^m : \ y \geq b \Big\} = b + I\!R^m_+,$$

donde $I\!R^m_+$ denota el octante no-negativo de R^m. El conjunto $\mathcal{A}$ recibe el nombre de *cono positivo generado* (convexo) por los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $I\!R^m$, y $\mathcal{B}$ es el conjunto de los vectores cuyas componentes son todas mayores o iguales que las respectivas componentes del vector b. En el caso $m = 2$ y $n = 3$ una representación geométrica para $\mathcal{A}$ se muestra en la Figura 1.2 y para $\mathcal{B}$, en la Figura 1.3.

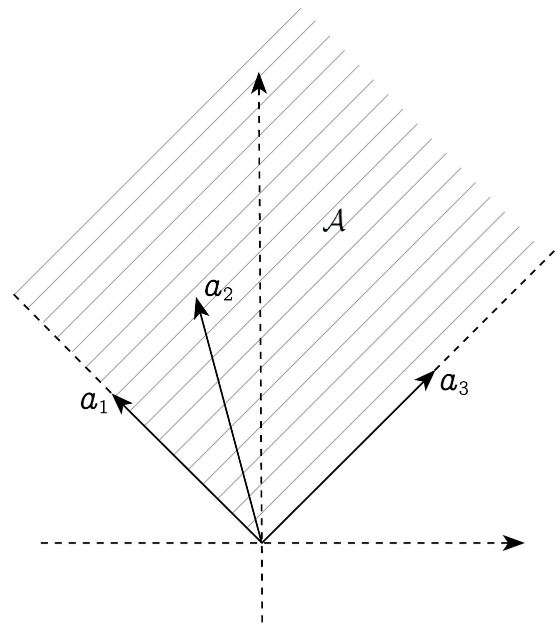


FIGURA 1.2. Cono positivo generado por las columnas de A

Teniendo en cuenta estos conjuntos, no es difícil demostrar la equivalencia

$$K \neq \emptyset \iff \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset.$$

En consecuencia, la factibilidad de un problema, es decir, para que K no sea vacío, debe ocurrir, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Un ejemplo gráfico se muestra en la Figura 1.4.

El lector ya puede dar un ejemplo de $\mathcal{A}$, es decir, de A y b con $m = 2$, de modo que $K = \emptyset$.

Veamos ahora el caso cuando K tiene la forma

$$K = \Big\{ x \in I\!R^n : \; Ax = b, \; x \geq 0 \Big\}.$$

Usando la representación $A = (a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n)$ con $a_j \in I\!R^m$, se observa que

$$K \neq \emptyset \iff b \in \mathcal{A},$$

es decir, si b pertenece al cono positivo generado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En la Figura 1.5 se ilustra una situación tal, cuando $m = 2$ y $n = 3$.

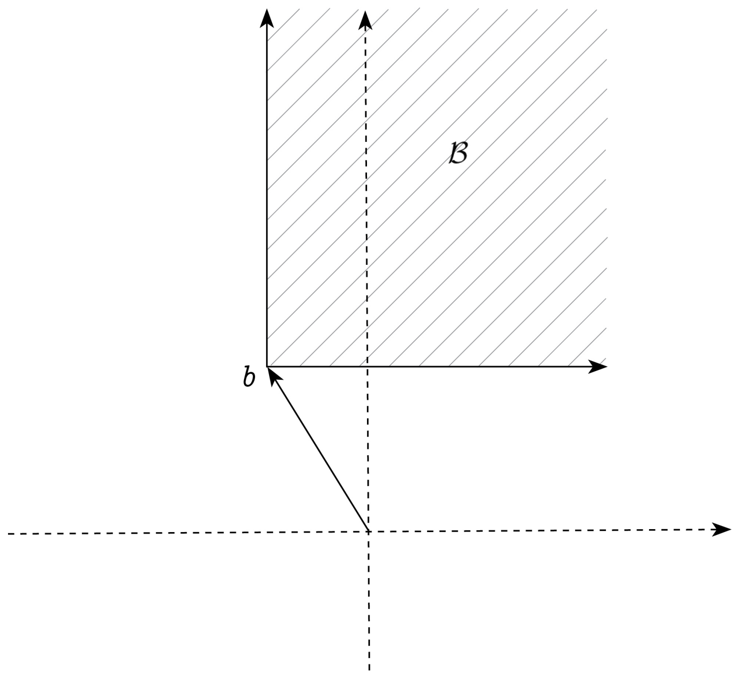


FIGURA 1.3. El conjunto $\mathcal{B}$

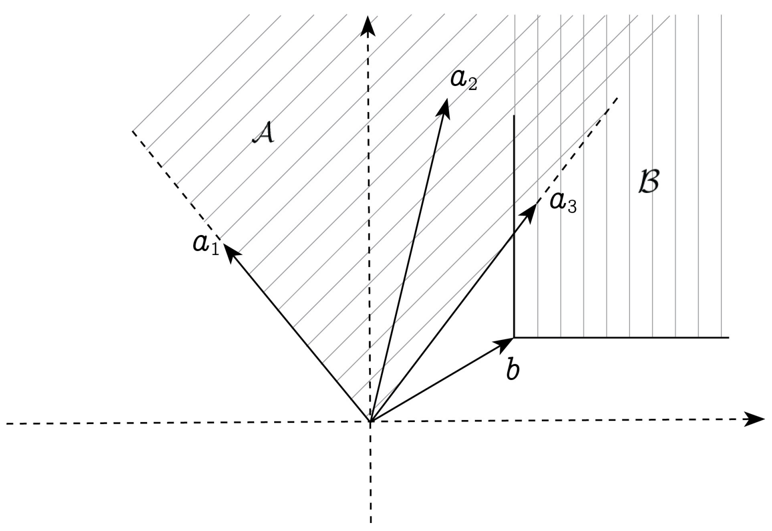


FIGURA 1.4. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$

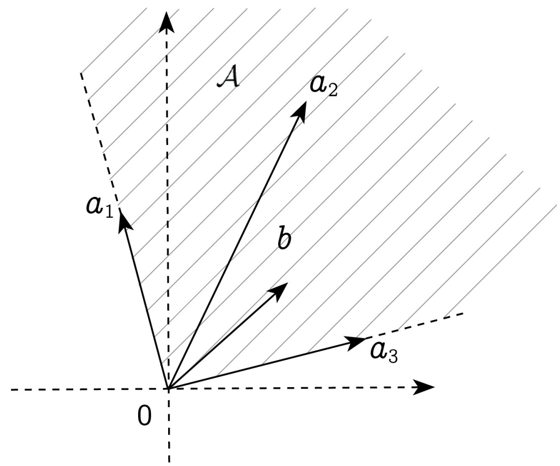


FIGURA 1.5. $b \in \mathcal{A}$

Interpretación de la función objetivo y optimalidad

Otro de los elementos involucrados en la formulación del problema de optimización lineal es la función objetivo.

Recordemos la definición siguiente

Definición 1.4. Dada una función $f : I\!R^n \to I\!R$ y $k \in I\!R$, el conjunto

$$\mathcal{N}_k = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : \ f(x_1, \ldots, x_n) = k\Big\}$$

recibe el nombre de *curva de nivel k* o, más generalmente, *superficie de nivel k*.

En otras palabras, $\mathcal{N}_k$ es el conjunto de puntos de $I\!R^n$, donde la función f toma el valor constante k. Es posible que dado $k \in I\!R$ se tenga $\mathcal{N}_k = \emptyset$: por ejemplo, si $n = 2$, $k < 0$ y $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Sin embargo, si $f(x) = c^\top x$, $c \in I\!R^n$, $c \neq 0$, entonces $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$, para todo $k \in I\!R$. En tal caso, $\mathcal{N}_k$ representa un hiperplano en $I\!R^n$ (ver Capítulo 2).

En consecuencia, si queremos minimizar f sobre un subconjunto K de $I\!R^n$ debemos encontrar el o los puntos del conjunto factible K, situados sobre la curva o superficie cuyo valor de nivel sea el menor posible.

1.6 Resolución Gráfica

En esta sección se describirá un método de solución para el problema de optimización lineal cuando el número de variables de decisión es dos, es decir, $x = (x_1, x_2) \in I\!R^2$. Concretamente, estudiaremos el problema

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2$$

s.a.

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}\right. \tag{1.29}$$

Poniendo $z = c_1x_1 + c_2x_2$, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, nosotros estamos interesados en encontrar valores de x_1 y x_2 ubicados en el conjunto factible (definidos por (1.29)), de modo que el valor de z sea el menor posible. Dado cualquier valor de z la ecuación $c_1x_1+c_2x_2 = z$ define una recta en el plano que es perpendicular al vector (c_1, c_2) (¿por qué?). Dicha recta es la curva de nivel z de la función objetivo $f(x_1, x_2) = c_1x_1+c_2x_2$. En otras palabras, las curvas de nivel son rectas todas paralelas entre sí y perpendiculares al vector (c_1, c_2). Como estamos frente a un problema de minimización, debemos encontrar aquella recta que corresponde al nivel de menor valor sin dejar de tocar el conjunto factible. Ahora bien, entre dos curvas de nivel, ¿cuál corresponde al menor nivel? Es claro que en nuestro caso, el valor de la función objetivo f decrece a medida que la curva de nivel se desplace en la dirección del vector $(-c_1, -c_2) = -(c_1, c_2)$. Por lo tanto, moviéndose siguiendo esa dirección, sin dejar de tocar el conjunto factible, se alcanzará el valor mínimo; o en caso contrario, el valor de f decrecerá indefinidamente, en tal caso el valor óptimo es $-\infty$. Si el problema es de maximización, el valor de la función objetivo crece en tanto la curva de nivel se desplace en la dirección del vector (c_1, c_2).

Del análisis anterior se concluye que, dada una región factible no vacía en el plano, $\mathbb{R}^2$, se puede determinar un vector $c = (c_1, c_2)$ tal que el problema de minimización asociado tenga como conjunto solución:

(a) un único elemento;
(b) un segmento de recta;
(c) un conjunto no acotado;
(d) el vacío, en tal caso el valor óptimo decrece indefinidamente.

A modo de ilustración, se considera el problema de minimización siguiente:

$$\begin{array}{lcccccc} \min & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 & - & x_2 & \geq & 0 & \\ & x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \\ & 2x_1 & - & 6x_2 & \leq & 3 & \\ & x_1 & \geq & 0, & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Denotamos por K su región factible.

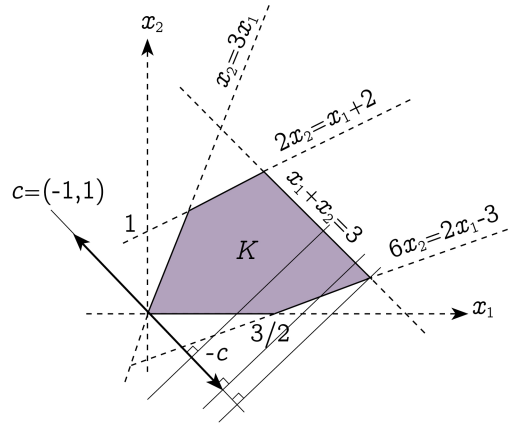


FIGURA 1.6. Solución única

(a) *Solución única*

Esta situación se presenta si, por ejemplo, elegimos como vector costo a $c = (-1, 1)$. En tal caso, la solución óptima es un vértice de la región factible, ver Figura 1.6.

(b) *Conjunto solución acotado*

Este caso corresponde cuando el vector costo c es perpendicular a alguno de los lados de la región factible K. La Figura 1.7 grafica la instancia $c = (-1, -1)$.

(c) *Conjunto solución no acotado*

En primer lugar, la región factible debe ser no acotada. Eliminamos la tercera restricción: $x_1 + x_2 \leq 3$. Aquí también el vector c debe ser perpendicular a una semirecta, la cual sería un lado del conjunto factible. La Figura 1.8 exhibe el caso $c = (1, -2)$.

(d) *Conjunto solución vacío*

Este caso se obtiene cuando al trasladar la recta $z = c_1x_1 + c_2x_2$ en la dirección $-c$, ésta siempre intersecta al conjunto factible. La Figura 1.9 muestra la instancia $c = (-5, -2)$.

No obstante la generalidad del método que se acaba de presentar, existen problemas cuya resolución se basa en técnicas ad hoc a la naturaleza del problema. Un par de tales situaciones se muestran a continuación.

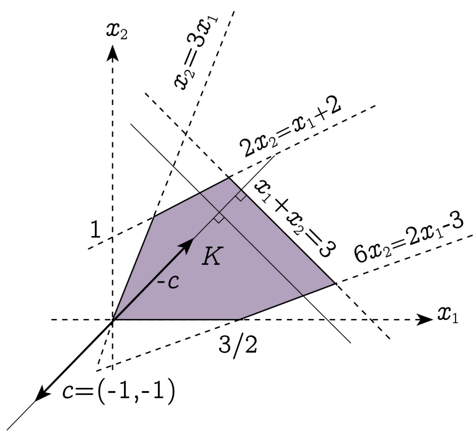


FIGURA 1.7. Conjunto solución acotado

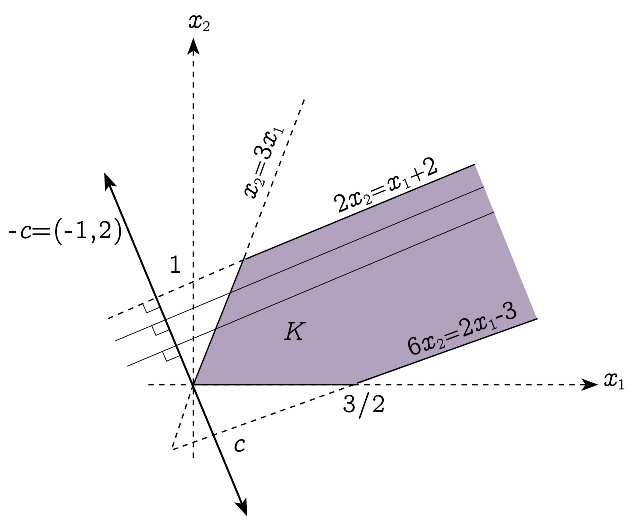


FIGURA 1.8. Conjunto solución no acotado

Ejemplo 1.4 (El problema de Herón)**.** Este problema ya fue enunciado en la introducción:
Dada una recta $\mathcal{L}$ en el plano y dos puntos A y B a un lado de ella, encontrar un punto C sobre la recta, de modo que la suma de las distancias de C a A y de C a B sea mínima.

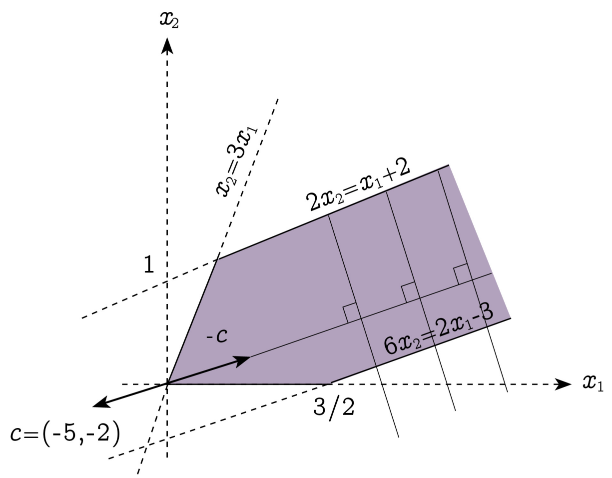


Figura 1.9. Conjunto solución vacío

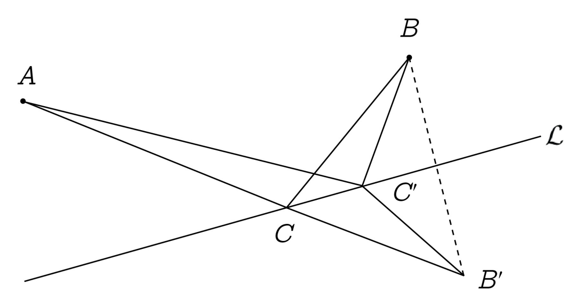


Figura 1.10. Solución: Problema de Herón

Aunque este problema no se puede formular como uno de optimización lineal, la solución se encuentra de la manera siguiente: se refleja perpendicularmente el punto B respecto de la recta $\mathcal{L}$, obteniéndose el punto B'. Luego, se unen los puntos A y B'; el punto C requerido es la intersección del segmento AB' y $\mathcal{L}$. Se va a demostrar ahora, efectivamente, que C minimiza la distancia total $|AC'| + |C'B|$ con $C' \in \mathcal{L}$, sea C' cualquier otro punto en $\mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$|AC| + |CB'| = |AC| + |CB|, \ |AC'| + |C'B'| = |AC'| + |C'B|.$$

Ahora consideramos el triángulo $AB'C'$; como la suma de las longitudes de cualquier par de lados de un triángulo es siempre menor que la longitud del tercero, se concluye que

$$|AC| + |CB| \leq |AC'| + |C'B|,$$

lo cual demuestra el resultado deseado.

El problema anterior también tiene una interpretación óptica: si sobre $\mathcal{L}$ se coloca un espejo, entonces, la solución encontrada nos permite concluir que el haz de luz que viaja de A a B, después de reflejarse en $\mathcal{L}$, lo hace recorriendo una trayectoria de longuitud mínima. Además, como consecuencia, se obtiene que el ángulo de incidencia del rayo de luz es igual al ángulo de reflexión del mismo.

Ejemplo 1.5. (Problema de bienestar)
No es difícil darse cuenta de la Figura 1.11, que la solución al problema de bienestar de la sección 1.2 es $(x_1, x_2) = (6, 4)$, es decir, Mercedes debe dedicar 6 horas al estudio y 4 horas (por día) al juego para maximizar su grado de bienestar.

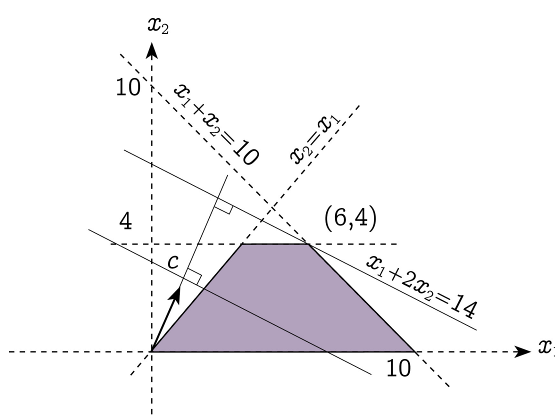


FIGURA 1.11. Solución Gráfica: Problema de distribución de tiempo

Ejemplo 1.6 (El problema de la mochila modificado)**.** Consideramos el problema de la mochila descrito en la Sección 1.2, pero sin la restricción de que las variables x_i sean enteras. Es decir:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & \\ \text{sujeto a :} & a_1x_1 & + & \cdots & + & a_nx_n & \leq \; b \\ & x_1 \geq 0, & \ldots & , & x_n \geq 0. & & \end{array}$$

El lector puede dar una interpretación a tal formulación. Veamos que este modelo puede resolverse usando argumentos simples.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{a_j} a_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} \left\{\frac{c_i}{a_i}\right\} a_j x_j = \max_{1\leq i\leq n} \left\{\frac{c_i}{a_i}\right\} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

$$\leq b \max_{1\leq i\leq n} \left\{\frac{c_i}{a_i}\right\} = c_{j_0} \frac{b}{a_{j_0}}. \tag{1.30}$$

Sea $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ con

$$\bar{x}_{j_0} = \frac{b}{a_{j_0}}, \ \bar{x}_j = 0 \text{ si } j \neq j_0,$$

donde j_0 satisface

$$\max_{1\leq i\leq n} \left\{\frac{c_i}{a_i}\right\} = \frac{c_{j_0}}{a_{j_0}}.$$

Luego, para todo x factible, (1.30) implica

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j,$$

es decir, $\bar{x}$ es solución óptima del problema de la mochila modificado.

Ejemplo 1.7. (Problema de inversión)
Observando la Figura 1.12, se concluye que la solución al problema de inversión de la sección 1.2 es $(p, a) = (375, 125)$, es decir, el banco debe destinar 375 millones de pesos para préstamos y 125 millones de pesos para acciones. Esto, con el objeto de maximizar su ganancia considerando un capital de 500 millones de pesos. La ganancia es 52,5 millones de pesos.

Advertencia

No cabe duda que formular matemáticamente el problema de Herón puede resultar engorroso y, más aún, intentar resolverlo a partir de dicha formulación. Sin embargo, tal como se vio en el Ejemplo 1.4, la solución se obtuvo sin mayores complicaciones sólo haciendo uso de conocimientos elementales de geometría plana.

En muchas otras situaciones el “sentido común” juega un rol muy importante en la determinación de una solución del problema. El sentido común tiene que ver con observar y aquí, el estudio de la psicología de las personas es igualmente fundamental. Veamos a continuación una situación de esta naturaleza, aunque ella puede que no sea catalogada como un problema de optimización estándar.

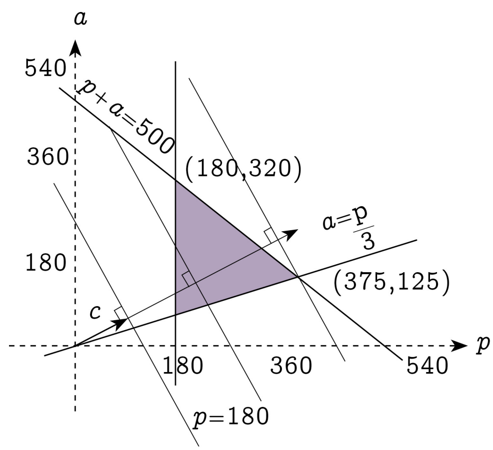


FIGURA 1.12. Solución Gráfica: Problema de la inversión

[T] Al recibir quejas sobre el lento servicio de un elevador en un edificio de oficinas públicas, se procedió a analizar el problema desde el punto de vista de *líneas de espera* (que, por extensión, puede ser considerado parte de la optimización) y que, por lo tanto, podría requerir un análisis matemático riguroso. Sin embargo, después de estudiar el comportamiento de las personas que se quejaban, el psicólogo del equipo de trabajo sugirió instalar espejos de cuerpo entero en la entrada de los elevadores. Como por arte de magia, las quejas desaparecieron - la razón fue que el espejo mantuvo ocupada a la gente observándose a sí misma y a los demás, mientras esperaban el elevador.

Lo anterior muestra que muchas veces no conviene ir directamente a la modelación matemática del problema para encontrar una solución o pensar que la matemática debe ser aplicada a como dé lugar. En el caso precedente, se obtuvo fácilmente una solución gracias a consideraciones ligadas al comportamiento humano más que al eventual modelo matemático.

Notas adicionales

Existe abundante literatura sobre modelos de optimización lineal, se puede citar a [**BJS, BChD, DT, F, KB, S, T**]. El método gráfico para resolver problemas con dos variables o con sólo dos restricciones es ya clásico y se puede encontrar en cualquier texto citado más arriba. Aún en la actualidad siguen apareciendo publicaciones sobre modelos lineales de problemas reales, por ejemplo, ver [**S**].

En [**T**] se pueden encontrar más situaciones donde el empleo de la rigurosidad matemática, a veces, no es necesaria.

El lector, usando el buscador google, encontrará muchas páginas dedicadas a la optimización lineal. Por ejemplo:

www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2003/programacion/
www.programacionlineal.net/

Una historia sobre los personajes que tuvieron influencia en el desarrollo de la Optimización Lineal se puede encontrar en el primer link de arriba.

1.7 Problemas

Algunos de los problemas siguientes fueron tomados del libro [**BJS**].

1. Establecer la correspondencia entre cada una de los siguientes términos y la descripción más adecuada para el mismo, en la lista que aparece a continuación, donde OL indica Optimización Lineal.

(a) Problema de OL	1. Las incógnitas de un modelo de OL que representan las decisiones a tomar.
(b) El negativo del vector costo	2. Concepto cuya incorporación en el modelo es pertinente.
(c) Costos fijos	3. La dirección a lo largo de la cual la función lineal decrece.
(d) Variables de decisión	4. Puede ser una restricción del tipo $\leq$ o $\geq$.
(e) Problema de OL cero-uno	5. Puede ser estándar o canónica.
(f) Formulacion en OL	6. Variables binarias.
(g) Restricción tecnológica	7. Tipo especial de modelo con restricciones de optimización.

2. Un industrial quiere fabricar una aleación cuya composición es 30 % de cobre, 30 % de zinc y 40 % de fierro. Él encuentra disponible en el mercado nueve clases de aleación cuyas composiciones y precios están dados en la tabla siguiente.

Aleación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cobre	10	10	40	60	30	30	30	50	20
Zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30
Fierro	80	60	10	10	40	30	50	10	50
Costo	4	5	6	6	8	8	7	6	7

Sabiendo que el costo en la operación de mezcla (aleación) es cero, el industrial se pregunta cuáles son las aleaciones que debe comprar y en qué cantidades para minimizar el costo de producción. Formule el problema lineal.

3. Un nutricionista asesora a un individuo que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B, y le indica que debe ingerir al menos 2400 mg de vitamina B-1 (tiamina) y 1500 mg de vitamina B-2 (riboflavina) durante cierto período de tiempo. Existen dos píldoras de vitaminas disponibles, llamadas píldora A y píldora B. Cada píldora A contiene 40 mg de hierro, 10 mg de vitamina B-1, 5 mg de vitamina B-2 y cuesta 60 pesos, y cada píldora B contiene 10 mg de hierro, 15 mg de vitamina B-1 y de vitamina B-2, y cuesta 80 pesos (ver tabla adjunta).

	Píldora A	Píldora B	Requerimientos mínimos
Hierro	40 mg	10 mg	2400 mg
Vitamina B-1	10 mg	15 mg	2100 mg
Vitamina B-2	5 mg	15 mg	1500 mg
Costo por píldora (pesos)	60	80	

Tabla 1.4

¿Cuáles combinaciones de píldoras debe comprar el paciente para cubrir sus requerimientos de hierro y vitamina al menor costo?

4. Jorge dispone de 1.000.000 de pesos para invertir en un cierto banco. El agente bancario le propone 2 tipos de depósitos A y B. Los del tipo A tienen más riesgo, por lo que otorga un interés anual del 10 %; mientras que los del tipo B, sólo dan un interés anual del 7 %. Jorge decide invertir a lo más 600,000 pesos en depósito tipo A y al menos 200,000 en los del tipo B, de manera que la cantidad invertida en depósito tipo A no sea menor que la invertida en los del tipo B. Su objetivo es obtener la mayor rentabilidad posible bajo las restricciones impuestas. Formule el problema como uno de optimización lineal y resuélvalo gráficamente.

5. Una fábrica posee 3 máquinas que se utilizan en la producción de 4 artículos diferentes A, B, C y D. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los productos está dada por la tabla siguiente.

Máq. \ Prod.	A	B	C	D
1°	5	4	2	3
2°	3	6	1	7
3°	9	3	5	12

Si por cada unidad producida hay una bonificación de 100, 200, 50 y 120, respectivamente. Se quiere encontrar el número de unidades semanales (5 días) que se debe producir de cada uno de los artículos, de modo de obtener la mayor bonificación posible, si cada máquina se usa 8 horas diarias y cada cual produce el mismo número de artículos de cada clase por semana. Con este propósito formular el problema matemáticamente.

6. Una fábrica de televisores debe decidir la cantidad a producir de televisores a color: estándar y pantalla-plana. Un estudio de mercado indica que a lo más 4200 y 1300 televisores estándar y con pantalla-plana, respectivamente, pueden venderse por mes. El número máximo de hombres/hora disponible es 50000 por mes. Para un televisor con pantalla-plana se requieren 20 hombres/hora, mientras que para un televisor estándar se necesita 15 hombres/hora. Las ganancias por cada televisor estándar y pantalla-plana son \$40 y \$70 (miles de pesos), respectivamente. Formular el problema que determine el número de televisores de cada tipo que la fábrica debe producir con el objeto de maximizar su ganancia.
7. Felipe tiene \$2200 (miles de pesos) que los desea invertir en los próximos 5 años. Al inicio de cada año, él puede invertir en depósitos de 1 ó 2 años. El banco paga el 8 % de interés por los de 1 año y 17 % por los de 2. Además, el banco mundial ofrece certificados por 3 años al inicio del segundo año. Estos certificados tienen un retorno del 27 %. Si Felipe reinvierte su dinero disponible cada año, formular el problema como uno de optimización lineal que muestre a Felipe cómo obtener su ganancia máxima al final del quinto año.
8. Supongamos que existen m fuentes que generan basura y n vertederos. La cantidad de basura generada en la fuente i es a_i y la capacidad del vertedero j es b_j. Se desea elegir el transporte apropiado de entre K sistemas de transporte. El transporte potencial k tiene un costo fijo f_k, capacidad q_k y costo unitario de proceso α_k, por tonelada de basura. Sea c_{ik} y $\bar{c}_{kj}$ los costos unitarios de transporte de la fuente i a k y de k al vertedero j, respectivamente. El problema es elegir el sistema de transporte más apropiado y la ruta, de modo que minimice el costo total de operación, capital y transporte. Formule el problema de distribución.

9. Formule el problema siguiente del tipo "Aproximación de Chebyshev":

$$\min \varepsilon$$
$$\text{s. a.} \quad \begin{array}{rrrrrl} | & 4x_1 & + & 3x_2 & - & 8| \le \varepsilon \\ | & x_1 & + & 5x_2 & - & 3| \le \varepsilon \\ | & -x_1 & + & 2x_2 & - & 7| \le \varepsilon \end{array}$$

como uno de optimización lineal en su forma canónica y estándar.

10. Encuentre algunos valores posibles de $c = (c_1, c_2) \in I\!R^2$, tales que el problema

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & \\ \text{sujeto a :} & -x_1 & + & 2x_2 & \le & 5 \\ & 7x_1 & + & x_2 & \le & 16 \\ & x_1 \ge & 0, & x_2 \ge 0, & & \end{array}$$

(a) tenga una única solución o un segmento como conjunto solución;
(b) tenga como conjunto solución un rayo después de eliminar una de las restricciones y, dentro de este contexto, ¿cuál de las restricciones eliminó?

Capítulo 2: Análisis Convexo y Discretización del Problema de Minimización

En este capítulo se introducen algunas nociones topológicas y algebraicas de conjuntos convexos. Se presenta la noción de cápsula convexa de un conjunto, la cual es útil para la descripción del problema de optimización lineal. Con la ayuda de un resultado de representación para poliedros, se estudia la estructura geométrica del conjunto solución del problema que nos interesa. En particular, se concluye que el problema de optimización lineal definido sobre una clase especial de poliedros, se reduce a evaluar la función objetivo en un número finito de puntos del poliedro. Finalmente, se establecen varias caracterizaciones algebraicas de la no vacuidad del conjunto solución.

2.1 Nociones Básicas en Topología General

En todo este capítulo trabajaremos en el espacio vectorial real de dimensión finita n denotado por $I\!R^n$, algunas veces se usa el término de espacio lineal real. Sus elementos serán llamados "*puntos*" o, a veces, "*vectores*", sin hacer ninguna distinción. Así, $x \in I\!R^n$ admite la representación

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in I\!R,\ i = 1, \ldots, n.$$

También cabe notar que cuando sea necesario los vectores de $I\!R^n$ serán considerados como "*vectores columnas*", mientras que $x^\top$ será un "*vector fila*" y denotará la transpuesta del vector x. Lo anterior, da origen al "*producto interno*" o "*producto escalar*" de dos vectores x e y:

$$\langle x, y\rangle \doteq x^\top y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle y, x\rangle\,. \tag{2.1}$$

Salvo que se diga lo contrario, "*la norma*" (euclidiana) de un vector $x \in I\!R^n$, denotada por $|x|$, satisface

$$|x| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,, \tag{2.2}$$

de donde $|x| = \sqrt{x^\top x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Considerando esta norma, se verifica la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|,\ \text{para cualquier } x \text{ e } y \in I\!R^n.$$

Dado $x_0 \in I\!R^n$ y $r > 0$, los conjuntos

$$B(x_0, r) \doteq \Big\{x \in I\!R^n : \ |x - x_0| < r\Big\}, \ \overline{B}(x_0, r) \doteq \Big\{x \in I\!R^n : \ |x - x_0| \leq r\Big\},$$

se llaman la "*bola abierta*" y "*bola cerrada*", respectivamente, de centro x_0 y radio r.

Sean A, B subconjuntos no vacíos de $I\!R^n$. Dados cualesquiera números reales α, β, se define el conjunto:

$$\alpha A + \beta B \doteq \Big\{ \ \alpha a + \beta b : \ a \in A, b \in B \ \Big\}.$$

En el caso que $A = \{x\}$, usaremos al notación $x + B \doteq \{x\} + B$. Luego, es fácil probar que $B(0, r) = rB(0, 1)$ y, por lo tanto,

$$B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1).$$

Dado $A \subseteq I\!R^n$, un conjunto no vacío, se dice que $x \in A$ es un "*punto interior*" de A, si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$, o equivalentemente, si $x + rB(0, 1) \subseteq A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el "*conjunto interior*" de A y se denota mediante "int A". Un conjunto A se llama "*abierto*", si cada elemento de A es un punto interior. No es difícil verificar que cada bola abierta es un conjunto abierto. Además $I\!R^n$ es un conjunto abierto. Por convención se admite que el conjunto vacío, $\emptyset$, es abierto.

Un conjunto A es "*cerrado*", si su complemento, denotado por $A^c \doteq \{x \in I\!R^n : \ x \notin A\}$ es abierto. Así, tanto $I\!R^n$ como $\emptyset$ son abiertos y cerrados a la vez. Se puede probar sin dificultad que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.
Usaremos la notación

$$A \setminus B \doteq A \cap B^c = \Big\{x \in I\!R^n : \ x \in A \text{ y } x \notin B\Big\}.$$

Un punto $x \in I\!R^n$ se dice que es de "*acumulación*" de $A \subseteq I\!R^n$, si

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0.$$

El conjunto de puntos de acumulación del conjunto A se denota por " A' "; mientras que x es "*punto de clausura*" o de "*adherencia*"de A, si

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0.$$

Se define la "*clausura*" de A, denotado por "$\overline{A}$ ", como el conjunto de todos los puntos de adherencia de A.

Ejercicio 2.1. Demostrar que la clausura de la bola abierta $B(x, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x, r)$, es decir,

$$\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r).$$

Se observa que int(A) (respectivamente $\overline{A}$) es el conjunto abierto más grande contenido en A (respectivamente, el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A).

La "*frontera*" de un conjunto $A \subseteq I\!R^n$, la que se denota por $\text{fr}(A)$, se define mediante

$$\text{fr}(A) \doteq \overline{A} \cap \overline{A^c},$$

es decir, $x \in \text{fr}(A)$, si para todo $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$ contiene puntos de A y de su complemento. En consecuencia,

$$\text{fr}(A) = \text{fr}(A^c).$$

Se dice que un conjunto A de $I\!R^n$ es: "*acotado*", si existe $r > 0$, tal que $|x| \leq r$, para todo $x \in A$, es decir, $A \subseteq B(0, r)$; "*compacto*", si es cerrado y acotado. Una caracterización que es muy útil en la práctica es la siguiente:

Teorema 2.1. *A es compacto, si y sólo si cada sucesión acotada de A admite una subsucesión convergente a un elemento de A.*

El teorema siguiente entrega condiciones suficientes para que una función alcance su mínimo y su máximo.

Teorema 2.2. Teorema de Weiertrass.
Sea $K \subseteq I\!R^n$ un conjunto compacto y $f : K \to I\!R$ una función continua. Entonces, existen $x_0, x^0 \in K$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x^0), \text{ para todo } x \in K.$$

Demostración. Como f es continua y K es compacto, se tiene que $f(K)$ también es un subconjunto compacto de $I\!R$, es decir, $f(K)$ es cerrado y acotado. Que sea acotado implica que tiene supremo e ínfimo y, por ser cerrado, éstos pertenecen a $f(K)$. Luego, existen $x_0, x^0 \in K$, tal que

$$\min f(K) = f(x_0) \leq f(x) \leq \max f(K) = f(x^0), \text{ para todo } x \in K. \qquad \square$$

2.2 Álgebra de Conjuntos Convexos

En esta sección se presentarán, inicialmente, algunos conceptos básicos del Algebra Lineal ligados, principalmente, a subespacios afines y más concretamente a conjuntos convexos.
Las definiciones siguientes son básicas en el Análisis Convexo.

Definición 2.3. Sea K un subconjunto no vacío de $I\!R^n$. Se dice que K es un

(*i*) "*subespacio vectorial*" o simplemente un *subespacio* de $I\!R^n$, si $\alpha K + \beta K \subseteq K$, para todo α, β en $I\!R$.

(*ii*) "*subespacio afín*" o "*variedad lineal*", si $K = x_0 + L$, para algún $x_0 \in I\!R^n$ y algún subespacio L de $I\!R^n$. En particular, todo subespacio es subespacio afín.

(*iii*) "*conjunto convexo*", si

$$\lambda K + (1 - \lambda)K \subseteq K, \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

(iv) "*cono*", si $\lambda K \subseteq K$, para todo $\lambda \geq 0$ (algunos autores excluyen $\lambda = 0$ en la definición de cono).

(v) "*cono convexo*", si es un cono y además un conjunto convexo.

Observación 2.1. La representación $K = x_0 + L$ de un subespacio afín K no es única. Más precisamente, probaremos que $K = x + L$, para todo $x \in K$. En efecto, $K = x_0 + L = x + (x_0 - x) + L = x + L$.

Ejemplo 2.1.

1. Los subespacios afines de $I\!R^3$ son: el mismo $I\!R^3$, todos los planos, todas las rectas y todos los conjuntos de un sólo elemento.
2. Evidentemente, cualquier subespacio afín es un conjunto convexo; las bolas cerradas y abiertas son conjuntos de este tipo. Por otro lado, todo subespacio vectorial es un subespacio afín.
3. El complemento de bola abierta unitaria en el plano, es decir, el conjunto $A \doteq \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ no es convexo. En efecto, los puntos $(0, -1), \ (0, 1)$ están en A, pero $\frac{1}{2}(0, -1) + \frac{1}{2}(0, 1) = (0, 0) \notin A$.
   Más generalmente, el complemento de cualquier bola abierta (o cerrada) no es convexo.
4. El conjunto
$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : \ x_1 + 2x_2 = 1, \ x_1 - x_3 = 2\},$$
   que es la intersección de dos planos en $I\!R^3$, es convexo. Dicha intersección es una recta. En efecto, no es difícil darse cuenta que
$$M = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}, -2\right) + x_1 \left(0, \frac{1}{2}, -2\right) : \ x_1 \in I\!R \right\},$$
   el cual, efectivamente, corresponde a una recta en $I\!R^3$. En general, sea A una matriz de orden $m \times n$, B una matriz de orden $p \times n$, con elementos reales no todos nulos. Entonces, el conjunto
$$\{x \in I\!R^n : \ Ax = b_1, \ Bx \leq b_2\} \ (b_1 \in I\!R^m, \ b_2 \in I\!R^p)$$
   es convexo. Además, el conjunto
$$\ker(A) \doteq \left\{x \in I\!R^n : \ Ax = 0\right\},$$
   denominado el "*núcleo*" de A, es un subespacio vectorial. Si $n = 2$, éste representa la intersección de m rectas (en el plano) que pasan por el origen. En cambio, el conjunto
$$\{x \in I\!R^n : \ Ax = b\} \ , \ (b \in I\!R^m, \ b \neq 0)$$
   es un subespacio afín, ver Proposición 1.2. Finalmente, el conjunto
$$\{x \in I\!R^n : \ Ax = 0, \ Bx \leq 0\}$$
   es un cono convexo.

5. El conjunto
$$N \doteq \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \; x_1 = 2, \; |x_2| \leq 5\}$$
es convexo. Para ver esto, basta chequear directamente la definición, o también resulta del hecho que
$$N = \{t(2, -5) + (1 - t)(2, 5) : \; 0 \leq t \leq 1\}.$$
6. Veamos que el conjunto
$$P \doteq \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : \; x_3 = |x_2|, \; x_1 \leq 4\}$$
no es convexo. Simplemente considerar $(-1, 1, 1), (1, -1, 1)$ que están en P, pero
$$\frac{1}{2}(-1, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1, 1) = (0, 0, 1) \notin P.$$

Ejercicio 2.2. Dar ejemplo de un conjunto convexo tal que su complemento también lo sea, ¿es posible encontrar una caracterización de tales conjuntos?

Teorema 2.4. *Sea K_i, $i \in I$, cualquier familia (finita o no) de subespacios afines. Entonces,*
$$K \doteq \bigcap_{i \in I} K_i$$
es un subespacio afín siempre que $K \neq \emptyset$.

Demostración. Sea x_0 un elemento en esta intersección. Por la Observación 2.1, podemos escribir $K_i = x_0 + L_i$, siendo L_i un subespacio vectorial para cada $i \in I$. Se conjetura que
$$K = x_0 + \bigcap_{i \in I} L_i, \tag{2.3}$$
lo cual probaría que K es, en efecto, un subespacio afín, pues la intersección de subespacios vectoriales es también un subespacio vectorial. Sea $x \in K$, luego $x \in K_i = x_0 + L_i$, para todo $i \in I$; es decir, $x - x_0 \in L_i$, para todo $i \in I$. Así, $x - x_0 \in \bigcap_{i \in I} L_i$, o equivalentemente, $x \in x_0 + \bigcap_{i \in I} L_i$, esto prueba una inclusión. Recíprocamente, sea $x \in x_0 + \bigcap_{i \in I} L_i$, luego $x \in x_0 + L_i = K_i$, para todo $i \in I$, es decir, $x \in \bigcap_{i \in I} K_i = K$, lo cual prueba la otra inclusión, y, por tanto, se completa la demostración de (2.3). □

Ejercicio 2.3. Probar el análogo del Teorema 2.4 para conos y para conjuntos convexos.

La noción que aparece en definición siguiente es útil en la representación de ciertas clases de conjuntos convexos.

Definición 2.5. Sea $C \subseteq I\!R^n$ un conjunto no vacío. La "*cápsula convexa de C*", denotada por $\mathrm{co}(C)$, se define como el menor conjunto convexo de $I\!R^n$ que contiene a C.

En la Figura 2.1, se ilustra la cápsula convexa de $A = \{(0,1)\} \cup \{(x_1, 0) :\ x_1 \in I\!R\}$ la cual es $\mathrm{co}(A) = \{(0,1)\} \cup \{(x_1, x_2) :\ x_1 \in I\!R,\ 0 \leq x_2 < 1\}$.

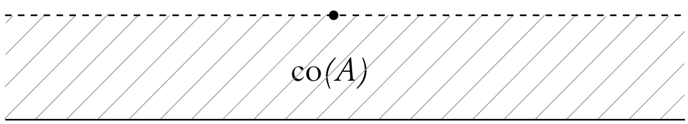


FIGURA 2.1. Conjunto A y su cápsula convexa $\mathrm{co}(A)$

Observación 2.2. Respecto de la definición 2.5, $\mathrm{co}(C)$ significa lo siguiente:

- $\mathrm{co}(C)$ es un conjunto convexo tal que $C \subseteq \mathrm{co}(C)$;
- si D es convexo con $C \subseteq D$, entonces, $\mathrm{co}(C) \subseteq D$.

Luego:

$$\mathrm{co}(C) = \bigcap_{D \in \mathcal{L}_C} D,$$

donde $\mathcal{L}_C$ es la familia de todos los conjuntos convexos que contienen a C, tal familia es no vacía puesto que $I\!R^n$ pertenece a ella.

Dados $x, y \in I\!R^n$, denotamos por

$$[x, y] \doteq \Big\{ z \in I\!R^n :\ z = \lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda \in [0,1] \Big\},$$

al "*segmento cerrado*" de extremos x e y, también se dice que es una "*combinación convexa*" de x e y. Si $x \neq y$, entonces,

$$]x, y[\doteq \Big\{ z \in I\!R^n :\ z = \lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda \in]0,1[\Big\},$$

se llamará el "*segmento abierto*" que une x con y, también se conoce como una "*combinación convexa estricta*" de x e y. Notaciones similares son usadas para $[x, y[$ e $]x, y]$. Luego tenemos, $D \subseteq I\!R^n$ es conjunto convexo, si y sólo si $[x, y] \subseteq D$, para todo $x, y \in D$.

La noción de cápsula, cierre o envoltura definida anteriormente, juega un rol importante en la construcción de algoritmos, es por ello que necesitamos caracterizaciones de ellas que sean manejables.

Teorema 2.6. *Sea $\emptyset \neq K \subseteq I\!R^n$, entonces,*

$$\mathrm{co}(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i :\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ m \in I\!N,\ x_i \in K \Big\}.$$

Ejercicio 2.4. Demostrar el Teorema 2.6 a través de los pasos siguientes (denotamos por $\mathcal{C}c(K)$ el conjunto del lado derecho de la igualdad precedente):

(*a*) $\mathcal{C}c(K)$ es un conjunto convexo que contiene a K;
(*b*) $\mathrm{co}(K) \subseteq \mathcal{C}c(K)$;
(*c*) $\mathcal{C}c(K) \subseteq \mathcal{C}c(\mathrm{co}(K)) = \mathrm{co}(K)$.

2.3 Hiperplanos y Semiespacios

En optimización lineal, y más generalmente en teoría de optimización, los hiperplanos y semiespacios, que son ejemplos de conjuntos convexos, juegan un papel muy importante en la descripción analítica de la metodología expuesta en el próximo capítulo.

Definición 2.7. Un "*hiperplano*" H en $I\!R^n$ es un conjunto de la forma

$$\{x \in I\!R^n : \ p^\top x = \alpha\}$$

para algún $p \in I\!R^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in I\!R$. Usualmente, p recibe el nombre de normal o el gradiente al hiperplano H.

Geométricamente, un hiperplano en $I\!R^n$ generaliza la noción de recta en $I\!R^2$ o de un plano en $I\!R^3$. Observamos que si $x_0 \in H$, entonces,

$$H = \{x \in I\!R^n : \ p^\top (x - x_0) = 0\},$$

de donde se concluye que p es ortogonal a $x - x_0$, para todo $x \in H$.

Definición 2.8. Un "*semiespacio*" es un conjunto de la forma

$$H_+ \doteq \{x \in I\!R^n : \ p^\top x \geq \alpha\}$$

con $p \neq 0$ y $\alpha \in I\!R$. Así, $H_- \doteq \{x \in I\!R^n : \ p^\top x \leq \alpha\}$ también es un semiespacio.

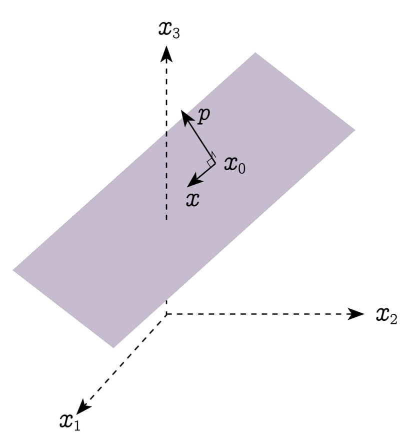


FIGURA 2.2. Hiperplano

Por lo tanto, dado un hiperplano $H = \{x \in I\!R^n : \ p^\top x = \alpha\}$, éste divide a $I\!R^n$ es dos semiespacios H_+ y H_-. Evidentemente, $I\!R^n = H_+ \cup H_-$.

Como antes, si $x_0 \in H$, entonces, $H_+ = \{x \in I\!R^n : \ p^\top (x - x_0) \geq 0\}$, $H_- = \{x \in I\!R^n : \ p^\top (x - x_0) \leq 0\}$. De aquí se hace evidente su interpretación geométrica.

Ejemplo 2.2. El conjunto factible de cualquier problema de Optimización lineal formulado en el Capítulo 1, es de la forma

$$K = \Big\{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b\Big\},$$

para alguna matriz A de orden $m \times n$ y $b \in I\!R^m$. Si $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ y a^i respresenta la fila i-ésima de A, entonces,

$$K = \Big\{x \in I\!R^n : \ a^i x \geq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m\Big\} = \bigcap_{i=1}^{m} \Big\{x \in I\!R^m : \ a^i x \geq b_i\Big\}.$$

En otras palabras, K es la intersección de los m semiespacios

$$\Big\{x \in I\!R^m : \ a^i x \geq b_i\Big\}.$$

Definición 2.9. Un *"rayo"* $\mathcal{R}$ es un conjunto de la forma

$$\{x \in I\!R^n : \ x = x_0 + tv, \ t \geq 0\},$$

donde $x_0, \ v \in I\!R^n$, $v \neq 0$. Aquí, x_0 recibe el nombre de "*vértice*" del rayo $\mathcal{R}$ y v su dirección.

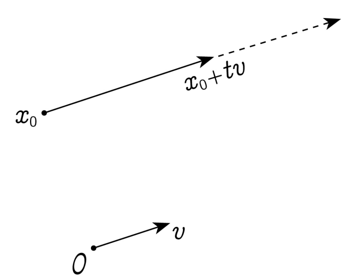


FIGURA 2.3. Rayo con vértice x_0 y dirección v

Direcciones de un conjunto convexo y cerrado

Dado un conjunto convexo y cerrado $\emptyset \neq K \subseteq I\!R^n$. Se dice que v es una "*dirección*" (de recesión) del conjunto K, si $x_0 + tv \in K$, para todo $t > 0$ y para todo $x_0 \in K$. Denotamos al conjunto de las direcciones de recesión de K por K^∞ y llamaremos "*cono de recesión*" de K. Es decir,

$$K^\infty \doteq \{v \in I\!R^n : \ x_0 + tv \in K, \ \text{para todo } t > 0, \ \text{y todo } x_0 \in K\}.$$

En otras palabras, v es una dirección de K, si cada rayo con vértice en K y dirección v está contenido en K. Por lo tanto, se deduce immediatamente el resultado siguiente:

Lema 2.10. *Sea K cualquier conjunto no vacío en $I\!R^n$. Entonces,*

$$K \text{ acotado } \implies K^\infty = \{0\}.$$

El recíproco del lema anterior ¡también es cierto!.
Nótese que $0 \in K^\infty$ y que K^∞ es un cono cerrado.

La importancia del conjunto K^∞ radica en el hecho que nos sirve para encontrar una descomposición del conjunto original K, la cual es muy útil para el estudio del problema de minimización (ver Sección 2.5). Antes de continuar, veamos que en la definición de K^∞, es suficiente verificar la pertenencia para un sólo vector x_0 en K.

Observación 2.3. Sea K un convexo cerrado. Veamos que si $x_0, y_0 \in K$, entonces,

$$\{v \in I\!R^n : \ x_0 + tv \in K, \text{ para todo } t > 0\} = \{v \in I\!R^n : \ y_0 + tv \in K, \text{ para todo } t > 0\}.$$

Si v pertenece al conjunto del lado izquierdo, entonces, $x_0 + ktv \in K$, para todo $k \in I\!N$ y todo $t > 0$. Por la convexidad de K, $(1 - \frac{1}{k})y_0 + \frac{1}{k}(x_0 + ktv) \in K$, para todo $k \in I\!N$. Haciendo $k \to +\infty$, se obtiene $y_0 + tv \in \overline{K} = K$. Por simetría se obtiene la otra inclusión.

Ejemplo 2.3. (ver Figura 2.4) Sea $K = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_2 \geq x_1^2\}$. Entonces,

$$K^\infty = \{(0, x_2) \in I\!R^2 : \ x_2 \geq 0\}.$$

Se observa que K puede escribirse como

$$K = A + K^\infty,$$

donde $A = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_2 = x_1^2\}$.

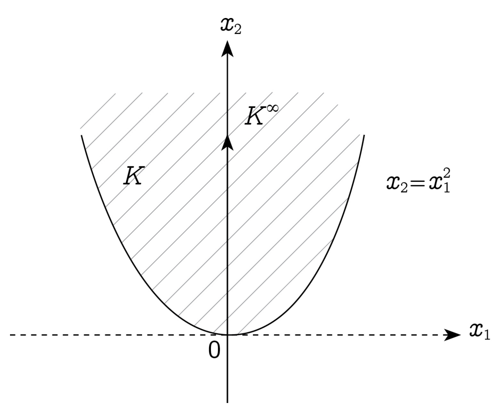


FIGURA 2.4. Ejemplo 2.3: K y K^∞

Ejemplo 2.4. Sean A una matriz de coeficientes reales de orden $m \times n$, $b \in I\!R^m$ y

$$K_1 = \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}, \ K_2 = \{x \in I\!R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}.$$

Luego,

$$K_1^\infty = \{v \in I\!R^n : \ Av \geq 0, \ v \geq 0\}, \ K_2^\infty = \{v \in I\!R^n : \ Av = 0, \ v \geq 0\}.$$

En efecto, veamos sólo el caso K_1. Si $\bar{x} \in K_1$, entonces,

$$v \in K_1^\infty \Longleftrightarrow A(\bar{x} + tv) \geq b \text{ y } \bar{x} + tv \geq 0, \ \text{para todo } t > 0.$$

Si i es tal que $v_i < 0$, entonces, eligiendo $t > \frac{\bar{x}_i}{-v_i} \geq 0$ se tiene que $\bar{x}_i + tv_i < 0$; lo cual contradice el hecho que $\bar{x} + tv \geq 0$, para todo $t > 0$. Por lo tanto, $v \geq 0$. De modo similar se prueba que,

$$A\bar{x} - b + tAv = A(\bar{x} + tv) - b \geq 0, \ \text{para todo } t > 0 \Longleftrightarrow Av \geq 0,$$

de donde se obtiene lo deseado.

Ejemplo 2.5. No es difícil comprobar que (ver también Proposición 1.2)

$$K_0 \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax = b\} = x_0 + \ker(A),$$

donde x_0 es cualquier elemento de K_0. En este caso, se tiene $K_0^\infty = \ker(A)$ y así, $K_0 = x_0 + K^\infty$.

Representaciones de este tipo para los conjuntos considerados en el Ejemplo 2.4 se estudiarán en la Sección 2.5.

Direcciones extremas de un conjunto convexo

Se dice que dos direcciones v_1 y v_2 son "*distintas*", si $v_1 \neq \lambda v_2$, para todo $\lambda > 0$. Una "*dirección extrema*" de un conjunto convexo es una dirección (de recesión) no nula que no se puede representar como una combinación positiva de dos direcciones distintas (o no equivalentes) del conjunto.

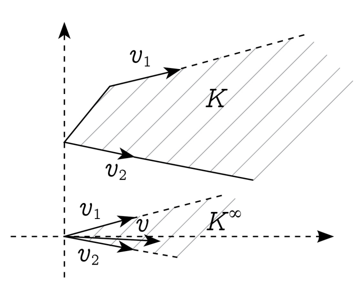


FIGURA 2.5. Direcciones extremas: v_1 y v_2

Funciones convexas y cóncavas

Dado un conjunto convexo $K \subseteq I\!R^n$, se dice que una función $f : K \to I\!R$ es "*convexa*" si, dados $x_1, x_2 \in K$, se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \text{ para todo } \lambda \in \,]0,1[\,.$$

Se dice que $f : K \to I\!R$ es "*cóncava*", si $-f$ es una función convexa, es decir, si se tiene

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \text{ para todo } \lambda \in \,]0,1[\,.$$

Geométricamente, para una función convexa se tiene la interpretación siguiente: "dados cualquier par de puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, la altura de la cuerda que los une en el punto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ es mayor o igual que la altura de la función en el mismo punto".

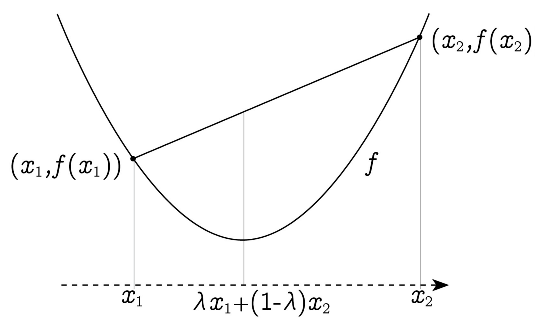


FIGURA 2.6. Función convexa

Ejemplo 2.6. Consideremos el problema lineal siguiente

$$(P) \qquad \min_{x \in K} c^\top x,$$

donde $K = \{x \in I\!R^n : \; Ax \geq b, \; x \geq 0\}$. Vamos a demostrar que el conjunto solución, es decir, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{\overline{x} \in K : \; c^\top \overline{x} = \min_{x \in K} c^\top x\},$$

es un conjunto convexo y cerrado. En efecto, supongamos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, y sean $\overline{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2$, probaremos que $\overline{x}_\lambda \doteq \lambda \overline{x}_1 + (1-\lambda)\overline{x}_2 \in \mathcal{S}$, para todo $\lambda \in \,]0,1[$. En primer lugar, observamos que $\overline{x}_\lambda \in K$, para todo $\lambda \in \,]0,1[$, debido a que K es un conjunto convexo. Obviamente $c^\top \overline{x}_1 = c^\top \overline{x}_2$. Luego,

$$c^\top \overline{x}_\lambda = \lambda c^\top \overline{x}_1 + (1-\lambda)c^\top \overline{x}_2 = c^\top \overline{x}_1 \leq c^\top x, \text{ para todo } x \in K.$$

Esto quiere decir, $\overline{x}_\lambda \in \mathcal{S}$, para todo $\lambda \in \,]0,1[$.
Veamos ahora que $\mathcal{S}$ es cerrado. En efecto, sea $\overline{x}_k \in \mathcal{S}$, $k \in I\!N$, tal que $\overline{x}_k \to \overline{x}$ y

$c^\top \overline{x}_k = \min\limits_{x\in K} c^\top x$. Luego, debido a la continuidad de la función lineal $h(x) = c^\top x$, se obtiene

$$\min_{x\in K} c^\top x = \lim_{k\to+\infty} c^\top \overline{x}_k = c^\top (\lim_{k\to+\infty} \overline{x}_k) = c^\top \overline{x},$$

de donde se concluye que $\overline{x} \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 2.5. Abstrayendo la demostración dada en el ejemplo anterior, demostrar la convexidad del conjunto solución del problema

$$\min_{x\in K} f(x),$$

bajo las condiciones que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sea un conjunto convexo y la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sea convexa.

Ejemplo 2.7. Sea $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0 \ \}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $Ax_0 > b$ y $x_0 > 0$. Probar que x_0 no puede ser solución óptima del problema

$$\min_{x\in K} \ c^\top x,$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$. Como el conjunto $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax > b, \ x > 0 \ \}$ es abierto (ejercicio para el lector!!) y $x_0 \in K_0$, existe $\delta > 0$, tal que $x_0 - \delta c \in K_0 \subseteq K$. Luego,

$$c^\top (x_0 - \delta c) = c^\top x_0 - \delta |c|^2 < c^\top x_0,$$

es decir, se ha encontrado un punto factible donde la función objetivo asume un valor estrictamente menor que aquél en x_0.

Ejercicio 2.6. Respecto del resultado del Ejemplo 2.7, demostrar el resultado siguiente: si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $x_0 \in U$, entonces, x_0 no es solución del problema

$$\min_{x\in U} \ c^\top x.$$

2.4 Puntos Extremales y Conjuntos Poliédricos

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo.

Definición 2.11. Sea $z \in K$, se dice que z es un *"punto extremal"* de K, si se cumple lo siguiente:

$$x, y \in K, \ \ z \in \,]x, y[\Longrightarrow x = y.$$

Es decir, si z no es combinación convexa estricta de dos elementos distintos de K.

Ejemplo 2.8. Dados $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, veamos que la recta

$$\mathcal{L} = \{\bar{x} + tv : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

no tiene puntos extremales. Notar que

$$\mathcal{L}^\infty = \{tv : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $z \in \mathcal{L}$, como $z = \frac{1}{2}(z + v) + \frac{1}{2}(z - v)$ y $z + v \in \mathcal{L}$, $z - v \in \mathcal{L}$, se concluye que z no puede ser punto extremal de $\mathcal{L}$, ¿cuál sería su conclusión si, en vez de $\mathcal{L}$, se considera el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ p^\top x = \alpha\}$?

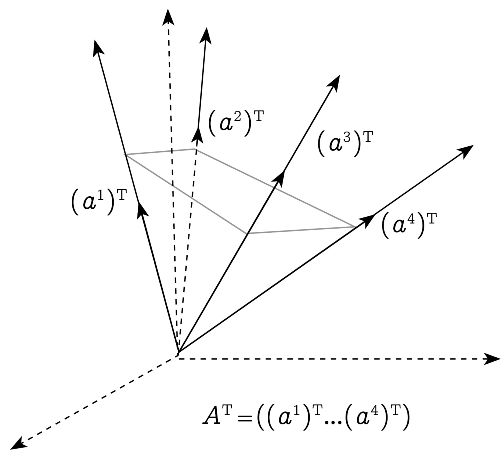


FIGURA 2.7. Cono poliédrico

El conjunto admisible o región factible del problema de minimización que se estudia a lo largo de toda la monografía, pertenece a la clase de conjuntos poliédricos. De ahí la importancia de la definición siguiente.

Definición 2.12. Se dice que $K \subseteq I\!R^n$ es

(i) un "*conjunto poliédrico*" o simplemente un "*poliedro*", si existen una matriz de orden $m \times n$ y un vector $b \in I\!R^m$ tales que

$$K = \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b\},$$

es decir, si K es la intersección de un número finito de semiespacios;

(ii) un "*cono poliédrico*", si es un cono y además un poliedro.

Notar que el conjunto $\{x \in I\!R^n : \ Ax \leq b\}$ también es un poliedro, e igualmente el conjunto $\{x \in I\!R^n : \ Ax = b\}$. La representación de un poliedro no es única.

Se tiene el lema siguiente:

Lema 2.13. *$K \subseteq I\!R^n$ es un cono poliédrico, si y sólo si existe una matriz de orden $m \times n$, tal que $K = \{x \in I\!R^n : Ax \geq 0\}$.*

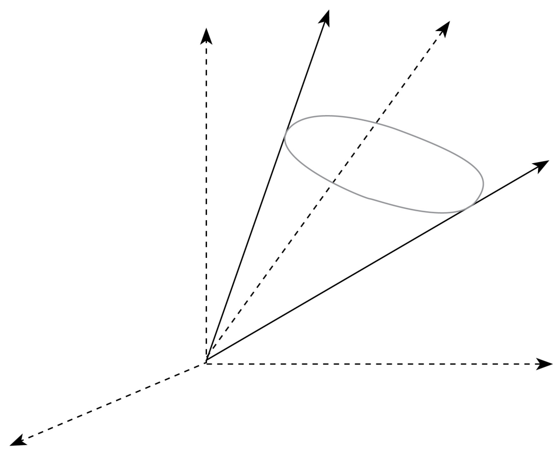


FIGURA 2.8. Cono convexo no poliédrico

Demostración. Una implicación es obviamente cierta, pues resulta directamente de la definición. Veamos la condición necesaria. Si K es poliedro, entonces, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b\}$. Ahora, por ser cono, $0 \in K$, lo que implica $b \leq 0$. También, $x_0 \in K$ implica $tx_0 \in K$, para todo $t > 0$. Esto es, $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$. Pero $b \leq 0$, de donde se concluye que

$$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\} \subseteq K,$$

obteniéndose el resultado deseado. □

Ejemplo 2.9. Sea K un cono poliédrico. Entonces, K no puede tener más de un punto extremal, ¿cuál sería?
Solución. Sea $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$, cualquier elemento de K. Como $0 \in K$ y $0 \neq 2x_0 \in K$, la igualdad

$$x_0 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2x_0)$$

implica que x_0 no puede ser punto extremal de K. Por lo tanto, la única opción para que $x_0 \in K$ sea extremal, éste debe ser el origen. El mismo razonamiento también demuestra que K no puede tener más de un punto extremal.

Ejemplo 2.10. Consideramos el poliedro

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \leq 1\},$$

y veamos que no tiene puntos extremales.
Sea $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K$ cualquiera. Como $(\overline{x}_1 + 1, \overline{x}_2 - 1) \in K$, $(\overline{x}_1 - 1, \overline{x}_2 + 1) \in K$, y

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \frac{1}{2}(\overline{x}_1 + 1, \overline{x}_2 - 1) + \frac{1}{2}(\overline{x}_1 - 1, \overline{x}_2 + 1),$$

se concluye que ningún punto de K puede ser extremal, ver Figura 2.9.

Ejemplo 2.11. Veamos que el poliedro

$$K=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3:\ x_1-x_2+x_3\leq 2,\ -x_3+3x_2\leq 6,\ x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0\Big\}$$

no tiene direcciones no nulas. En efecto, por el Ejemplo 2.4, se obtiene

$$K^\infty=\Big\{(d_1,d_2,d_3)\in I\!R^3:\ d_1-d_2+d_3\leq 0,\ -d_3+3d_2\leq 0,\ d_1,\ d_2,\ d_3\geq 0\Big\}.$$

De donde, $3d_2\leq d_3$ y así, $d_1+2d_2\leq 0$. Por lo tanto, $d_1=d_2=0$ y, en consecuencia, $d_3=0$, lo que demuestra que $K^\infty=\{0\}$, es decir, K es acotado.

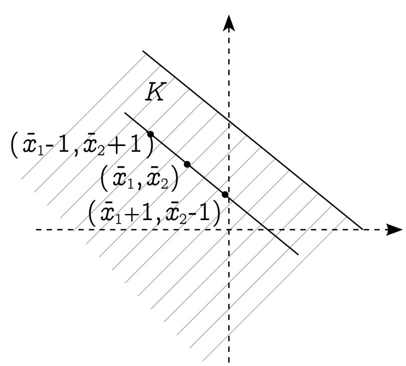


FIGURA 2.9. Ejemplo 2.10

Ejercicio 2.7. Sea el poliedro K determinado por las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &= 3\\ x_1-3x_2+x_3 &\leq 6\\ x_3 &\geq 1\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Demostrar que $K^\infty=\Big\{(d_1,d_2,d_3)\in I\!R^3_+:\ d_1=d_2,\ d_1-3d_2+d_3\leq 0\Big\}$;
2. Encontrar gráficamente todas la direcciones extremales.

Proposición 2.14. *Sea A una matriz de orden $m\times n$ y $b\in I\!R^m$. Supongamos que*

$$K=\{x\in I\!R^n:\ Ax=b\}\neq\emptyset.$$

Entonces,

(a) $\ker(A)=\{0\}$, *si y sólo si K es un conjunto con un solo elemento*;
(b) $\ker(A)\neq\{0\}$, *si y sólo si K no tiene puntos extremales.*

Demostración. Por la Proposición 1.2, $K = x_0 + \ker(A)$, para todo $x_0 \in K$. Luego, (a): $\ker(A) = \{0\}$, si y sólo si $K = \{x_0\}$.
(b): Sea $v \in \ker(A)$, $v \neq 0$. Ahora bien, cualquier x en K se puede escribir de la forma

$$x = \frac{1}{2}(x+v) + \frac{1}{2}(x-v).$$

Como $x \pm v \in K$, x no puede ser punto extremal de K. Esto prueba una implicación. La otra es immediata. $\square$

Ejercicio 2.8. ¿Existen conos convexos cerrados no poliédricos en $\mathbb{R}^2$?

2.5 Representación de Conjuntos Poliédricos y Discretización del Problema de Minimización

No es muy difícil aceptar que cualquier conjunto convexo cerrado $K \subseteq \mathbb{R}^n$ admite la representación

$$K = C + K^\infty, \tag{2.4}$$

donde C es un conjunto convexo y compacto. Una subclase de conjuntos convexos y cerrados es aquella cuando

$$C = \mathrm{co}(\mathrm{extr}(K)), \tag{2.5}$$

es decir, cuando C es la cápsula convexa de los puntos extremales de K. Para una demostración de este resultado ver [**HL, R**]. Los poliedros que satisfacen ésta última representación serán considerados en el Teorema 2.16 de más adelante.
El conjunto K del Ejemplo 2.10 admite la representación (2.4), puesto que (ver Ejemplo 2.4 para el cálculo de K^∞)

$$K = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} + K^\infty,\ K^\infty = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 :\ v_1 + v_2 \leq 0\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \in K &\Longleftrightarrow x_1 + x_2 \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2} + x_2 \leq 0\\ &\Longleftrightarrow v_1 + v_2 \leq 0,\ v_1 = -\frac{1}{2} + x_1,\ v_2 = -\frac{1}{2} + x_2\\ &\Longleftrightarrow v_1 + v_2 \leq 0,\ (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + (v_1, v_2).\end{aligned}$$

Sin embargo, el mismo conjunto K no puede representarse considerando (2.5), ya que $\mathrm{extr}(K) = \emptyset$.

Veamos una consecuencia importante de la representación (2.4).

Teorema 2.15. *Sea el problema de minimización*

$$(P_{lg}) \qquad \min_{x\in K}\ c^\top x,$$

donde $c \in I\!R^n, c \neq 0$, *y* $K \neq \emptyset$ *es un conjunto convexo cerrado que admite una representación (2.4). Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- (a) $\min(P_{lg}) > -\infty$
- (b) $c^\top d \geq 0$, *para todo* $d \in K^\infty$;
- (c) $d \in K^\infty$, $c^\top d \leq 0 \Longrightarrow c^\top d = 0$;
- (d) *el problema* (P_{lg}) *tiene solución óptima y*

$$\min(P_{lg}) = \min_{x\in C} c^\top x \in I\!R.$$

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Sea $x_0 \in K$. Si existiera $d \in K^\infty$, tal que $c^\top d < 0$, entonces, $x_0 + \lambda d \in K$, para todo $\lambda > 0$ y además se tendría

$$\min(P_{lg}) \leq c^\top x_0 + \lambda c^\top d,\ \forall\ \lambda > 0.$$

De donde $\min(P_{lg}) = -\infty$, lo que no puede suceder.
$(b) \Longleftrightarrow (c)$: Es directa.
$(b) \Longrightarrow (d)$: Como $0 \in K^\infty$, (2.4) implica $C \subseteq K$. Así,

$$\min_{x\in K} c^\top x \leq \min_{x\in C} c^\top x. \tag{2.6}$$

Por otro lado, cualquier $x \in K$ se puede escribir como $x = y + d$ con $y \in C$ y $d \in K^\infty$. Luego,

$$c^\top x = c^\top y + c^\top d \geq c^\top y \geq \min_{y'\in C} c^\top y'.$$

Lo anterior es válido para cualquier $x \in K$. Esto implica

$$\min_{x\in K} c^\top x \geq \min_{x\in C} c^\top x. \tag{2.7}$$

Juntando (2.6) y (2.7) se obtiene la igualdad de (d). El lado derecho es finito debido al Teorema de Weiertrass (Teorema 2.2), puesto que C es compacto y la función $x \mapsto c^\top x$ es continua.
$(d) \Longrightarrow (a)$: Es directa. □

A continuación se enuncia un resultado sobre la representación de un conjunto poliédrico en función de sus puntos y direcciones extremales. Para esta clase de conjuntos el teorema anterior adquiere una forma más precisa.

Teorema 2.16. **[BJS]** *Sea* $K = \{x \in I\!R^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ *no vacío. Entonces, el conjunto de puntos extremales es finito y no vacío, digamos* $u^1, u^2, \ldots, u^k$. *Además, el conjunto de las direcciones extremales es vacío, si y sólo si* K *es acotado. Si* K *no es acotado, entonces el conjunto de las direcciones extremales es igualmente finito y no vacío, digamos compuesto por* $d^1, d^2, \ldots, d^l$. *Finalmente,* $x \in K$, *si y sólo si*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u^j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \tag{2.9}$$

$$\lambda_j \geq 0, \ \ j = 1, 2 \ldots, k, \tag{2.10}$$

$$\mu_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.11}$$

Observación 2.4. El Teorema 2.16 valida la representación (2.4) bajo la condición (2.5), para poliedros de cualquiera de la formas siguientes

$$\{x \in I\!R^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \ \{x \in I\!R^n : Ax \geq b, x \geq 0\}, \ \text{o}$$

$$\{x \in I\!R^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Consideremos una vez más el conjunto

$$K = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_1 + x_2 \leq 1\},$$

tratado en el Ejemplo 2.10. Sabemos que no tiene puntos extremales. Como

$$K^\infty = \{(v_1, v_2) \in I\!R^2 : \ v_1 + v_2 \leq 0\}$$

(ver Ejemplo 2.3), se obtiene que las dos direcciones extremales de K son: $d^1 = (-1, 1)$ y $d^2 = (1, -1)$.

Consideramos el problema de optimización lineal siguiente

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a}: & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

Denotamos el conjunto de restricciones (o conjunto factible) mediante

$$K \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}.$$

Luego,

$$K^\infty = \{d \in I\!R^n : \ Ad = 0, \ d \geq 0\} = (I\!R^n_+) \cap \ker(A). \tag{2.12}$$

Sean $u^1, \ldots, u^k$, los puntos extremales de K y $d^1, \ldots, d^l$, las direcciones extremales de K. Obviamente, $d^j \in K^\infty$, para todo $j = 1, \ldots, l$.

Se vio que cualquier elemento x de K se puede escribir como (ver Observación 2.4):

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u^j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j,$$

donde

$$\begin{array}{rll} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j & = 1 & \\ \lambda_j & \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, k \\ \mu_j & \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, l \end{array}$$

Por lo tanto, el problema (P) es equivalente al problema

$$(\overline{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{cc} \min & \sum_{j=1}^{k}(c^\top u^j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l}(c^\top d^j)\mu_j \\ \text{sujeto a :} & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1; \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k; \\ & \mu_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \end{array} \right.$$

en el sentido que si $\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\lambda}_j u^j + \sum_{j=1}^{l} \overline{\mu}_j d^j$ es solución de (P), entonces

$$(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_l)$$

es solución de $(\overline{P})$ y, recíprocamente, si $(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_l)$ es solución de $(\overline{P})$, entonces,

$$\overline{x} \doteq \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \mu^j + \sum_{j=1}^{l} \overline{\mu}_j d^j,$$

es solución de (P) y, además, se tiene

$$\min(P) = \min(\overline{P}).$$

El teorema siguiente es más preciso que el Teorema 2.15, gracias a la forma del poliedro K en consideración.

Teorema 2.17. *Considere el problema* $(\overline{P})$ *con* $K \neq \emptyset$. *Luego, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\min(\overline{P}) > -\infty$;
(b) $c^\top d \geq 0$, *para todo* $d \geq 0$, $Ad = 0$;
(c) $d \geq 0$, $Ad = 0$, $c^\top d \leq 0 \Longrightarrow c^\top d = 0$;
(d) $c^\top d^j \geq 0$, *para todo* $j = 1, 2, \ldots, l$;
(e)

$$\min(\overline{P}) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_j c^\top u^j : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\ j = 1, \ldots, k \right\} = \min_{1 \leq j \leq k} c^\top u^j.$$

En consecuencia, en esta situación, se concluye que tanto (P) *como* $(\overline{P})$ *tienen como solución óptima a un punto extremal de* K.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Esta implicación es una consecuencia de los Teoremas 2.16 y 2.15.
$(b) \Longleftrightarrow (c)$: Es directa.

$(b) \Longrightarrow (d)$: Es directa puesto que cada $d^j \in K^\infty = (I\!R^n_+) \cap \ker(A)$.
$(d) \Longrightarrow (e)$: Si $c^\top d^j \geq 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, l$, entonces,

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_j c^\top u^j : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\ j = 1, \ldots, k \right\} \leq \min(\overline{P}).$$

Por otro lado, poniendo $\mu_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, l$, se obtiene

$$\min(\overline{P}) \leq \min \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c^\top u^j : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \ \lambda_j \geq 0\ j = 1, \ldots, k \right\},$$

el cual, junto con la desigualdad anterior, da la primera igualdad de (e).

Veamos ahora la segunda igualdad de (e). Para cada $\lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, k$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j c^\top u^j \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\min_{1 \leq j \leq k} c^\top u^j) = \min_{1 \leq j \leq k} c^\top u^j = c^\top u^{j_0},$$

para algún $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por otra parte, en particular resulta

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c^\top u^j : \sum^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, k \right\} \leq c^\top u^{j_0}$$

Combinando las dos desigualdades anteriores, se obtiene $\min(\overline{P}) = c^\top u^{j_0}$, el cual demuestra la igualdad deseada.
$(e) \Longrightarrow (a)$: Es obvio. $\square$

Del teorema anterior se desprende el resultado siguiente, el cual es válido para cualquier problema (P) o equivalentemente $(\overline{P})$.

Corolario 2.18. *Considere el problema (P). Entonces, sólo una de las afirmaciones siguientes se cumple:*

(a) *$K = \emptyset$, es decir, (P) no es factible;*
(b) *existe una dirección extremal, d^{j_0} de K, tal que $c^\top d^{j_0} < 0$, en tal caso* $\min(P) = -\infty$;
(c) *existe un punto extremal, u^{j_0} de K, que es solución óptima de (P).*

El Teorema 2.17 afirma que todo problema de optimización lineal es en realidad un problema discreto, el cual se reduce a evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos y direcciones extremales de K. Esto hace que dicho procedimiento sea impracticable en situaciones donde el número de tales puntos y direcciones sea grande, debido a que es muy difícil calcularlas. El algoritmo del simplex descrito en el capítulo siguiente, hace el cálculo anterior, pero sólo en alguno de los puntos. Para

ello se necesita una caracterización algebraica de los puntos extremales, ver Teorema 3.5.
En el Capítulo 4 se presenta un argumento que nos dice si K es vacío.

Otra consecuencia del Teorema 2.17 es el corolario siguiente, válido cuando (P) es factible.

Corolario 2.19. *Considere el problema (P) con $K \neq \emptyset$. Luego,*

$$(P) \text{ tiene solución óptima} \Longleftrightarrow \min(P) > -\infty.$$

Se recuerda que $\mathcal{S}$ denota el conjunto de las soluciones óptimas del problema (P). Por cuestiones algorítmicas, muchas veces resulta importante saber a priori si el conjunto solución es acotado. En este sentido, el corolario siguiente nos da una condición necesaria y suficiente de esa propiedad en términos algebraicos.

Teorema 2.20. *Considere el problema (P) con $K \neq \emptyset$. Luego, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathcal{S} \neq \emptyset$ *y acotado*;
(b) $d \geq 0,\ Ad = 0,\ c^\top d \leq 0 \Longrightarrow d = 0.$

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Sea $d \geq 0$, $Ad = 0$, $c^\top d \leq 0$. Sea además $\overline{x} \in \mathcal{S}$ y cualquier $\lambda > 0$. Luego, $\overline{x} + \lambda d \geq 0$, $A(\overline{x} + \lambda d) = b$ y

$$c^\top(\overline{x} + \lambda d) = c^\top \overline{x} + \lambda c^\top d \leq c^\top \overline{x}.$$

Por lo tanto, $\overline{x} + \lambda d \in \mathcal{S}$, para todo $\lambda > 0$. Así, si $\mathcal{S}$ es acotado, entonces, d debe ser 0.
$(b) \Longrightarrow (a)$: Obviamente $\mathcal{S} \neq \emptyset$ por el Teorema 2.17. Por otro lado, $\mathcal{S}$ es convexo y cerrado por el Ejemplo 2.6. Luego, si $\mathcal{S}$ no es acotado, entonces, por la afirmación inmediatamente después al Lema 2.10, existe $0 \neq d \in \mathcal{S}^\infty$. Es decir, $\overline{x} + \lambda d \in \mathcal{S}$, para todo $\lambda > 0$. Lo anterior implica que $Ad = 0$ y $d \geq 0$. Además, $c^\top(\overline{x}) = c^\top(\overline{x} + \lambda d)$; de donde $c^\top d = 0$. Luego, si (b) se cumple, se tendría $d = 0$, lo que no puede ser. $\square$

Observación 2.5. Es importante señalar que tanto el Teorema 2.17 como los Corolarios 2.19 y 2.20, continúan siendo válidos si $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b,\ x \geq 0\}$. En tal caso,

$$K^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \geq 0,\ Ad \geq 0\},$$

y, por lo tanto, (b) y (c) del Teorema 2.17 se reemplazan por

(b') $c^\top d \geq 0$, para todo $d \geq 0$, $Ad \geq 0$;
(c') $d \geq 0$, $Ad \geq 0$, $c^\top d \leq 0 \Longrightarrow c^\top d = 0$.

También (b) del Teorema 2.20 se cambia por

(b') $d \geq 0$, $Ad \geq 0$, $c^\top d \leq 0 \Longrightarrow d = 0$.

Ejemplo 2.12. Consideramos un problema de maximización cuyo conjunto factible, que es un poliedro, tiene como puntos extremales u^1, u^2, u^3, u^4 y direcciones extremales d^1, d^2 y d^3. Además, el gradiente de la función objetivo es c y satisface

$$c^\top u^1 = 5, c^\top u^2 = 7, c^\top u^3 = 4, c^\top u^4 = 7, c^\top d^1 = 0, c^\top d^2 = -3, c^\top d^3 = 0.$$

Se desea encontrar el conjunto solución de dicho problema de maximización. Si denotamos por K el conjunto factible, se obtiene

$$x \in K \Longleftrightarrow x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u^i + \sum_{j=1}^{3} \mu_j d^j, \ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1, \ \lambda_i, \ \mu_j \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, \ j = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto, $c^\top x = 5\lambda_1 + 7\lambda_2 + 4\lambda_3 + 7\lambda_4 - 3\mu_2$. Como estamos maximizando, aplicando el teorema anterior concluimos que tanto u^2 como u^4 son soluciones óptimas del problema. En consecuencia, el conjunto solución es

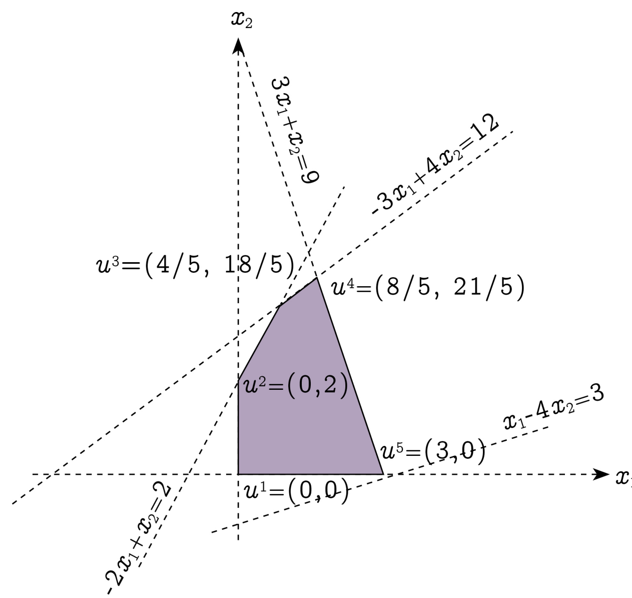
$$\{tu^2 + (1-t)u^4 : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Ejemplo 2.13. Sea el problema lineal siguiente:

$$\begin{aligned}
\max\{x_1 + 3x_2\} & & \\
\text{s.a} \quad x_1 - 3x_2 & \leq & 3 \\
-2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
-3x_1 + 4x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 + x_2 & \leq & 9 \\
x_1 \geq 0\,, \ x_2 \geq 0. & &
\end{aligned}$$

1. Sin resolver, concluya que el conjunto solución no es vacío y acotado.
   Solución.
   Usaremos el Teorema 2.20 junto con la Observación 2.5. Primero se deduce que el poliedro, K, determinado por las restricciones del problema no tiene direcciones no nulas, es decir, $K^\infty = \{0\}$. En consecuencia, (b') de la Observación 2.5 implica que el problema dado tiene conjunto solución no vacío, y además, es acotado.

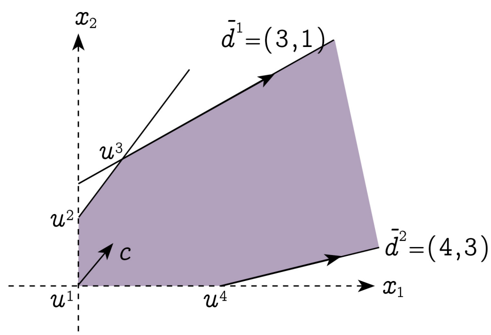
2. Bosquejar la región factible en (x_1, x_2) e identificar la solución óptima.
   Solución.



3. Identificar todos los puntos extremos y reformular el problema en términos de las combinaciones convexas de los puntos extremos; luego, resolver el nuevo problema.
   Solución.
   Si X es el conjunto factible y u^j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, son sus puntos extremales, como en 1, entonces, sabemos que

$$\begin{aligned}\max_{x\in X}\{x_1 + 3x_2\} &= \max\Big\{\sum_{j=1}^{5}(1,3)^\top u^j\lambda_j :\ \sum_{i=1}^{5}\lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\Big\}\\ &= \max_{1\leq j\leq 5}\{(1,3)^\top u^j\} = (1,3)^\top u^4 = \frac{71}{5}.\end{aligned}$$

4. Supongamos que se elimina la cuarta restricción. Identificar los puntos y direcciones extremales y reformular el problema en términos de ellos; resolver el nuevo problema y hacer algún comentario.
   Solución.
   La figura siguiente muestra el conjunto factible



La formulación del nuevo problema es:

$$\begin{array}{llll} \max & \sum_{j=1}^{4} c^\top u^j \lambda_j + \sum_{i=1}^{2} c^\top d^i \mu_i & & \\ s.a & \sum_{j=1}^{4} \lambda_j & = 1 & \\ & \lambda_j & \geq 0 & j = 1 \ldots 4 \\ & \mu_i & \geq 0 & i = 1, 2 \end{array}$$

Como $c^\top d^1 = 6 > 0,\ c^\top d^2 = 13 > 0$, el valor que alcanza la función objetivo es $+\infty$. Es evidente que a lo largo de cualquier dirección que sea una combinación positiva de d^1 y d^2, la función crece indefinidamente, es decir, el valor tiende hacia $+\infty$.

No es práctico usar el procedimiento descrito a problemas con dimensiones mayores o un número grande de restricciones, pues el cálculo de los puntos extremos y direcciones extremas puede resultar muy complicado.

2.6 Problemas

1. Sean A, B y C subconjuntos de $I\!R^n$. Probar que $A + B \subseteq C$ implica $A \subseteq C - B$ y que el recíproco no es cierto en general.
2. Dados $\alpha, \beta \in I\!R_+$, probar que $(\alpha+\beta)A \subseteq \alpha A + \beta A$ y que la igualdad no se cumple en general. Encontrar condiciones no triviales para que la igualdad se cumpla.
3. Sean $A = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$, $B = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$, $C = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ x \geq 0,\ x = y\}$.
   (a) Calcular: $2A, A + A, 3A, A + A + A, \frac{1}{2}A$;
   (b) Calcular $2B + 3C$.
4. Dado $n \in I\!N$, probar que $nA \subseteq A + \ldots + A$ y que, en general, la igualdad no es cierta.
5. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:
   (a) K es un cono convexo;
   (b) $K + K \subseteq K$;
   (c) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i K \subseteq K$, para todo $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, $m \in I\!N$.

6. Se dice que un cono convexo C es puntudo, si $C \cap (-C) = \{0\}$. Sea $K \subseteq I\!R^n$ un conjunto no vacío y convexo, y sea $x_0 \in K$. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:
   (a) x_0 es un punto extremal de K;
   (b) el conjunto $K \setminus \{x_0\}$ es convexo;
   (c) existe un cono convexo y puntudo C tal que $K - x_0 \subseteq C$.
7. Sea $C \subseteq I\!R^n$ un cono convexo. Probar que C tiene a lo más un punto extremal, ¿cuál sería? Dé un ejemplo de un cono que no tenga puntos extremales.
8. Encontrar todos los puntos extremales del conjunto
$$\{x \in I\!R^n : \ \mathbf{1}^\top x \leq 0, \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\},$$
donde $\mathbf{1}$ es el vector en $I\!R^n$ de componentes todas iguales a 1.
9. Demostrar que el hiperplano $H = \{x \in I\!R^n : \ p^\top x = \alpha\}$, $p \neq 0$, no tiene puntos extremales y tampoco direcciones extremales.
10. Demostrar que un poliedro tiene puntos extremales, si y sólo si éste no contiene rectas.
11. Sean $C \subseteq I\!R^n$ un conjunto convexo y $f : C \to I\!R$ una función cualquiera. Se define el conjunto
$$\text{epi}(f) \doteq \{(x,t) \in C \times I\!R : \ f(x) \leq t\},$$
el cual recibe el nombre de epígrafo de f. Demostrar que la función f es convexa, si y sólo si epi(f) es un conjunto convexo en $I\!R^n \times I\!R$.
12. Sean f_1, f_2 funciones convexas definidas en $I\!R^n$ cualesquiera. Demostrar que la función $f : I\!R^n \to I\!R$ definida mediante
$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$$
también es convexa, ¿qué puede decir acerca de la función
$$f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}?$$
13. Sea $K \subseteq I\!R^n$ un poliedro acotado y consideramos la función $\theta : I\!R^m \to I\!R$, llamada *función del valor óptimo*, definida mediante
$$\theta(u) = \min\{c^\top x + u^\top (Ax - b) : \ x \in K\},$$
donde $c \in I\!R^n$, $b \in I\!R^m$ y A es una matriz de orden $m \times n$. Demostrar que θ es una función cóncava.
14. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función convexa y $K \subseteq I\!R^n$ un conjunto convexo. Demostrar que el conjunto solución del problema
$$\min_{x \in K} f(x),$$
es un conjunto convexo.
15. Sea $U \subseteq I\!R^n$ un conjunto abierto y $x_0 \in U$, probar que x_0 no es solución del problema
$$\min_{x \in U} c^\top x, \ \text{excepto si } c = 0.$$

16. En todo este problema, se usa la definición siguiente: dado cualquier conjunto C en $I\!R^n$, se define el cono asintótico de C como
$$C^\infty \doteq \Big\{v \in I\!R^n : \ \exists\, t_k > 0, t_k \to 0, \ \exists\, x_k \in C, \ t_k x_k \to v\Big\}.$$
Demostrar las afirmaciones siguientes:
(a) C^∞ es siempre un cono convexo y cerrado.
(b) C es un cono si, y sólo si, $C^\infty = C$.
(c) $C^\infty = (C + x_0)^\infty$, para todo $x_0 \in I\!R^n$.
(d) $C_1 \subseteq C_2$ implica $(C_1)^\infty \subseteq C_2)^\infty$.
(e) Sea C un conjunto cerrado y convexo no vacío, $x_0 \in C$. Entonces,
$$C^\infty = \Big\{u \in I\!R^n : \ x_0 + tu \in C \ \forall\ t > 0\Big\}.$$
Tal cono es independiente del punto x_0.
(f) Sea $\{C_i\}$, $i = 1, ..., m$, cualquier familia finita de conjuntos no vacíos en $I\!R^n$, entonces,
$$\Big(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\Big)^\infty = \bigcup_{i=1}^{m} (C_i)^\infty.$$
(g) Sea $\{C_i\}$, $i \in I$, cualquier familia de conjuntos no vacíos en $I\!R^n$, entonces
$$\Big(\bigcap_{i \in I} C_i\Big)^\infty \subseteq \bigcap_{i \in I} (C_i)^\infty.$$
Si además, cada C_i es cerrado, convexo y se satisface $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, entonces,
$$\Big(\bigcap_{i \in I} C_i\Big)^\infty = \bigcap_{i \in I} (C_i)^\infty.$$
17. Sean A, B subconjuntos cerrados de $I\!R^n$, no vacíos. Si $A^\infty \cap B^\infty = \{0\}$, demostrar que $A - B$ es un conjunto cerrado. En particular, esto es cierto si A o B es, además, acotado.
Dar un ejemplo de dos conjuntos cerrados, A, B, tales que $A - B$ no es cerrado.
18. Sea $S = A \cup B$, donde
$$A = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_1 < 0, \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$
$$B = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : \ x_1 \geq 0, \ -1 \leq x_2 \leq 1\}.$$
Encontrar una representación del tipo $S = C + S^\infty$ con $C = \mathrm{co}(\mathrm{extr}(S))$, ¿es posible elegir C no convexo?
19. Encontrar los puntos extremales del conjunto determinado por las restricciones:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \end{aligned}$$
y encontrar el conjunto de las soluciones óptimas si se desea maximizar la función objetivo $3x_1 + 2x_3$.

20. Considere el problema

$$\begin{aligned} & \max\{2x_1 + x_2\} \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 \quad \leq \quad 18 \\ & 2x_1 + x_2 \quad \leq \quad 5 \\ & x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

(a) Encuentre los puntos extremales de la región factible y diga si tiene direcciones no nulas.

(b) ¿Cuál de los puntos extremales es solución óptima? Justifique su respuesta.

(c) ¿Existen soluciones óptimas que no son puntos extremales? Escriba el conjunto solución.

Capítulo 3: El Método del Simplex

En este capítulo se presenta el algoritmo del Simplex, empezando primero por su descripción analítica, para luego escribir su formato de tabla, la cual resulta ser muy adecuada para su manipulación. Este algoritmo nos permite resolver problemas lineales con muchas variables con ayuda de un computador, contrariamente a los métodos descritos en los Capítulos 1 y 2, manejables con, a lo más, tres variables de decisión. Seguidamente, este capítulo también establece algunos resultados importantes que se relacionan con la geometría del problema. Además, se menciona la regla de Bland que, incluída en el método del simplex, evita generar ciclos: situación que raramente se encuentra en problemas prácticos.

3.1 Resultados Preliminares y Geometría del Problema

Se considera el problema

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{ccl} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

donde c es un vector columna de $I\!R^n$, b es un vector columna de $I\!R^m$ y A es una matriz de orden $m \times n$ con rango igual a m (luego, se tiene $m \leq n$). De aquí, se deduce que A es sobreyectiva; en otras palabras,

$$\{x \in I\!R^n : \ Ax = b'\} \neq \emptyset, \text{ para todo } b' \in I\!R^m.$$

Definición 3.1. Se llama "*matriz básica*" o simplemente "*base*" a toda submatriz cuadrada de A, de orden $m \times m$ e invertible.

El término base en la definición precedente está directamente relacionado con el concepto de base de un espacio vectorial, en el sentido que una matriz básica o base de una matriz de orden $m \times n$, A, es una submatriz cuadrada de orden m, tal que sus m columnas forman una base del espacio $I\!R^m$; es decir, el conjunto formado por las m (vectores) columnas constituyen un conjunto linealmente independiente, y generan el espacio $I\!R^m$.
Recordemos que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de $I\!R^m$ es: (1) "*linealmente independiente*" o que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son "*linealmente independientes*", si se cumple que

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k = 0 \Longrightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0;$$

(2) "*generan*" el espacio $\mathbb{R}^m$, es decir cualquier $y \in \mathbb{R}^m$ se puede escribir como

$$y = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k$$

para algunos números reales $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Como el rango de A es m, siempre se puede encontrar una base.

Dada una base B (y por ende invertible), la matriz A puede expresarse como $A = (B\ N)$ después de reordenar adecuadamente las columnas, donde N es la submatriz de A cuyas columnas son aquellas que no están en B. También podemos reordenar el vector c y x de la forma

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Con esta notación, la condición $Ax = b$, se expresa como

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

y la función objetivo toma la forma

$$z = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N.$$

Definición 3.2. .

(i) La solución particular $x = (x_B, x_N)$ con $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$, se llama *solución básica* asociada a la base B. En este caso, B también recibe el nombre de "*matriz básica*" de x y N la "*matriz no básica*".

(ii) La solución básica (asociada a B) se llama "*solución factible básica*", si $x_B \geq 0$, es decir, $B^{-1}b \geq 0$. En este caso, B recibe el nombre de "*base factible*".

(iii) Una solución básica factible (asociada a B) se dice que es "*degenerada*"', si alguna componente de x_B es nula.

Como A es una matriz de orden $m \times n$, el problema de optimización lineal correspondiente tiene, a lo sumo, el combinatorio de n sobre m soluciones básicas, denotado por $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ e igual a

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ejemplo 3.1. Se considera el sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Se determinarán todas las soluciones factibles/no factibles, básicas/no básicas. Aquí,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Las únicas matrices básicas son:

$$B_1 = (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = (a_1 \ a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que el número de soluciones básicas no coincide con el valor

$$\frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Luego,

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Poniendo $\overline{x}_3 = 0$, la solución factible básica no degenerada correspondiente es $\overline{x} = (1/2, 3/2, 0)$.
Por otro lado,

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_3) = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Poniendo $\overline{x}_2 = 0$, la solución factible básica no degenerada correspondiente es $\overline{x} = (1/2, 0, 3/2)$.
En este caso, existen sólo dos soluciones factibles básicas:

$$(1/2, 3/2, 0), \ (1/2, 0, 3/2).$$

Sin embargo, existen infinitas soluciones factibles no básicas, las cuales están determinadas mediante

$$\{(1/2, 0, 3/2) + x_2(0, 3/2, -3/2) : \ 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

En todo lo que sigue, K denotará el conjunto factible del problema (P), es decir,

$$K \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}.$$

Teorema 3.3. *Consideremos el problema de optimización lineal (P) con rango de A igual a m. Si el conjunto factible K no es vacío, entonces (P) tiene al menos una solución factible básica.*

Demostración. Sea $x \in K$, es decir, factible para el problema (P). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x tiene las p primeras componentes positivas y el resto nulas. Reordenando igualmente, sean $a_1, a_2, \ldots, a_p$ las columnas de A que corresponden a las componentes positivas de x. Entonces, $Ax = b$ se transforma en

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b. \tag{3.1}$$

Si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de $I\!R^m$ son linealmente independientes, entonces, como el rango de A es m, se tiene que $p \leq m$. Si $p = m$, entonces x es solución factible básica asociada a la base $B = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p)$ en virtud de (3.1). Si, por el contrario, $p < m$, sabemos que se puede elegir otras $m - p$ columnas de A, de modo que, unidos a $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, forman un conjunto linealmente independiente. Sea B la submatriz que tiene por columnas a $a_1, a_2, \ldots, a_p$ y las otras $m-p$ columnas de A, elegidas anteriormente. Entonces, no es difícil darse cuenta que tal B es una base para x debido a la igualdad (3.1), puesto que las $n-p$ componentes restantes de x son nulas. Veamos el caso cuando los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son linealmente dependientes. En esta situación existen números reales $y_1, y_2, \ldots, y_p$, no todos nulos, tales que

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p = 0.$$

Sin perder generalidad se puede suponer que

$$\{i : \ y_i > 0\} \neq \emptyset.$$

Eligiendo

$$\alpha \doteq \frac{x_{i_0}}{y_{i_0}} = \min_{1 \leq i \leq p} \left\{ \frac{x_i}{y_i} : \ y_i > 0 \right\} > 0,$$

resulta que el vector z dado por $z_i = x_i - \alpha y_i$ para $i = 1, \ldots, p$; $z_i = 0$ para $i = p+1, \ldots, n$, satisface $Az = b$ y $z \geq 0$, i.e., $z \in K$. Como

$$x_{i_0} - \alpha y_{i_0} = x_{i_0} - \frac{x_{i_0}}{y_{i_0}} y_{i_0} = 0,$$

la solución factible z tiene a lo más $p-1$ componentes no nulas. Si las $p-1$ columnas de A, asociadas a tales componentes, son linealmente independientes, entonces, como en la primera parte, z será solución factible básica. En caso contrario, después de repetir un número finito de veces el procedimiento anterior, se llegará a una solución factible básica. □

Observación 3.1. La demostración del teorema anterior nos entrega un procedimiento de cómo construir una solución factible básica a partir de una solución que solamente es factible. Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2. Consideremos el Ejemplo 3.1. Ahí se encontró que el conjunto factible es

$$\{1/2, x_2, 3/2 - x_2) : \ 0 \leq x_2 \leq 3/2\}.$$

Elegimos el vector $x = (1/2, 1, 1/2)$ como solución factible no básica inicial. Poniendo $a_1 = (-1, 1)$, $a_2 = (1, 1)$, $a_3 = (1, 1)$, se observa que $\{a_1, a_2, a_3\}$ es linealmente dependiente, luego estamos en la situación de la segunda parte de la demostración del Teorema 3.3 con $p = 3$, y podemos escribir

$$0a_1 + (1)a_2 + (-1)a_3 = (0, 0),$$

es decir, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$. Así, $\alpha = \frac{x_2}{y_2} = 1$. En consecuencia, poniendo $z = (z_1, z_2, z_3)$ con $z_1 = 1/2 - (1)(0) = 1/2$, $z_2 = 1 - (1)(1) = 0$, $z_3 = 1/2 - (1)(-1) = 3/2$, se obtiene que z es una solución factible básica cuya base asociada es $(a_1 \ a_3)$, es decir, tal base está compuesta de la primera y tercera columna de la matriz A, correspondientes a la primera y tercera componentes positivas de z.

Lema 3.4. *Consideremos el problema de optimización lineal* (P) *en su forma estándar. Se cumple lo siguiente:*

(a) *si $x \in K$ es una solución factible básica, entonces x es un punto extremal de K;*

(b) *si $x \in K$ es un punto extremal de K, entonces las columnas de A correspondientes a las componentes positivas de x son linealmente independientes y, por consiguiente, x es una solución factible básica.*

Demostración. (a): Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $x = (x_B, 0)$, donde $x_B \geq 0$ y B está formado por las primeras m columnas de A, las cuales son linealmente independientes, porque B es invertible. Sean u, v elementos de K, tales que

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v, \ 0 < \lambda < 1.$$

En particular, la igualdad $0 = x_i = \lambda u_i + (1 - \lambda)v_i$ $(i = m + 1, m + 2, \dots, m + n)$ implica $u_i = v_i = 0$, para cada $i = m + 1, m + 2, \dots, m + n$. Así, $Au = b$ y $Av = b$ se reducen a $Bu_B = b$ y $Bv_B = b$. Luego, $u_B = v_B = B^{-1}b = x_B$. Por lo tanto, $x = u = v$, lo cual prueba que x es un punto extremal de K.

(b) Sea x un punto extremal de K y, supongamos, que sus p primeras componentes son positivas y el resto nulas. Si $a_1, a_2, \dots, a_p$ son las p primeras columnas de A, la condición $Ax = b$ se transforma en

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b.$$

Supongamos que los vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ son linealmente dependientes. Luego, existen números reales $y_1, y_2, \dots, y_p$, no todos nulos, tales que

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p = 0.$$

Ponemos

$$\alpha_0 \doteq \min_{1 \leq i \leq p} \left\{ \frac{x_i}{|y_i|} : \ y_i \neq 0 \right\} > 0,$$

y, eligiendo $\alpha \in \ (0, \alpha_0)$, resulta que

$$x_i + \alpha y_i > 0, \ x_i - \alpha y_i > 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, p.$$

Poniendo $y_i = 0$, para $i = p + 1, p + 2, \dots, n$, se obtiene que

$$x \pm \alpha y \in K, \ x = \frac{1}{2}(x + \alpha y) + \frac{1}{2}(x - \alpha y),$$

lo que significa que x no sería un punto extremal de K, lo cual resulta ser una contradicción. En consecuencia, los vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ de $I\!R^m$ deben ser linealmente independientes. Para demostrar que x es una solución básica se aplica el mismo argumento usado en la demostración del Teorema 3.3. $\square$

Si cada punto extremal de K tiene exactamente m componentes positivas, entonces existe una correspondencia uno a uno entre las soluciones factibles básicas y los puntos extremales de K. Si por el contrario, algún punto extremal tiene $p(< m)$ componentes positivas, éste es una solución básica degenerada (alguna componente básica nula). Una matriz básica asociada se puede encontrar añadiendo otras $m - p$ columnas linealmente independientes de A, a las ya existentes p columnas linealmente

independientes. Obviamente, puede haber más de un modo de añadir $m-p$ columnas linealmente independientes, por lo que a puntos extremales degenerados le puede corresponder más de una matriz básica.
Juntando ambos resultados del lema anterior, se obtiene el teorema siguiente.

Teorema 3.5. *Consideremos el problema de optimización lineal (P) en su forma estándar con rango de A igual a m. Entonces, $x \in K$ es un punto extremal de K, si y sólo si x es una solución factible básica.*

Corolario 3.6. *El conjunto convexo K tiene un número finito de puntos extremales.*

Demostración. Por el teorema anterior, el número de puntos extremales de K coincide con el número de soluciones factibles básicas de (P) y éste es, a lo más, $\binom{n}{m}$ $\square$

El combinatorio de m sobre n es un número bastante grande aún para valores de m y n relativamente pequeños:

$$\binom{15}{6} = 5005.$$

En muchos problemas reales, el número de variables suele ser del orden de 500 y de restricciones (excluyendo las de no negatividad) 150.

Una versión más general que el resultado siguiente, está expresada en el Teorema 2.17, puesto que si K es compacto, $\min(\overline{P}) = \min(P) \in I\!R$. La demostración que se presenta a continuación es directa y usa igualmente el Teorema (de representación) 2.16.

Teorema 3.7. *Consideremos el problema (P). Si el conjunto factible K es acotado, entonces (P) tiene una solución óptima que es un punto extremal de K y, por consiguiente, también una solución básica óptima.*

Demostración. Se sabe que K es cerrado, luego es compacto al ser ya acotado por hipótesis, y como la función objetivo es continua (porque es lineal), el teorema de Weierstrass (Teorema 2.2) asegura que (P) tiene una solución óptima. Denotamos por $u^1, \ldots, u^k$ los puntos extremales de K (se sabe por el Lema 2.10 que K no posee direcciones no nulas) y h la función objetivo $h(x) = c^\top x$. Dado cualquier $x \in K$, podemos encontrar $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ y } x = \lambda_1 u^1 + \cdots + \lambda_k u^k.$$

Sea $h(u^p) = \min\{h(u^i) : \; i = 1, \ldots, k\}$. Puesto que h es lineal, se obtiene

$$h(x) = h(\lambda_1 u^1 + \cdots + \lambda_k u^k) = \lambda_1 h(u^1) + \ldots + \lambda_k h(u^k) \geq (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i) h(u^p) = h(u^p).$$

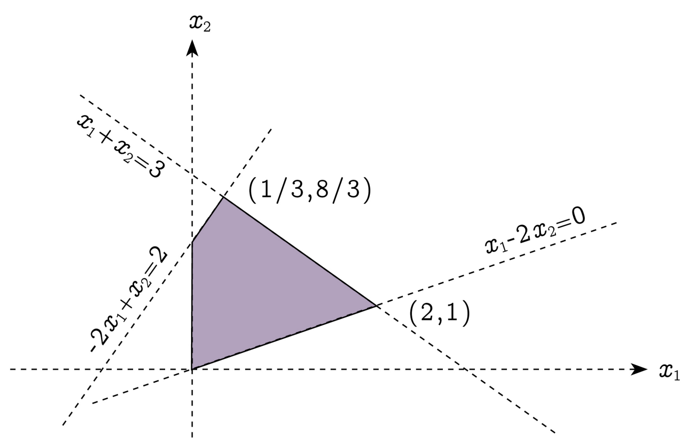
Como x era cualquier elemento en K, se deduce que el punto extremal u^p, de K, es una solución óptima de (P). $\square$

Ejemplo 3.3.

Consideramos las restricciones

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 0 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

1. Dibujar la región factible.
   Solución.



2. Después de añadir las variables inactivas (de holgura), identificar los puntos extremales para el nuevo poliedro y para cada uno de ellos, enumerar todas las variables básicas y no básicas correspondientes.
   Solución.
   Agregando las variables de holgura se obtiene,

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 & = & 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

   Denotamos por K el poliedro en $I\!R^5$ determinado por las restricciones anteriores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es 3. A continuación se enumeran las matrices básicas y las correspondientes variables básicas. Evidentemente, cuando alguna variable es estrictamente negativa, la solución básica que se origina no es factible.

* $B_1 = (a_1\ a_2\ a_3) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4/3, -2/3, 5)$, esto da origen a una solución no factible;

* $B_2 = (a_1\ a_2\ a_4) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_4) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, 5)$, lo que origina una solución (factible) básica no degenerada;

* $B_3 = (a_1\ a_2\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1/3, 8/3, 5)$, lo que origina una solución (factible) básica no degenerada;

* $B_4 = (a_1\ a_3\ a_4) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 3, 2)$, lo que da origen a una solución (factible) básica pero degenerada;

* $B_5 = (a_1\ a_3\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_3, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1, 4, 1)$, dando origen a una solución no factible;

* $B_6 = (a_1\ a_4\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_4, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3, 5, -3)$, lo que da origen a una solución no factible;

* $B_7 = (a_2\ a_3\ a_4) \Longrightarrow (\overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 3, 2)$, dando lugar a una solución (factible) básica degenerada;

* $B_8 = (a_2\ a_3\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, 4)$, lo que origina una solución básica no degenerada;

* $B_9 = (a_2\ a_4\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_2, \overline{x}_4, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3, -1, 6)$, el cual da origen a una solución básica no factible;

* $B_{10} = (a_3\ a_4\ a_5) \Longrightarrow (\overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3, 2, 0)$, el cual da origen a una solución básica factible pero degenerada;

Los puntos extremales del poliedro K son:

$$(2,1,0,5,0),\ (1/3,8/3,0,0,5),\ (0,0,3,2,0),\ (0,2,1,0,4).$$

De aquí se observa que el punto extremal $(0,0,3,2,0)$, el cual es una solución (factible) básica degenerada, se puede representar a través de tres matrices básicas diferentes: B_4, B_7 y B_{10}.

Por otro lado, no es difícil darse cuenta que K es acotado, luego es compacto y, por el Teorema 3.7, el problema de minimizar (o maximizar) cualquier función lineal sujeto a K admite una solución óptima que es básica. Podemos también usar el Teorema 2.17 para encontrar una solución óptima que es un punto extremal.

Teorema 3.8. *Si el problema (P) tiene solución óptima en más de un punto extremal de K, entonces cualquier combinación convexa de dichos puntos es también solución óptima de (P).*

Demostración. Sean $u^1,\dots,u^k$, soluciones de (P), las cuales corresponden a puntos extremales de K. Entonces,

$$c^\top u^i = \min(P),\ \text{para todo } i=1,\dots,k.$$

Luego, cualquier $x=\lambda_1 u^1+\cdots+\lambda_k u^k$ con $\lambda_i\geq 0$, $i=1,\dots,k$ y $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$, satisface

$$c^\top x = c^\top(\lambda_1 u^1+\cdots+\lambda_k u^k)=\lambda_1 c^\top u^1+\cdots+\lambda_k c^\top u^k=(\sum_{i=1}^k\lambda_i)\min(P)=\min(P),$$

lo cual prueba el resultado deseado. □

Una consecuencia importante de los resultados anteriores es el corolario siguiente.

Corolario 3.9. *Si (P) es tal que $\min(P)>-\infty$, entonces (P) tiene al menos una solución óptima que es básica.*

3.2 El Método Simplex

El método Simplex desarrollado por George B. Dantzig en 1947, funciona partiendo desde un punto extremal del conjunto factible (solución factible básica) hacia otro punto extremal adyacente en donde el valor de la función objetivo es menor o, en el peor de los casos, se mantiene igual. El método continúa de esta manera hasta que se obtenga una solución óptima (con valor óptimo finito) o hasta encontrar un rayo a lo largo del cual el valor de la función decrece indefinidamente, en tal caso $\min(P)=-\infty$. Así, el algoritmo del Simplex consiste de dos pasos principales: (1) encuentra una manera de decidir si una solución factible básica es óptima, y (2) una manera de obtener una solución factible básica adyacente donde la función asume un valor menor o igual que en el precedente. Esto no quiere decir que el algoritmo examina todos los puntos extremales, sino, solamente algunos.

El propósito de esta sección es presentar el método Simplex de modo analítico para el problema de optimización lineal en su forma estándar.

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

donde, como en la sección anterior, A es una matriz de orden $m \times n$ y rango igual a m. En consecuencia, después de reordenar, si es necesario, podemos escribir

$$A = (B\ N),\ B = (a_1\ a_2 \cdots\ a_m),\ N = (a_{m+1}\ a_{m+2} \cdots\ a_n).$$

Aquí, a_j representa la j-ésima columna de A, los cuales son vectores en $I\!R^m$. Por lo tanto, siendo el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ linealmente independiente, se tiene que para cada a_j, $j = m+1, m+2, \ldots, m+n$, existen números reales $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$, tales que

$$a_j = \alpha_{1j} a_1 + \alpha_{2j} a_2 + \cdots + \alpha_{mj} a_m.$$

Para cada $j = m+1, m+2, \ldots, n$, denotamos

$$\alpha_j \doteq (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{mj}).$$

Luego, la igualdad anterior se puede escribir como $a_j = B\alpha_j$ y, por lo tanto,

$$\alpha_j = B^{-1} a_j,\ \text{para todo}\ j = m+1, m+2, \ldots, n.$$

En consecuencia,

$$(3.2) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1m+1} & \alpha_{1m+2} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{mm+1} & \alpha_{mm+2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = B^{-1} N.$$

Además, se pone

$$(3.3) \qquad z_j \doteq c_1 \alpha_{1j} + c_2 \alpha_{2j} + \cdots + c_m \alpha_{mj} = c_B^\top \alpha_j\ (j = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Sea $y = (y_B, y_N)$ cualquier otra solución factible. Luego, $By_B + Ny_N = b$. De donde,

$$(3.4) \qquad y_B = B^{-1} b - B^{-1} N y_N.$$

Escribiendo $c = (c_B, c_N)$, $x_B = B^{-1} b$, $x_N = 0$, se obtiene

(3.5)

$$c^\top y = c_B^\top y_B + c_N^\top y_N = c_B^\top B^{-1} b - c_B^\top B^{-1} N y_N + c_N^\top y_N = c^\top x - (c_B^\top B^{-1} N - c_N^\top) y_N.$$

Con estas notaciones, el teorema siguiente nos entrega la relación entre el valor de la función objetivo en una solución básica factible y en otra solución factible cualquiera.

Teorema 3.10. *Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)$ una solución factible básica, con matriz básica $B = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)$, e y una solución factible del problema (P), entonces,*

$$c^\top y = c^\top x - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) y_j.$$

Demostración. Por hipótesis, se tiene

$$x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0,\ By_B + Ny_N = b.$$

Usando las igualdades (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5), resulta

$$c_B^\top B^{-1}Ny_N = c_B^\top \begin{pmatrix} \alpha_{1m+1} & \alpha_{1m+2} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{mm+1} & \alpha_{mm+2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} y_N = \sum_{j=m+1}^{n} z_j y_j.$$

Lo cual implica

$$c^\top y = c^\top x - (c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top)y_N = c^\top x - \sum_{j=m+1}^{n}(z_j - c_j)y_j.$$

$\square$

Veamos ahora un resultado del Algebra Lineal que se utilizará en la demostración del teorema fundamental de este capítulo.

Lema 3.11. *Si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de $I\!R^m$ son linealmente independientes y v es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ con el escalar correspondiente a v_k no nulo ($k \in \{1, 2, \ldots, m\}$), entonces los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_m, v$ son linealmente independientes.*

Demostración. Dado

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{m} \lambda_i v_i + \lambda_k v = 0,$$

debemos probar que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Por hipótesis $v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$ con $\beta_k \neq 0$. Substituyendo en la igualdad anterior, se obtiene

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{m} (\lambda_i + \lambda_k \beta_i)v_i + \lambda_k \beta_k v_k = 0.$$

Debido a la independencia lineal de los vectores $v_i, = 1, 2, \ldots, m$, resulta

$$\lambda_i + \lambda_k \beta_i = 0\ i = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq k,\ \lambda_k \beta_k = 0.$$

De donde, $\lambda_k = 0$ y, en consecuencia, $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, m$. Esto prueba el resultado deseado. $\square$

El teorema siguiente muestra el camino a seguir para pasar de una solución factible básica a otra y la relación entre el valor de la función objetivo en ambas soluciones.

Teorema 3.12. *Sean* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)$ *una solución factible básica, con matriz básica* $B = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m)$*, del problema* (P)*;* a_j *una columna de* N *tal que*

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} a_i = B\alpha_j$$

con alguna $\alpha_{ij} > 0$ *y*

$$\frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} : \ \alpha_{ij} > 0 \right\}.$$

Bajo estas condiciones, se verifica que:

(*a*) *el vector* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *es una solución factible básica de* (P)*, donde*

$$y_i = \begin{cases} x_i - \alpha_{ij} \frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}}, & \text{si} \quad i = 1, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, \ldots, m \\ \frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}}, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y base $\tilde{B} = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_{i_0-1} \ a_{i_0+1} \ \ldots \ a_m \ a_j)$*;*

(*b*) $c^\top y = c^\top x - (z_j - c_j) y_j$*, donde* $z_j = c_1 \alpha_{1j} + \cdots + c_m \alpha_{mj}$*.*

Demostración. (a) Observamos, en primer lugar, que $y \ge 0$. Veamos a continuación que $\tilde{B}y = b$ para alguna base $\tilde{B}$, lo cual indicará que y es solución factible básica. Como x es factible, se verifica

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = b, \ x_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Por hipótesis,

$$a_{i_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0 j}} (a_j - \alpha_{1j} a_1 - \cdots - \alpha_{i_0 - 1 j} a_{i_0 - 1} - \cdots - \alpha_{mj} a_m).$$

Substituyendo esta expresión en la precedente, se obtiene

$$\sum_{i=1, i \ne i_0}^{m} \left(x_i - \alpha_{ij} \frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}} \right) a_i + \frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}} a_j = b.$$

Por el Lema 3.11, los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m, a_j$ son linealmente independientes. Así, la última igualdad implica $\tilde{B}y = b$, donde

$$\tilde{B} = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_{i_0-1} \ a_{i_0+1} \ \ldots \ a_m \ a_j),$$

es decir, $\tilde{B}$ es una base para y.

(b) $c^\top y = \displaystyle\sum_{i=1, i \ne i_0}^{m} c_i \left(x_i - \alpha_{ij} \frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j}} \right) + c_j y_j + c_{i_0} x_{i_0} - c_{i_0} x_{i_0} = c^\top x - z_j y_j + c_j y_j$, probando lo deseado. $\square$

Observación 3.2. (Mejora del valor de la función objetivo) El Teorema 3.12 permite construir otra solución factible básica (junto a su matriz básica) y, a partir de una inicialmente dada, x, y además establece la diferencia de los valores de la función objetivo en ambas soluciones. Esta es la base del método Simplex.
Si x no es solución óptima es deseable encontrar y, tal que $c^\top y - c^\top x < 0$. Esto es posible si $z_j - c_j > 0$, pues $y_j \geq 0$, gracias a (b) del teorema precedente. Por lo tanto, eligiendo

$$z_{j_0} - c_{j_0} \doteq \max_{j \in J}\{z_j - c_j > 0\},\ J \doteq \{m+1, m+2, \ldots, n\},$$

se deduce que la solución factible básica y, construida por el teorema anterior (para j_0 en lugar de j), es tal que $c^\top y$ es lo más que podemos decrecer el valor de función objetivo manteniendo la factibilidad de y, siempre que $\alpha_{ij_0} > 0$, para algún i.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento descrito en el teorema anterior.

Ejemplo 3.4. Consideremos el problema lineal siguiente

$$\begin{array}{rcl} \max\ 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.a} \qquad 2x_1 + x_2 & \leq & 6000 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 9000 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 4000 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Después de añadir las tres variables de holgura x_4, x_5, x_6 para convertir el problema en su forma estándar, y considerando como solución factible básica inicial $x = (0, 0, 0, 6000, 9000, 4000)$, encontrar una segunda solución factible básica siguiendo el esquema del teorema anterior.
Solución.
Agregando las variables de holgura para convertir el problema en su forma estándar, se obtiene

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -\min & -10x_1 & - & 15x_2 & - & 5x_3 & - & 0x_4 & - & 0x_5 & - & 0x_6 & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 6000 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 9000 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & x_6 & = & 4000 \\ & x_1 \geq & 0, & x_2 \geq & 0, & x_3 \geq & 0, & x_4 \geq & 0, & x_5 \geq & 0, & x_6 \geq & 0 & \end{array}$$

Aquí,

$$A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La base asociada a la solución factible básica $x = (0, 0, 0, 6000, 9000, 4000)$ es

$$B = (a_4\ a_5\ a_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = (a_1\ a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo $a_1 = 2a_4 + 3a_5 + 1a_6$, $\alpha_{41} = 2$, $\alpha_{51} = 3$, $\alpha_{61} = 1$, resulta

$$\frac{x_4}{\alpha_{41}} = \min\{x_4/\alpha_{41}, x_5/\alpha_{51}, x_6/\alpha_{61}\} = \min\{3000, 3000, 4000\}.$$

Tal mínimo se alcanzó en dos términos, pero se eligió el primero, x_4/α_{41}. Por lo tanto, usando la Parte (a) del teorema anterior se obtiene

$$y_1 = x_1/\alpha_{41} = 3000,\ y_5 = x_5 - \alpha_{51}(3000) = 0,\ y_6 = x_6 - \alpha_{61}(3000) = 1000,$$

$$y_2 = y_3 = y_4 = 0.$$

En consecuencia, la nueva solución factible básica (degenerada) es

$$y = (3000, 0, 0, 0, 0, 1000),$$

con base $\tilde{B} = (a_1\ a_5\ a_6)$. El valor de la función objetivo del problema de minimización es $c^\top y = -30000$ y, así, del problema de maximización es 30000.

Ejercicio 3.1. Para el problema del Ejemplo 3.4, mostrar que, partiendo con la misma solución factible básica $x = (0, 0, 0, 6000, 9000, 4000)$ y eligiendo a_2 en vez de a_1, se obtiene otra solución factible básica y, tal que $c^\top y = -30000$.
Respuesta: la solución así construida es $y = (0, 2000, 0, 4000, 3000, 0)$ con base $\tilde{B} = (a_4\ a_5\ a_2)$.

Con ayuda del resultado anterior, se demostrará un teorema general que entrega información acerca de la optimalidad de la solución factible básica considerada y acerca del conjunto solución.

Teorema 3.13. *Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)$ una solución factible básica, con matriz básica $B = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)$, del problema (P). Se cumple lo siguiente:*

(a) *si $z_j - c_j \leq 0$, para todo $j = m+1, \ldots, n$, entonces x es una solución factible básica óptima de (P); si $z_j - c_j < 0$, para todo $j = m+1, \ldots, n$, entonces x es la única solución factible básica óptima de (P);*

(b) *si $z_j - c_j > 0$, para alguna $j = m+1, \ldots, n$, y las correspondientes $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}$ son negativas o nulas, entonces la función objetivo decrece indefinidamente a lo largo del rayo $x + t\begin{pmatrix} -\alpha_j \\ e_{j-m} \end{pmatrix}$, $t > 0$, donde $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$ y e_i es el vector en $\mathbb{R}^{n-m}$ cuyas componentes son ceros, excepto la i-ésima que es 1 y así, $\min(P) = -\infty$;*

(c) *si x es una solución básica factible no degenerada y $z_j - c_j = 0$, para alguna $j = m+1, \ldots, n$, entonces existe un número infinito de soluciones óptimas.*

Demostración. (a) Esto es una consecuencia del Teorema 3.10 y del hecho que $y \geq 0$, puesto que $c^\top y \geq c^\top x$.
Veamos la segunda parte. Sea y cualquier otra solución factible diferente de x. Luego, existe una componente no básica $y_j > 0$, $j \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$. Se aplica el Teorema 3.10 para concluir con el resultado.
(b) Por hipótesis

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = b, \; x_i \geq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Como $a_j = \alpha_{1j} a_1 + \alpha_{2j} a_2 + \ldots + \alpha_{mj} a_m$, multiplicando esta expresión por cualquier $t > 0$ y restando por la igualdad anterior se obtiene

$$(x_1 - t\alpha_{1j}) a_1 + \cdots + (x_m - t\alpha_{mj}) a_m + t a_j = b.$$

Esta igualdad afirma que el vector

$$y_t \doteq (x_1 - t\alpha_{1j}, x_2 - t\alpha_{2j}, \ldots, x_m - t\alpha_{mj}, 0, \ldots, 0, t, 0 \ldots, 0) = x + t \begin{pmatrix} -\alpha_j \\ e_{j-m} \end{pmatrix},$$

satisface $Ay_t = b$, $y_t \geq 0$, para todo $t > 0$; aquí, t va en la posición j-ésima. Veamos el valor de la función objetivo en y_t:

$$c^\top y_t = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - t\alpha_{ij}) + c_j t = c^\top x - t(z_j - c_j), \tag{3.6}$$

lo cual implica que, haciendo crecer t indefinidamente, el valor de la función objetivo tiende a menos infinito, es decir, $\min(P) = -\infty$.
(c) Si todas las α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son negativas o nulas, aplicando el razonamiento de la Parte (b), podemos obtener una solución factible básica y, tal que (ver (3.6))

$$c^\top y = c^\top x - (z_j - c_j) y_j = c^\top x,$$

puesto que $z_j - c_j = 0$. Por la forma de elección de y, $x \neq y$ y, en consecuencia, se obtiene infinitas soluciones óptimas.
Supongamos, entonces, que existe al menos una α_{ij} positiva. Usando el Teorema 3.12, se construye una nueva solución factible básica y, con y_j positiva, siendo j el nuevo índice básico entrante e i_0 el antiguo índice básico saliente. Debido a la hipótesis y a la Parte (b) del Teorema 3.12, también se tiene, $c^\top x = c^\top y$ y como x no es degenerada, $x \neq y$. Por lo tanto, cualquier combinación lineal convexa de x e y también será solución óptima del problema en virtud del Teorema 3.8. □

Observación 3.3. En la situación de la Parte (b) del Teorema 3.13, la dirección

$$d_0 \doteq \begin{pmatrix} -\alpha_j \\ e_{j-m} \end{pmatrix} \in K^\infty,$$

(en el sentido de la Sección 2.3), es decir, $Ad_0 = 0$, $d_0 \geq 0$. En efecto, evidentemente $d_0 \geq 0$, y

$$Ad_0 = (B \; N) \begin{pmatrix} -\alpha_j \\ e_{j-m} \end{pmatrix} = -a_j + a_j = 0.$$

También se tiene

$$c^\top d_0 = \begin{pmatrix} c_B^\top & c_N^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_j \\ e_{j-m} \end{pmatrix} = -c_B^\top B^{-1} a_j + c_j = -z_j + c_j < 0.$$

Lo cual corrobora el resultado del Teorema 2.15. En realidad uno puede demostrar que tal dirección es extremal.

Los resultados anteriores se resumirán en la subsección siguiente.

3.2.1 El Algoritmo del Simplex

Consideramos el problema lineal siguiente en su forma estándar:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$ y rango m. Denotamos por $J \doteq \{m+1, m+2, \ldots, n\}$ el conjunto de índices no básicos.

1. Iniciamos con una solución factible básica inicial, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ asociada a la matriz básica $B = (a_1\ a_2 \cdots a_m)$ y no básica $N = (a_{m+1} \cdots a_n)$. Así, $A = (B\ N)$.

2. Se calcula $z_j - c_j = c_B^\top \alpha_j - c_j$, para cada $j \in J$, donde

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \alpha_{1m+1} & \alpha_{1m+2} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{mm+1} & \alpha_{mm+2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{m+1}\ \alpha_{m+2} \cdots \alpha_n).$$

2a. (Test de optimalidad) Si $z_j - c_j \leq 0$, para todo $j \in J$, entonces x es una solución factible básica óptima del problema (P) [Teorema 3.13(a)]. Si, además, una de las diferencias $z_j - c_j$ es cero y x no es degenerada, entonces existen otras soluciones óptimas. Más precisamente, cambiando la columna correspondiente a j, por una de la matriz básica, se tiene otra solución factible básica óptima y, en consecuencia, cualquier combinación convexa de ambas también será solución óptima [Teorema 3.13(c)].

2b. Si $z_j - c_j > 0$, para alguna $j \in J$, entonces se pasa a **3**.

3. Ponemos (ver Observación 3.2)

$$z_{j_0} - c_{j_0} \doteq \max_{j \in J} \{z_j - c_j > 0\}.$$

3a. [Teorema 3.13(b)] Si $\alpha_{1j_0}, \ldots, \alpha_{mj_0}$ son negativas o nulas, entonces

$$\min(P) = -\infty.$$

3b. [Teorema 3.12] Si existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tal que $\alpha_{ij_0} > 0$, entonces se determina una nueva matriz básica cambiando la columna a_{i_0} de B por la columna a_{j_0} de N, en donde i_0 es tal que

$$\frac{x_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} = \min_{1\le i\le m} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij_0}} : \ \alpha_{ij_0} > 0 \right\},$$

de forma que la nueva matriz básica es

$$\tilde{B} = (a_1 \ a_2 \cdots a_{i_0-1} \ a_{i_0+1} \ \cdots \ a_m \ a_{j_0}),$$

la cual genera la nueva solución factible básica y dada en (a) del Teorema 3.12.

4. Se repite el proceso anterior para la nueva solución factible básica encontrada en **3b**.

Debido a que el conjunto de puntos extremales de la región factible es finito y que tal conjunto coincide con aquel de soluciones factibles básicas, conclúimos que el algoritmo del Simplex termina después de un número finito de iteraciones, siempre que no aparezcan soluciones degeneradas. En efecto, la ausencia de degeneración permite construir soluciones factibles básicas diferentes en cada iteración.

En buena cuenta se ha demostrado el teorema siguiente.

Teorema 3.14. En ausencia de degeneración.
Si existe una solución óptima que es un punto extremal - para un problema de minimización lineal -, entonces existe una base asociada, para la cual se cumple

$$z_j - c_j \le 0, \ \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Observación 3.4. Por la manera cómo se presentó el algoritmo del Simplex, su ejecución requiere, en primer lugar, que el problema de optimización lineal esté formulado en su forma estándar, esto no da ninguna dificultad en virtud del Lema 1.1; en segundo término, se necesita contar con una solución factible básica, y éste sí que da trabajo, porque a veces es difícil identificar una solución de este tipo. Sin embargo, en los ejemplos que discutiremos a continuación, aunque la formulación involucrará desigualdades "menor o igual que", la introducción de las variables inactivas (de holgura) la convertirá a la forma lista para aplicar el Simplex, si el vector del lado derecho, b, es no negativo. En efecto, en tal situación, las variables de holgura serán las variables básicas iniciales si $b \geq 0$, puesto que en este caso la matrix I (la identidad de orden m) será una matriz básica inicial:

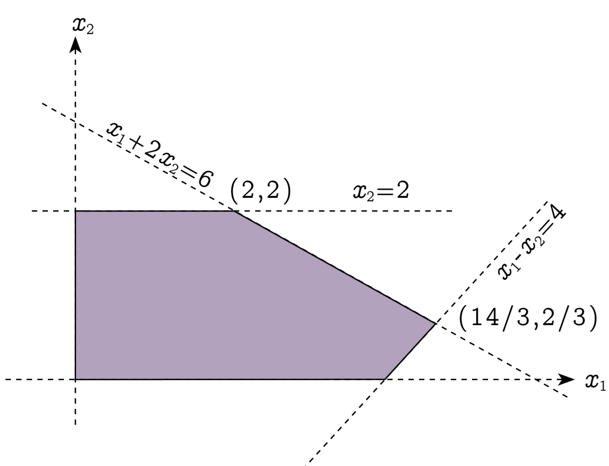
$$Ax \le b, \ x \ge 0 \Longleftrightarrow Ax + Ix_h = b, \ x \ge 0, \ x_h \ge 0.$$

Este tema se retomará al final de este capítulo.

Ejemplo 3.5. Consideramos las restricciones siguientes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 2 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

1. Dibuje la región factible.
   Solución.



2. Identifique los puntos extremales del poliedro obtenido una vez agregadas las variables de holgura, además de las variables básicas y no básicas.
   Solución.
   Denotamos por K el poliedro en $I\!R^5$ determinado por las restricciones anteriores después de añadir las variables de holgura. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es 3. A continuación se enumeran las matrices básicas y las correspondientes variables básicas. Evidentemente, cuando alguna variable es estrictamente negativa, la solución básica que se origina no es factible.
Los puntos extremales en $I\!R^2$ son: $(0,2)$, $(2,2)$, $(14/3, 2/3)$, $(4,0)$, $(0,0)$. Veamos los correspondientes puntos extremales del poliedro en $I\!R^5$.

* $B = (a_1 \ a_2 \ a_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Variables Básicas: $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

Variables No Básicas : $x_4 = 0,\ x_5 = 0$

Así, la solución factible básica es: $(2, 2, 4, 0, 0)$.

* $B = (a_1 \ a_2 \ a_4)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Variables Básicas: $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_4 = 4$

Variables No Básicas : $x_3 = 0,\ x_5 = 0.$

Por lo tanto, la solución factible básica es: $(2, 2, 0, 4, 0)$.

* $B = (a_1 \ a_2 \ a_5)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Variables Básicas: $x_1 = 14/3,\ x_2 = 2/3,\ x_5 = 4/3$

Variables No Básicas : $x_3 = 0,\ x_4 = 0.$

Por lo tanto, la solución factible básica es: $(14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$.

* La matriz $(a_1 \ a_3 \ a_4)$ no es base.

* $B = (a_1 \ a_3 \ a_5)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Variables Básicas: $x_1 = 4,\ x_3 = 2,\ x_5 = 2$

Variables No Básicas : $x_2 = 0,\ x_4 = 0.$

Por lo tanto, la solución factible básica es: $(4, 0, 2, 0, 2)$.

* La matriz $(a_1 \ a_4 \ a_5)$ es base pero no factible.

* $B = (a_2 \ a_3 \ a_4)$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Variables Básicas: $x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 6$

Variables No Básicas : $x_1 = 0,\ x_5 = 0.$

Así, la solución factible básica es: $(0, 2, 2, 6, 0)$.
* Las matrices $(a_2\ a_3\ a_5)$ y $(a_2\ a_4\ a_5)$ son bases, pero no factibles.
* $B = (a_3\ a_4\ a_5)$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Variables Básicas:} & x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 2 \\ \text{Variables No Básicas :} & x_1 = 0,\ x_2 = 0. \end{array}$$

Así, la solución factible básica es: $(0, 0, 6, 4, 2)$.
* Las bases $(a_1\ a_4\ a_5)$, $(a_2\ a_3\ a_5)$, $(a_2\ a_4\ a_5)$ no son factibles; mientras que $(a_1\ a_3\ a_4)$ no es básica.

3. Suponga que se ha movido desde el punto extremal $(4, 0)$ al $(14/3, 2/3)$ en el espacio (x_1, x_2). Especifique cuál variable entra a la base y cuál sale de ella.
   Solución.
   De acuerdo a lo anterior se obtiene que la base para el extremal punto $(4, 0)$ es $B = (a_1\ a_3\ a_5)$ (puesto que corresponde a la solución factible básica $(4, 0, 2, 0, 2)$), mientras que al punto $(14/3, 2/3)$ le corresponde la base $B = (a_1\ a_2\ a_5)$.
   En consecuencia, sale a_3 y entra a_2.

Ejemplo 3.6. Consideremos el problema lineal del Ejemplo 3.4. Verificar que una base óptima consiste de la variable inactiva de la primera restricción, de x_1 y x_2.
Solución.
Tal como ya se vio en el Ejemplo 3.4, agregando las variables de holgura para formular el problema en su forma estándar, se obtiene

$$\begin{array}{lcccccccccccl} -\min & -10x_1 & - & 15x_2 & - & 5x_3 & - & 0x_4 & - & 0x_5 & - & 0x_6 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = 6000 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = 9000 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & x_6 & = 4000 \\ & x_1 \geq & 0, & x_2 \geq & 0, & x_3 \geq & 0, & x_4 \geq & 0, & x_5 \geq & 0, & x_6 \geq & 0. \end{array}$$

Aquí,

$$A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como la variable inactiva correspondiente a la primera restricción es x_4, se debe considerar la matriz

$$B_0 = (a_4\ a_1\ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que, en efecto, es una matriz básica con inversa

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usaremos la Parte (a) del Teorema 3.13. Las variables no básicas son: x_3, x_5, x_6. Calculamos la diferencia $z_j - c_j$, para $j \in J = \{3, 5, 6\}$.
$z_3 - c_3 = c_{B_0}^\top B_0^{-1} a_3 - c_3 = (0\ \ -5/3\ \ -5)^\top (0\ 1\ 2) - (-5) = -20/3;$
$z_5 - c_5 = c_{B_0}^\top B_0^{-1} a_5 - c_5 = (0\ \ -5/3\ \ -5)^\top (0\ 1\ 0) - (-0) = -5/3;$
$z_6 - c_6 = c_{B_0}^\top B_0^{-1} a_6 - c_6 = (0\ \ -5/3\ \ -5)^\top (0\ 0\ 1) - (-0) = -5.$
Luego, por el teorema mencionado anteriormente, la solución factible básica asociada a tal matriz es óptima. La solución óptima correspondiente es:

$$\overline{x} = (2000, 1000, 0, 1000, 0, 0).$$

Por lo tanto, considerando sólo las variables legítimas, la solución es $(2000, 1000, 0)$. El valor óptimo del problema original es $10(2000) + 15(1000) + 5(0) = 35000$.

3.3 La Tabla del Simplex

La aplicación del Algoritmo del simplex requiere resolver en cada iteración los sistemas siguientes:

$$Bx_B = b,\ \ B\alpha_{j_0} = a_{j_0},\ \ wB = c_B^\top.$$

Así, el número de operaciones de cálculo que deben realizarse es muy elevado, con la consiguiente acumulación de datos en la memoria. Veremos, en cambio, que usando el formato Tabla del algoritmo del simplex se reducirá considerablemente el número de operaciones.

Con las notaciones introducidas al inicio de este capítulo se observa que el problema (P) es equivalente al problema

$$\left\{\begin{array}{cccl} \min & z & & \\ \text{sujeto a}: & z & -c^\top x & = 0 \\ & & Ax & = b, \\ & & x & \geq 0, \end{array}\right.$$

o, equivalentemente,

$$(P)\qquad\left\{\begin{array}{llcccccc} \min & z & & & & & & \\ \text{sujeto a :} & z & - & c_B^\top x_B & - & c_N^\top x_N & = & 0 \\ & & & Bx_B & + & Nx_N & = & b \\ & & & x_B \geq 0, & & x_N \geq 0. & & \end{array}\right.$$

Multiplicando la última igualdad por B^{-1}, resulta

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Despejando x_B de esta igualdad y reemplazándola en la primera, se obtiene

$$z + 0x_B + (c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top)x_N = c_B^\top B^{-1}b.$$

Juntando ambas expresiones formamos la tabla del simplex.

	z	x_B	x_N	LD
z	1	0	$c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top$	$c_B^\top B^{-1}b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Tabla 3.1. La tabla del simplex

La tabla adjunta (3.1) es importante porque nos provee de toda la información necesaria para continuar con el método del simplex.
La primera fila de la tabla correspondiente a la función objetivo la llamaremos "fila cero" y debajo de ésta están las filas de 1 a m. La columna derecha llamada simplemente el "lado derecho" (LD) muestra los valores de las variables básicas, incluyendo aquella de la función objetivo.

A continuación se describe la manera de usar la tabla del simplex. Observando la fila cero y teniendo en cuenta que

$$c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top = (z_{m+1} - c_{m+1} \ \cdots \ z_j - c_j \ \cdots \ z_n - c_n),$$

donde $z_j = c_B^\top B^{-1}a_j$ y (3.2), aplicamos el siguiente test de optimalidad.

• Si $z_j - c_j \leq 0$, para todo $j = m+1, \ldots, n$, la solución factible básica presente es óptima, pudiendo darse el caso de soluciones óptimas múltiples si alguna diferencia $z_j - c_j = 0$.

• Si $z_j - c_j > 0$, para alguna $j = m+1, \ldots, n$ y para la misma j, $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces el valor óptimo del problema no es acotado, es decir, es $-\infty$.

• Si no estamos en ninguno de los casos anteriores, se pasa a otra tabla que proporciona otra solución factible básica que mejora el valor de la función objetivo. Para ello, de acuerdo a lo descrito en el algoritmo del simplex, se selecciona un elemento de la tabla llamado pivote, como se indica a continuación.

Se elige j_0 y i_0 tales que

$$z_{j_0} - c_{j_0} \doteq \max_{m+1 \leq j \leq n} \{z_j - c_j > 0\}.$$

$$\frac{\overline{x}_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{\alpha_{i j_0}} : \alpha_{i j_0} > 0 \right\},$$

donde $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, 0, \ldots, 0)$ es la solución factible básica inicial. El elemento pivote es $\alpha_{i_0 j_0}$.

En virtud de lo anterior, la tabla 3.1 se escribe como:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc|ccccccc|c|}
 & z & x_1 & & x_{i_0} & & x_m & & & x_j & & x_{j_0} & & & LD \\ \hline
z & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & z_j - c_j & \ldots & z_{j_0} - c_{j_0} & \ldots & c_B^\top \overline{x}_B \\ \hline
x_1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1j_0} & \ldots & \overline{x}_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{i_0} & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{i_0 j} & \ldots & \alpha_{i_0 j_0} & \ldots & \overline{x}_{i_0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \alpha_{mj} & \ldots & \alpha_{mj_0} & \ldots & \overline{x}_m \\ \hline
\end{array}$$

La nueva tabla se obtienedividiendo por $\alpha_{i_0 j_0}$ los elementos de la fila pivote i_0, convirtiendo el pivote en 1, y haciendo ceros el resto de los elementos de la columna pivote j_0 incluyendo el elemento de la fila cero. Finalmente, en la tabla se cambia la (variable) componente que era básica x_{i_0} por la no básica (que ahora sería básica) x_{j_0}. Con esto se actualiza la base y se aplica nuevamente el test de optimalidad (ver **2a** del algoritmo del simplex).

Se observa que en la columna LD de la nueva tabla, quitando el elemento de la fila cero, aparecen los valores de la nueva solución factible básica obtenidos en la Parte (a) del Teorema 3.12.

De lo recién expuesto, se concluye que los procedimientos descritos en los Teoremas 3.12 y 3.13 equivalen a la operación de pivotear en la tabla misma.

	z	x_1		x_{i_0}		x_m				x_{j_0}		LD
z	1	0	$\dots$	$\dfrac{c_{j_0} - z_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}$	$\dots$	0	$\dots$	$z_j - c_j - \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}(z_{j_0} - c_{j_0})$	$\dots$	0	$\dots$	$c_B^\top \overline{x}_B - (z_{j_0} - c_{j_0}) \frac{\overline{x}_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}$
x_1	1	1	$\dots$	$\dfrac{-\alpha_{1 j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha_{1j} - \dfrac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}} \alpha_{1 j_0}$	$\dots$	0	$\dots$	$\overline{x}_1 - \dfrac{\alpha_{1 j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} \overline{x}_{i_0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{j_0}	0	0	$\dots$	$\dfrac{1}{\alpha_{i_0 j_0}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\dfrac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\dfrac{\overline{x}_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	0	0	$\dots$	$\dfrac{-\alpha_{m j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\alpha_{mj} - \dfrac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}} \alpha_{m j_0}$	$\dots$	0	$\dots$	$\overline{x}_m - \dfrac{\alpha_{m j_0}}{\alpha_{1 j_0}} \overline{x}_{i_0}$

Ejemplo 3.7.

$$
(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lccccccc}
\min & 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
x_1 & \geq & 0, & x_2 & \geq & 0, & x_3 & \geq \ 0.
\end{array} \right.
$$

El problema está expresado en su forma canónica, para llevarlo a su forma estándar

introducimos tres variables de holgura, una por cada desigualdad que aparece en las restricciones. Así, el problema equivalente en forma estándar es

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\min & 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = 10 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = 4 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = 6 \\
 & x_1 \geq & 0, & x_2 \geq & 0, & x_3 \geq & 0, & x_4 \geq & 0, & x_5 \geq & 0, & x_6 \geq & 0.
\end{array}
$$

Construimos la tabla inicial del simplex manteniendo el orden de aparición de las componentes:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	10
x_5	0	2	1	-1	0	1	0	4
x_6	0	-1	3	1	0	0	1	6

Obviamente el rango de la matriz A es 3. Como solución factible básica inicial elegimos $\bar{x} = (0, 0, 0, 10, 4, 6)$, cuya matriz básica asociada es $B_0 = (a_4 \ a_5 \ a_6)$ que es la matriz identidad de orden 3 y, por lo tanto, la matriz no básica es $N_0 = (a_1 \ a_2 \ a_3)$, de modo que $A = (N_0 \ B_0)$. Se verifica, $(\bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) = \bar{x}_{B_0} = B_0^{-1}b = (10, 4, 6)$, donde $b = (10, 4, 6)$ y el valor de la función objetivo en esta solución es 0, el cual corresponde al primer elemento de la columna del lado derecho, LD. También se observa de la tabla que

$$c_{B_0}^\top B_0^{-1} N_0 - c_{N_0}^\top = \begin{pmatrix} z_1 - c_1 & z_2 - c_2 & z_3 - c_3 \end{pmatrix} = (-2 \ \ -1 \ 3).$$

De aquí se obtiene que

$$3 = z_3 - c_3 = \max_{1 \leq j \leq 3} \{z_j - c_j > 0\},$$

luego la componente x_3 se convierte en básica para la nueva solución factible por determinar. Para ver cuál es la componente que deja de ser básica, calculamos el siguiente cuociente:

$$\frac{\bar{x}_6}{\alpha_{63}} = \min_{4 \leq i \leq 6} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{\alpha_{i3}} \;:\; \alpha_{i3} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_4}{\alpha_{43}}, \frac{\bar{x}_6}{\alpha_{63}} \right\} = \min\left\{ \frac{10}{1}, \frac{6}{1} \right\} = 6.$$

Luego, x_6 sale de la base, obteniendo como elemento pivote $\alpha_{63} = 1$. Para construir la nueva tabla debemos convertir en ceros todos los elementos de la columna correspondiente a x_3 (incluyendo aquel de la fila cero). Realizando tales operaciones y actualizando las componentes básicas resulta:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	1	-10	0	0	0	-3	-18
x_4	0	2	-2	0	1	0	-1	4
x_5	0	1	4	0	0	1	1	10
x_3	0	-1	3	1	0	0	1	6

En esta segunda iteración, la solución factible básica es $\bar{x} = (0, 0, 6, 4, 10, 0)$ asociada a la matriz básica $B_1 = (a_4 \; a_5 \; a_3)$. Esta vez el valor de la función objetivo es -18. Aplicando nuevamente el test de optimalidad, vemos que existe una sola diferencia, $z_j - c_j$, que es positiva. Luego $j_0 = 1$, es decir, x_1 entrará a formar parte de las componentes básicas en la próxima solución a determinar. Ahora se calcula el siguiente cuociente:

$$\frac{\bar{x}_4}{\alpha_{41}} = \min_{3 \leq i \leq 5} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{\alpha_{i1}} \;:\; \alpha_{i1} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_4}{\alpha_{41}}, \frac{\bar{x}_5}{\alpha_{51}} \right\} = \min\left\{ \frac{4}{2}, \frac{10}{1} \right\} = 2.$$

Luego, x_4 sale de la base. Ahora el elemento pivote es $\alpha_{41} = 2$. Como antes, a continuación debemos convertir en ceros todos los elementos de la columna correspondiente a x_1 (incluyendo aquel de la fila cero). Obtenemos finalmente,

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	-9	0	$-1/2$	0	$-5/2$	-20
x_1	0	1	-1	0	$1/2$	0	$-1/2$	2
x_5	0	0	5	0	$-1/2$	1	$3/2$	8
x_3	0	0	2	1	$1/2$	0	$1/2$	8

Aquí observamos que $z_j - c_j < 0$, para todo índice no básico $j = 2, 4, 6$, luego estamos en presencia de la única solución factible básica óptima $\bar{x} = (2, 0, 8, 0, 8, 0)$ del problema expresado en su forma canónica. En consecuencia, la única solución óptima del problema (P) (cuyas variables legítimas son x_1, x_2 y x_3) es $\bar{x} = (2, 0, 8)$ y el valor óptimo de la función objetivo es -20.

Ejemplo 3.8. Considerando los datos del Ejemplo 3.6 y el hecho que $x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$, se concluye que la tabla óptima del problema es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	$-20/3$	0	$-5/3$	-5	-35000
x_4	0	0	0	-1	1	-1	1	1000
x_1	0	1	0	$-4/3$	0	$2/3$	-1	2000
x_2	0	0	1	$5/3$	0	$-1/3$	1	1000

Ejemplo 3.9. Resolver el problema siguiente usando la tabla del simplex:

$$(P)\qquad \begin{cases} \min & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.a.} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ & -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Luego, determinar una solución factible donde el valor de la función objetivo no sea superior a -5000.
Solución.
Para llevar el problema a su forma estándar se introducen tres variables inactivas (de holgura), una por cada desigualdad que aparece en las restricciones. Así, el problema equivalente en forma estándar es:

$$\begin{array}{llllllllllllllll} \min & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & = 8 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & & & + & x_6 & & & = 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & = 3 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i & = & 1 & \ldots & 7 \end{array}$$

Aquí,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego elegimos como matriz básica inicial $B_0 = (a_5\ a_6\ a_7)$, y así la tabla del simplex inicial es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-3	2	-1	1	0	0	0	0
x_5	0	2	-3	-1	1	1	0	0	8
x_6	0	-1	2	2	-3	0	1	0	10
x_7	0	-1	1	-4	1	0	0	1	3

Ejecutando los pasos del algoritmo del simplex en la tabla, se observa que la variable que entra es x_2 y la que sale es x_7. Pivoteando, se obtiene la tabla siguiente

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-1	0	7	-1	0	0	-2	-6
x_5	0	-1	0	-13	4	1	0	3	17
x_6	0	1	0	10	-5	0	1	-2	4
x_2	0	-1	1	-4	1	0	0	1	3

Evidentemente, ahora la variable que entra es x_3 y la que sale es x_6. Al ejecutar el pivoteo resulta:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	$-17/10$	0	0	$5/2$	0	$-7/10$	$-3/5$	$-44/5$
x_5	0	$3/10$	0	0	$-5/2$	1	$-13/10$	$2/5$	$111/5$
x_3	0	$1/10$	0	1	$-1/2$	0	$1/10$	$-1/5$	$2/5$
x_2	0	$-6/10$	1	0	-1	0	$2/5$	$1/5$	$23/5$

Aplicando la parte (b) del Teorema 3.13 concluimos que $\min(P) = -\infty$. Más precisamente, la función objetivo decrece indefinidamente a lo largo de la semirecta

$$\left\{ \left(0, \frac{23}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{111}{5}, 0, 0\right) + t\left(0, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, 0\right) \;:\; t > 0 \right\}.$$

La cual da origen, en las variables originales, a la semirecta

$$\left\{ \left(0, \frac{23}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) + t\left(0, 1, \frac{1}{2}, 1\right) \;:\; t > 0 \right\}.$$

Poniendo $y_t = (0, 23/5, 2/5, 0) + t(0, 1, 1/2, 1)$, se tiene y_t satisface las restricciones del problema (P), para todo $t > 0$.
Para responder la segunda pregunta se debe determinar el valor de t tal que $c^\top y_t \leq -5000$. Calculando se obtiene

$$c^\top y_t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y_t = -\frac{44}{5} - \frac{5}{2}t.$$

Luego es suficiente que t satisfaga $t \geq 49912/25 = 1996{,}48$. Eligiendo $t = 2000$ una solución factible que cumple con las condiciones impuestas sería

$$\left(0, \frac{10023}{5}, \frac{5002}{5}, 2000\right).$$

Ejemplo 3.10. (Restricciones redundantes, soluciones degeneradas)

$$\begin{array}{lcccccc} \min & -3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 0, & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Aunque este problema se puede resolver a través del método geométrico descrito en el Capítulo 1, se usará el simplex con el objeto de analizar su funcionamiento (ver Figura 3.1).

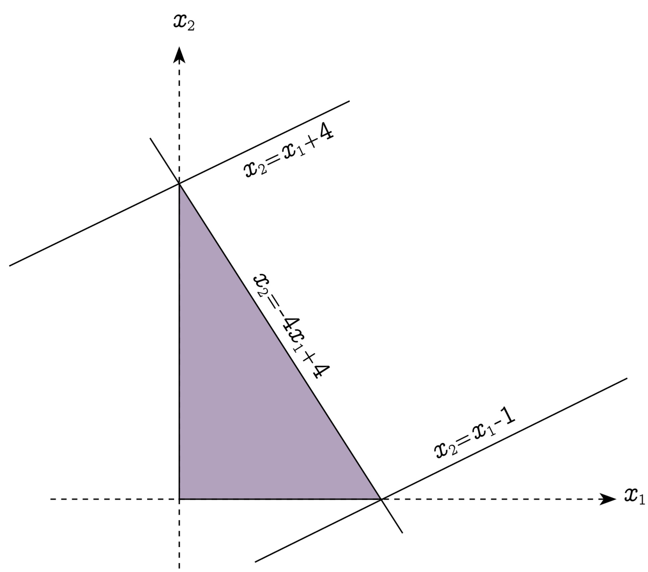


FIGURA 3.1. Conjunto factible, Ejemplo 3.10

Introducimos tres variables de holgura, una por cada desigualdad que aparece en las restricciones. Así, el problema equivalente en forma estándar es

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & -3x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & = 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & = 4 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & = 4 \\
 & x_1 \geq & 0, & x_2 \geq & 0, & x_3 \geq & 0, & x_4 \geq & 0, & x_5 \geq & & 0.
\end{array}$$

Aquí,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego elegimos como matriz básica inicial $B_0 = (a_3\ a_4\ a_5)$, y así la tabla del simplex inicial es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	3	-1	0	0	0	0
x_3	0	1	-1	1	0	0	1
x_4	0	-1	1	0	1	0	4
x_5	0	4	1	0	0	1	4

La cual da lugar a la solución factible básica $\overline{x} = (0, 0, 1, 4, 4)$. Ejecutando los pasos del algoritmo del simplex en la tabla, se observa que la variable que entra es x_1, sin embargo, tenemos dos posibilidades para elegir la variable que sale: x_3 o x_5.

Caso 1: sale x_3.
Pivoteando, se obtiene la tabla siguiente

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	2	-3	0	0	-3
x_1	0	1	-1	1	0	0	1
x_4	0	0	0	1	1	0	5
x_5	0	0	5	-4	0	1	0

De aquí se origina la solución básica factible $\overline{x} = (1, 0, 0, 5, 0)$. Ahora, la variable que entra es x_2 y la que sale es x_5. Al ejecutar el pivoteo resulta:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	$-7/5$	0	$-2/5$	-3
x_1	0	1	0	$1/5$	0	$1/5$	1
x_4	0	0	0	1	1	0	5
x_2	0	0	1	$-4/5$	0	$1/5$	0

De donde se observa que mantenemos la misma solución factible básica $\overline{x} = (1, 0, 0, 5, 0)$, pero representada con una matriz (básica) diferente a la anterior. Ahora, como $z_j - c_j \leq 0$, para todo índice no básico j $(j = 3, 5)$ resulta que tal $\overline{x}$ es solución óptima.
Conclusión. Es posible que mediante el método simplex se detecte una solución (degenerada), a posteriori óptima, sin satisfacer la condición de optimalidad $z_j - c_j \leq 0$, para todo j no básico en una primera instancia. Sin embargo, continuando con el simplex, éste en alguna instancia posterior nos da una representación básica para la cual se verifique dicha condición de optimalidad. Esto se expresa formalmente en el Teorema 3.15.

Caso 2: sale x_5.
Aquí resulta,

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	3	-1	0	0	0	0
x_3	0	1	-1	1	0	0	1
x_4	0	-1	1	0	1	0	4
x_5	0	1	$1/4$	0	0	$1/4$	1

Considerando que x_1 entra, después de pivotear se obtiene

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	$-7/4$	0	0	$-3/4$	-3
x_3	0	0	$-5/4$	1	0	$-1/4$	0
x_4	0	0	$5/4$	0	1	$1/4$	5
x_1	0	1	$1/4$	0	0	$1/4$	1

De donde obtenemos immediatamente la solución básica óptima $\overline{x} = (1, 0, 0, 5, 0)$. Es decir, con esta elección alcanzamos el óptimo en una sola iteración.

En general, cuando estamos frente a soluciones básicas degeneradas, el punto extremal correspondiente resulta ser la intersección de demasiados hiperplanos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, aparecen soluciones degeneradas cuando tales puntos extremales son la intersección de tres o más rectas; en $\mathbb{R}^3$, cuando éstos son la intersección de cuatro o más planos, y así sucesivamente.

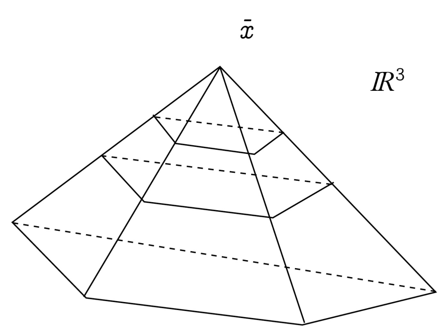


FIGURA 3.2. Solución básica degenerada

3.4 El Método del Simplex y Formación de Ciclos

Si durante el curso de ejecución del método simplex no aparece ninguna solución básica degenerada, entonces, el valor de la función objetivo disminuye efectivamente yendo de una solución básica a otra solución básica adyacente o, si uno desea, de un punto extremal a otro punto extremal adyacente. Como el número de tales puntos es finito, el método del simplex termina: encontrando una solución óptima o afirmando que $\min(P) = -\infty$: en este último caso se encuentra un rayo a lo largo del cual la función objetivo decrece indefinidamente.

En cambio, si se encuentra una solución degenerada, cuya componente básica es nula y es la que va a salir, entonces, el valor de la función objetivo no cambia en virtud del Teorema 3.12. Por lo que es posible que después de varias iteraciones del método simplex, pueda aparecer una solución básica ya encontrada. En tal caso se dice que el método produce *ciclos* y nunca terminará de ejecutarse.

La formación de ciclos se produce sólo en presencia de soluciones degeneradas, pero muchos ejemplos con soluciones degeneradas no presentan ciclos, tal como lo ilustra el Ejemplo 3.10.

Es muy difícil construir ejemplos que muestren existencia de ciclos y es muy raro que ocurra en la práctica, principalmente debido a los errores de redondeo. Sin embargo, Kotiah y Steinberg descubrieron un problema de programación lineal que surge en modelos de colas que produce ciclos. Por otro lado, también Beale construyó el ejemplo siguiente que presenta ciclos después de pocas iteraciones.

Ejemplo 3.11. (Soluciones degeneradas y formación de ciclos)

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & -10x_1 & + & 57x_2 & + & 9x_3 & + & 24x_4 & & \\
\text{s.a.} & 1/2x_1 & - & 11/2x_2 & - & 5/2x_3 & + & 9x_4 & + & x_5 = 0 \\
 & 1/2x_1 & - & 3/2x_2 & - & 1/2x_3 & + & x_4 & + & x_6 = 0 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_7 = 1 \\
 & x_1 \geq & 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0, & x_6 \geq 0, & x_7 \geq 0. &
\end{array}$$

Aquí,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -11/2 & -5/2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego, elegimos como matriz básica inicial $B_0 = (a_5\ a_6\ a_7)$ y, así, la tabla del simplex inicial es la Tabla 3.2.

Repetimos el procedimiento dando lugar a la siguiente sucesión de tablas de simplex, donde ya quitamos la columna correspondiente a z.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	0	$1/2$	$-11/2$	$-5/2$	9	1	0	0	0
x_6	0	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	53	41	-204	-20	0	0	0
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
x_6	0	4	2	-8	-1	1	0	0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	1

Tabla 3.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	$29/2$	-98	$-27/4$	$-53/4$	0	0
x_1	1	0	$1/2$	-4	$-3/4$	$11/4$	0	0
x_2	0	1	$1/2$	-2	$-1/4$	$1/4$	0	0
x_7	0	0	$-1/2$	4	$3/4$	$-11/4$	1	1

Tabla 3.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	-29	0	0	18	15	-93	0	0
x_3	2	0	1	-8	$-3/2$	$11/2$	0	0
x_2	-1	1	0	2	$1/2$	$-5/2$	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.5

Se observa que la última tabla (Tabla 3.8) coincide con la primera y, por lo tanto, las iteraciones se repiten, si no introducimos cambios en la elección del pivote.

En la práctica, tal como se dijo al inicio de esta sección, es difícil que se formen ciclos debido a errores de redondeo, por lo que simplemente optamos por suponer que no van a existir ciclos. Pero también existe la opción de usar la regla de Bland, que permite elegir las variable que entra y aquella que sale, sin que ocurra ciclos.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	-20	-9	0	0	$21/2$	$-141/2$	0	0
x_3	-2	4	1	0	$1/2$	$-9/2$	0	0
x_4	$-1/2$	$1/2$	0	1	$1/4$	$-5/4$	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	22	-93	-21	0	0	24	0	0
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	$1/2$	$-11/2$	$-5/2$	9	1	0	0	0
x_6	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.8

La regla de Bland

1. **Elección de la columna pivote**. Se elige la columna con el subíndice mayor entre aquellas columnas con elementos positivos en la "fila cero" o "fila costo", en lugar de elegir la columna con el elemento positivo más grande.
2. **Elección de la fila pivote**. Si existen dos o más filas donde se alcance el mínimo de los cuocientes entre los elementos del lado derecho y los elementos positivos de la columna elegida en **1**, se elige aquella fila con subíndice mayor en lugar de elegirlo arbitrariamente.

Ejemplo 3.12. En referencia al ejemplo anterior, y aplicando la regla de Bland, se observa que la variante se produce justo en la primera Tabla 3.2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	$1/2$	$-11/2$	$-5/2$	9	1	0	0	0
x_6	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.9

Pivoteando, resultan la dos tablas siguientes:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	-27	1	-44	0	-20	0	0
x_5	0	-4	-2	8	1	-1	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0
x_7	0	3	1	-2	0	-2	1	1

Tabla 3.10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	-30	0	-42	0	-18	-1	-1
x_5	0	2	0	4	1	-5	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1

Tabla 3.11

Se observa que llegamos a la tabla optimal evitando encontrar ciclos.

En virtud de la regla de Bland, aunque no lo hemos demostrado rigurosamente, podemos inferir el teorema siguiente.

Teorema 3.15. (*aun en presencia de degeneración*) *Si existe una solución óptima que es un punto extremal - para un problema de minimización lineal - entonces existe una base asociada para el cual se cumple*

$$z_j - c_j \leq 0, \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots, n.$$

El Ejemplo 3.10 (caso 1) muestra una situación donde se tiene una solución básica óptima tal que $z_j - c_j > 0$, para algun índice j no básico, pero continuando con el método simplex se puede llegar a una base para la cual se tenga $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Terminamos este capítulo complementando la discusión iniciada en la Observación 3.4. Sea A una matriz de orden $m \times n$, $b \in I\!R^m$, $c \in I\!R^n$. Si el problema está escrito en la forma

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0, \end{cases}$$

se introducen las variables de holgura $x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$, una por cada restricción, obteniéndose la formulación estándar:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & c^\top x + 0^\top x_h & \\ \text{sujeto a :} & Ax + Ix_h & = b \\ & x \geq 0, x_h \geq 0. & \end{array} \right.$$

Aquí, $x_h = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ e I es la matriz identidad de orden m. De modo que si $b \geq 0$ estamos listos para ejecutar el método Simplex, eligiendo como base inicial $B_1 = I$, la identidad de orden m, la cual da origen a la solución básica factible $x_{B_1} = b(\geq 0)$, $x_{N_1} = 0$, con $N_1 = A$. En cualquier otro caso se puede suponer siempre que el problema tiene la forma (después de manipular las restricciones adecuadamente):

$$(P_2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

con $b \geq 0$. En tal situación, si (P_2) no contiene una submatriz identidad de orden m, se introducen m variables "*artificiales*", una por cada restricción de igualdad, denotadas por $x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$. De este modo, se considera el problema

$$(P_a) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & \mathbf{1}^\top x_a & \\ \text{sujeto a :} & Ax + Ix_a & = b \\ & x \geq 0, x_a \geq 0, & \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector columna en $\mathbb{R}^m$ con todas sus componentes iguales a 1 y $x_a = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$. Aquí, también la matriz básica inicial es $B_1 = I$ la identidad de orden m, la que origina la solución básica factible $x_{B_1} = b$, $x_{N_1} = 0$, con $N_1 = A$, y, por lo tanto, el simplex ya puede aplicarse al problema (P_a). Para evitar casos de degeneración, supongamos $b_i > 0$, para $i = 1, \ldots, m$. Sea $(\overline{x}, \overline{x}_a)$ la solución encontrada por el simplex aplicado al problema (P_a).

Caso 1: $\overline{x}_a = 0$.

En este caso se obtiene $A\overline{x} = b$, $\overline{x} \geq 0$, es decir, ya contamos con una solución básica factible para el problema (P_2) y continuamos aplicando el simplex.

Caso 2: $\overline{x}_a \neq 0$.

En esta situación el problema (P_2) no tiene solución factible, pues si x_0 es tal que $Ax_0 = b$, $x_0 \geq 0$, el vector $(x_0, 0)$ sería una solución factible para (P_a). Pero $\mathbf{1}^\top 0 = 0 < \mathbf{1}^\top \overline{x}_a$, lo que no puede suceder.

Ejercicio 3.2. Aplicar el método anterior al problema

$$\begin{array}{lccccccccc} \min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{s.a.} & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 12 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 13 \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, & & x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

(Sugerencia: la x_4 puede ser considerada como "artificial".)

Notas adicionales

Existe abundante literatura sobre la historia del simplex y de su creador George B. Dantzig, parte de ella se puede encontrar en [**BJS, BChD, DT, F, KB, S**]. El método simplex es para la optimización lineal, lo que el método de eliminación de Gauss es para el álgebra lineal.

El lector, usando cualquier buscador en internet, encontrará muchas páginas dedicadas a la optimización lineal y al método simplex. Por ejemplo: una historia sobre los personajes que tuvieron influencia en el desarrollo de la Optimización Lineal se puede encontrar en:
www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2003/programacion/
También se recomienda:
www.programacionlineal.net/
Una herramienta online que permite resolver problemas de optimización lineal es el PHPSimplex, cuyo uso es libre y gratuito:
www.phpsimplex.com/
www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm

3.5 Problemas

1. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y diga si los vectores siguientes son soluciones básicas, en tal caso determinar la matriz básica respectiva:

$$(1, 0, -1, 1, 0), \; (0, 2, -5, 0, -1), \; (0, 0, 1, , 0, 1).$$

2. Considere el problema de la mochila:

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +5x_5 & +x_6 & & \\ \text{sujeto a :} & 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +x_4 & +4x_5 & +4x_6 & \leq & 63 \\ & x_1 \geq 0, & \dots & , & x_6 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Encuentre todas las soluciones básicas asociadas al problema y encuentre la solución óptima, aplicando el Teorema 3.7. Compare con la solución encontrada en el Ejemplo 1.6.

3. Iniciando con la solución factible básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (20/7, 6/7, 0, 0)$, resolver el problema siguiente por el método simplex sin el formato tabla.

$$\begin{array}{ll} \min(2x_1 + x_2) & \\ \text{s.a. } 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = 12 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3, 4. & \end{array}$$

4. Resolver el mismo problema anterior pero usando la tabla del simplex, escribiendo las tablas en cada iteración. Identifique la inversa de la matriz básica en la tabla para cada iteración.
5. Resolver el problema siguiente por el método simplex:

$$
\begin{array}{rl}
\max(-x_1 + 3x_2 - 2x_3) & \\
\text{s.a. } 3x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 7 \\
-2x_1 + 4x_2 & \leq 12 \\
4x_1 + 3x_2 + 8x_3 & \leq 10 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. &
\end{array}
$$

6. Resolver mediante el simplex el problema de producción de la Sección 1.2. (Respuesta: el restaurante, con el fin de obtener la mayor ganancia, debe producir 1000 empanadas y nada de hamburgesas, optando por comprar 21 kg de carne adicional. La ganancia es \$ 87960).
7. Resolver el problema de transporte descrito en la Sección 1.2, usando el método simplex.
8. Después de formular matemáticamente los problemas propuestos del 2 al 7 del Capítulo 1, resolverlos, usando el simplex.
9. Usar la regla de Bland si es necesario para romper cualquier ciclo en los problemas siguientes (debido a K.T.Marshall y J.W.Suurballe):

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\min & -x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 = 1 \\
& 1/2x_1 & - & 11/2x_2 & - & 5/2x_3 & + & 9x_4 & + & x_6 = 0 \\
& 1/2x_1 & - & 3/2x_2 & - & 1/2x_3 & + & x_4 & + & x_7 = 0 \\
& x_1 \geq & 0, & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, & & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0, & x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\min & -2/5x_1 & - & 2/5x_2 & + & 9/5x_3 & & & \\
\text{s.a.} & 3/5x_1 & - & 32/5x_2 & + & 24/5x_3 & + & x_4 & = 0 \\
& 1/5x_1 & - & 9/5x_2 & + & 3/5x_3 & + & x_5 & = 0 \\
& 2/5x_1 & - & 8/5x_2 & + & 1/5x_3 & + & x_6 & = 0 \\
& & & x_2 & & & + & x_7 & = 1 \\
& x_1 \geq & 0, & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, & & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0.
\end{array}
$$

10. Usar el método descrito al final del capítulo para resolver el primer problema de la dieta, presentado en la Sección 1.2.

Capítulo 4: Dualidad y Condiciones de Optimalidad

La teoría de dualidad en optimización lineal estudia las posibles relaciones simétricas entre un problema de optimización lineal dado, el cual se llama "primal" y otro problema de optimización lineal asociado a él, llamado problema "dual". A través de este problema, obtenemos información valiosa acerca de las soluciones óptimas del primal. Como motivación para la consideración del dual, se presentarán tres ejemplos clásicos junto con su interpretación económica. En este capítulo también se incluye el lema de Farkas y las condiciones de optimalidad de Karush, Kuhn y Tucker. Finalmente, se dará una interpretación económica del problema dual como contraparte del primal en un contexto más general.

4.1 Motivación del Problema Dual

Dado un problema primal, a continuación veremos alguna interpretación que se puede asociar a un problema que resulta ser la contraparte del problema primal. Lo llamaremos "problema dual". En realidad, tal problema dual puede tener varias interpretaciones económicas, las que dependen del punto de vista y del contexto que se quiera dar. Se elegirán tres problemas clásicos como ejemplos de interpretación.

El problema de transporte.

Recordamos el problema de transporte del Capítulo 1.

Una empresa productora de zapatos tiene tres plantas situadas en Santiago, Concepción y Valdivia, con una demanda de 400, 300 y 200 cientos de kilogramos de cuero especial, respectivamente. Tal material se provee desde Talca y Temuco donde se disponen de 550 y 350 cientos de kilogramos, respectivamente. Los costos de transporte, en miles de pesos por cientos de kilogramos, están reflejados en la tabla siguiente:

	Santiago	Concepción	Valdivia
Talca	3	5	6
Temuco	4	3	5

Tabla 4.1

A la productora de calzado le interesa determinar la cantidad del material que debe adquirirse en cada uno de los dos lugares, para ser trasladados a las diferentes plantas, de manera que el costo de transporte del material incurrido sea el menor posible. La formulación desde este punto de vista se presentó en la Sección 1.3.

Ahora veamos la contraparte de este problema. Supongamos que la empresa productora desea contratar los servicios de una agencia que le abastezca del material para la confección de los zapatos. Dicha agencia, a la luz de los datos del problema y tratando de convencer a la empresa que el costo de sus servicios son más que justos (competitivos), le plantea el razonamiento siguiente:

Si π_i representa el precio-costo del material que la agencia compra en el lugar i ($i = 1, 2$) y η_j es el precio de reventa a la empresa para la planta j ($j = 1, 2, 3$) del mismo material, la diferencia de ellos, es decir, lo que gane por la reventa, no debe superar el costo c_{ij} de transporte del material del lugar i a la planta j. Matemáticamente lo último queda expresado como

$$\eta_j - \pi_i \leq c_{ij}, \; i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Así, la agencia desea encontrar los precios que cobraría a la empresa de tal manera que su beneficio sea el máximo. Luego, el problema de optimización lineal formulado por dicha agencia es

$$(D_t)\quad \left\{ \begin{array}{lccccccccccc}
\max & 400\eta_1 & + & 300\eta_2 & + & 200\eta_3 & - & 550\pi_1 & - & 350\pi_2 \\
\text{sujeto a :} & \eta_1 & - & \pi_1 \leq 3 \\
 & \eta_2 & - & \pi_1 \leq 5 \\
 & \eta_3 & - & \pi_1 \leq 6 \\
 & \eta_1 & - & \pi_2 \leq 4 \\
 & \eta_2 & - & \pi_2 \leq 3 \\
 & \eta_3 & - & \pi_2 \leq 5 \\
 & \eta_1 \geq & 0, & \eta_2 \geq 0, & \eta_3 & \geq 0, & \pi_1 & \geq 0, & \pi_2 & \geq 0.
\end{array} \right.$$

El problema de la dieta.

Este problema responde a la interrogante de saber cuál es la dieta diaria nutricionalmente adecuada, cuyo costo sea mínimo. La formulación general de este problema se puede encontrar en el Capítulo 1. Consideramos ahora una situación muy particular. Supongamos por simplicidad que tenemos 2 alimentos y que una dieta diaria consiste en un vector de 2 componentes x_1, x_2, donde x_j corresponde a la cantidad, en gramos, del alimento j.

Sea 22 el costo (en pesos) por un gramo del alimento 1 y 26 el costo (en pesos) por un gramo del alimento 2; luego, el costo total de la dieta es

$$22x_1 + 26x_2,$$

el cual deseamos minimizar.

Ahora veamos las restricciones dadas por los elementos nutrientes de cada alimento. Se considerarán sólo tres nutrientes: grasa, carbohidratos y proteína. Cada uno de éstos están identificados por $i = 1, 2, 3$. Se sabe que a_{ij} (en la formulación general del Capítulo 1) es el número de unidades del nutriente i presente en un gramo del alimento j. Para este ejemplo, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = 3$. Por lo tanto, $a_{ij}x_j$ es el número de unidades del nutriente i en la componente x_j (alimento j) de la dieta. Luego, considerando la dieta completa, se tendrá que la cantidad total de grasa, carbohidratos y de proteína presentes en la dieta es, respectivamente, $2x_1 + 3x_2$, $x_1 + 3x_2$ y $4x_1 + 3x_2$. Por otro lado, se acepta que el ser humano requiere diariamente las cantidades siguientes de grasa, carbohidratos y proteínas: 18, 12 y 24. Por lo tanto, la formulación del problema de la dieta es:

$$
(P_d) \qquad \left\{ \begin{array}{lccccc}
\min & 22x_1 & + & 26x_2 & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 18 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 12 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 24 \\
 & x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0. &
\end{array} \right.
$$

Para formular la contraparte del problema primal (P_d), se introduce un cocinero que es capaz de preparar tres comidas ficticias CF_1, CF_2 y CF_3, con la propiedad que 1 gr. de CF_i contiene 1 unidad del nutriente i, $(i = 1, 2, 3)$. Sean y_i el precio que el cocinero desea colocar a la comida ficticia CF_i $(i = 1, 2, 3)$. Tales precios deben satisfacer:

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 22$$

$$3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 26.$$

Es decir, los precios para las comidas ficticias deben ser tales que al considerar éstas en las cantidades necesarias para entregar la misma nutrición que los alimentos 1 y 2; el costo del substituto (ficticio) para el alimento 1 no sea mayor que el costo de dicho alimento, el cual es 22; y el costo del substituto para el alimento 2 no sea mayor que el costo del mismo alimento, que es 26. Así, estos precios serán muy razonables para el nutricionista que decidirá adquirirlos. Por otro lado, como se requiere 18 unidades de grasa (de CF_1), 12 unidades de carbohidratos (de CF_2) y 24 unidades de proteína (de CF_3), la ganancia del cocinero es:

$$18y_1 + 12y_2 + 24y_3,$$

la cual desea maximizar.
Por lo tanto, el problema propuesto por el cocinero es:

$$
(D_d) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccccccc}
\max & 18y_1 & + & 12y_2 & + & 24y_3 & & \\
\text{s.a.} & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \leq & 22 \\
 & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & \leq & 26 \\
y_1 & \geq 0, & y_2 & \geq 0, & y_3 & \geq 0. & &
\end{array} \right.
$$

En consecuencia, los precios ficticios de los nutrientes y_1, y_2 e y_3 son aquellos precios que el cocinero debe colocar a su comida ficticia para maximizar su ganancia, manteniendo los precios competitivos con los alimentos 1 y 2. Por eso, estos precios ficticios representan "*precios competitivos*" o "*precios marginales*".

El problema de la mochila modificado.

Existe un explorador A el cual, considerando sólo el peso de los objetos a elegir (por ejemplo, el volumen no se tiene en cuenta, digamos que la mochila es elástica pero no es infinitamente resistente), el problema consiste en determinar la cantidad de n objetos o productos que se deben transportar dentro de una "mochila", con el objetivo de obtener la mayor ganancia posible. La ganancia por llevar un kilogramo del producto i es c_i $(i = 1, \dots, n)$ miles de pesos. Se sabe que una unidad del producto i pesa a_i kgs y lo más que puede transportar la mochila es b kgs. Se asume que cada producto puede dividirse.

Si x_i representa la cantidad de kgs del producto i que debe llevarse en la mochila, la formulación del problema es:

$$(P_m) \qquad \left\{ \begin{array}{lccccccc} \text{max} & c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\ \text{sujeto a :} & a_1x_1 & + & \cdots & + & a_nx_n & \leq & b \\ & x_1 \geq 0, & & \dots & , & x_n \geq 0, & & \end{array} \right.$$

Veamos la contraparte del problema. Supongamos que existe otro explorador B quien desea alquilar la mochila de A para que transporte los mismos n tipos de objetos. El explorador A está interesado en alquilar su mochila a un precio razonable y por determinar, el cual debe compensar la pérdida por dejar de llevar sus propios objetos. A plantea el razonamiento siguiente: por cada kg. menos que traslado del objeto j pierdo c_j miles de pesos, pero tendría una disponibilidad de a_j kgs para llevar los de B. Por esto percibiría a_jy miles de pesos, cantidad que al menos debe cubrir lo que estaría perdiendo al dejar de llevar un kg, es decir, c_j. Desde el punto de vista del explorador B, éste tendría que minimizar el producto by que se obtendría al ocupar toda la capacidad de la mochila.

Por lo tanto, el precio por el alquiler de la mochila, que debe cobrar el explorador A, satisface:

$$(D_m) \qquad \left\{ \begin{array}{lccc} \text{min} & by & & \\ \text{sujeto a :} & a_1y & \geq & c_1 \\ & a_2y & \geq & c_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_ny & \geq & c_n \\ & y & \geq & 0. \end{array} \right.$$

En cualquiera de los tres problemas expuestos se observa que las variables duales, es decir, las variables de los problemas duales tienen relación con precios, razón por la cual, reciben el nombre de "*precios sombra*" o "*precios marginales*". Para una interpretación del problema dual, en un contexto más general, referimos a la Sección 4.5.

4.2 Dualidad

Tal como se mencionó al inicio del capítulo, el dual de un problema de optimización lineal es otro problema de optimización lineal, el cual se obtiene a partir del primero y cuya resolución permite obtener información valiosa del problema primal. La palabra "primal" fue sugerida por el padre de George B. Dantzig, Tobias Dantzig (quien también fue matemático), como el antónimo a dual, con el objeto de substituir la frase "el problema original cuyo dual es".

Considerando que las formulaciones de los problemas de la sección anterior fueron en su forma canónica, se empezará por definir el problema dual asociado a un problema primal en su forma canónica. Más adelante se verá que esto no es restrictivo. En otras palabras, no será necesario introducir definiciones de problema dual de acuerdo a la forma expresada del primal: bastará con dar una sola y para un problema formulado en cualquiera de sus formas.

Definición 4.1. Dado el problema primal de optimización lineal en su forma canónica:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} \min & c^\top x & & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0, \end{array} \right.$$

se define como el *problema dual* a (P), al problema lineal siguiente:

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} \max & b^\top y & & \\ \text{sujeto a :} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0, \end{array} \right.$$

donde, como antes, A es una matriz de orden $m \times n$, $c \in I\!\!R^n$, $b \in I\!\!R^m$, $x \in I\!\!R^n$ e $y \in I\!\!R^m$, y $A^\top$ es la transpuesta de A. Recordamos que los elementos de $I\!\!R^n$ o $I\!\!R^m$ son considerados vectores columnas en tales espacios.

Ejemplo 4.1. Considerar los problemas de transporte y de la dieta de la sección anterior. Deducir a partir de la Definición 4.1 que efectivamente el problema dual asociado al problema de transporte es (D_t) y que el problema (D_d) es el dual al problema (P_d).

Ejemplo 4.2. Si el problema primal es:

$$\begin{array}{ccccccccc} \min & 8x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & + & x_2 & & & \geq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq 0, & & \end{array}$$

entonces, el problema dual resulta

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & y_1 & + & y_2 & & \\
\text{s.a.} & 2y_1 & + & y_2 & \leq & 8 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 7 \\
 & & & y_2 & \leq & 3 \\
y_1 & \geq 0, & y_2 & \geq 0, & &
\end{array}$$

Observamos que, mientras el problema primal tiene alguna dificultad para ser resuelto geométricamente, debido a que el conjunto factible es un subconjunto de $I\!R^3$, el problema dual, cuyas variables son bidimensionales, se puede resolver gráficamente, tal como se describió en el Capítulo 1. Veremos más adelante que las soluciones del dual conducen a soluciones del primal.

Proposición 4.2. *El problema dual del dual considerado en la Definición 4.1 es el problema primal.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\max b^\top y = -\min -b^\top y$, se observa que el problema dual se puede escribir de modo equivalente como

$$\begin{array}{lrl}
-\min & -b^\top y & \\
\text{sujeto a :} & -A^\top y & \geq -c \\
 & y & \geq 0,
\end{array}$$

Por lo tanto, el dual de acuerdo a la definición anterior es

$$\begin{array}{lrl}
-\max & -c^\top x & \\
\text{sujeto a :} & -Ax & \leq -b \\
 & x & \geq 0,
\end{array}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{lrl}
\min & c^\top x & \\
\text{sujeto a :} & Ax & \geq b \\
 & x & \geq 0,
\end{array}$$

lo que corresponde al problema primal. □

La proposición siguiente muestra que la Definición 4.1 también sirve para obtener el problema dual de uno primal, escrito en su forma estándar.

Proposición 4.3. *Dado el problema primal en su forma estándar:*

$$(P_e) \qquad \left\{ \begin{array}{lrl}
\min & c^\top x & \\
\text{sujeto a :} & Ax & = b \\
 & x & \geq 0,
\end{array} \right.$$

el problema dual asociado a (P_e) se expresa como:

$$(D_e) \qquad \left\{ \begin{array}{lrl}
\max & b^\top y & \\
\text{sujeto a :} & A^\top y & \leq c \\
 & y & \text{sin restricción}
\end{array} \right.$$

y el dual de (D_e) es el primal (P_e).

Demostración. Como

$$Ax = b \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} Ax & \geq & b \\ -Ax & \geq & -b, \end{array} \right.$$

el problema (P_e) se puede escribir de modo equivalente como

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0, \end{array}$$

luego, usando la Definición 4.1, se concluye que el problema dual es:

$$\begin{array}{lll} \max & b^\top w_1 - b^\top w_2 & \\ \text{sujeto a :} & (A^\top \ \ -A^\top) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} & \leq c \\ & w_1 \geq 0, & w_2 \geq 0 \end{array}$$

Poniendo $y = w_1 - w_2$, se obtiene lo deseado.
Veamos que el dual de (D_e) es (P_e). Se observa que el problema (D_e) se puede escribir de modo equivalente como

$$\begin{array}{lll} -\min & -b^\top y^+ + b^\top y^- & \\ \text{sujeto a :} & (-A^\top \ \ A^\top) \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} & \geq -c \\ & y^+ \geq 0, \ y^- \geq 0. & \end{array}$$

Así, el dual de acuerdo a la Definición 4.1 es

$$\begin{array}{ll} -\max & -c^\top x \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} -A \\ A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Simplificando tal expresión, resulta exactamente el problema primal (P_e). $\square$

Observación 4.1. Uno pudo haber elegido definir el dual para un problema dado, escrito inicialmente en su forma estándar de acuerdo a la Proposición 4.3. Sin embargo, se verá a continuación que la Definición 4.1 también se puede obtener a partir de dicha proposición. En efecto, el problema primal, escrito en su forma canónica, tiene como formulación estándar a:

$$\begin{array}{lll} \min & c^\top x + 0^\top x' & \\ \text{sujeto a :} & (A \ \ -I) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} & = b \\ & x \geq 0, & x' \geq 0 \end{array}$$

Luego, el problema dual dado por la Proposición 4.3 es

$$\begin{array}{lcc} \max & b^\top y & \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} A^\top \\ -I \end{pmatrix} y & \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ & y \text{ sin} & \text{restricción,} \end{array}$$

Simplificando, se obtiene la forma esperada para el problema dual dado por la Definición 4.1.

En virtud de lo anterior, se trabajará con la forma canónica del problema primal. También se concluye que, en particular, cualquier problema de maximización se puede considerar como el problema dual de algún problema de minimización; igualmente, cada problema primal es el dual de algún otro problema.

Ejemplo 4.3. Si el problema primal es:

$$\begin{array}{cccccccccc} \min & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_4 & & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_4 & & = & 5 \\ x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq 0, & x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

entonces, el problema dual resulta

$$\begin{array}{cccccc} \max & 8w_1 & + & 5w_2 & & \\ \text{s.a.} & 2w_1 & + & w_2 & \leq & 1 \\ & -2w_1 & + & 3w_2 & \leq & 2 \\ & w_1 \leq 0, & w_2 & \leq \frac{3}{2}. & & \end{array}$$

Ejercicio 4.1. Demostrar que el problema dual de

$$\begin{array}{ccccccccc} \min & c_1^\top x_1 & + & c_2^\top x_2 & + & c_3^\top x_3 & & \\ \text{s.a.} & A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & \geq & b_1 \\ & A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & \leq & b_2 \\ & A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & = & b_3 \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \leq 0, & & x_3 & \text{sin restricción} & \end{array}$$

es

$$\begin{array}{ccccccccc} \max & b_1^\top y_1 & + & b_2^\top y_2 & + & b_3^\top y_3 & & \\ \text{s.a.} & A_{11}^\top y_1 & + & A_{21}^\top y_2 & + & A_{31}^\top y_3 & \leq & c_1 \\ & A_{12}^\top y_1 & + & A_{22}^\top y_2 & + & A_{32}^\top y_3 & \geq & c_2 \\ & A_{13}^\top y_1 & + & A_{23}^\top y_2 & + & A_{33}^\top y_3 & = & c_3 \\ & y_1 \geq 0, & & y_2 \leq 0, & & y_3 & \text{sin restricción} & \end{array}$$

Denotamos los conjuntos factibles de los problemas (P) y (D) dados en la Definición 4.1, mediante

$$X \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}, \ Y \doteq \{y \in I\!R^m : \ A^\top y \leq c, \ y \geq 0\}.$$

Recordamos que $\min(P)$ denota el valor óptimo del problema primal (P), es decir:

$$\min(P) \doteq \min_{x\in X} c^\top x.$$

Similarmente, denotamos

$$\max(D) \doteq \max_{y\in Y} b^\top y.$$

El siguiente lema, debido a John von Neumann (1957), establece una relación entre los valores óptimos de los problemas (P) y (D). Más adelante se verá que dicha relación también nos sugiere un método simple para encontrar soluciones aproximadas de (P) o (D).

Lema 4.4. (*Dualidad débil*) *Sean $x \in X$, $y \in Y$, entonces $c^\top x \geq b^\top y$. En consecuencia,* $\min(P) \geq \max(D)$.

Demostración. Como $x \in X$, $y \in Y$, el resultado esperado se obtiene de la desigualdades siguientes

$$c^\top x = x^\top c \geq x^\top A^\top y \geq b^\top y.$$

□

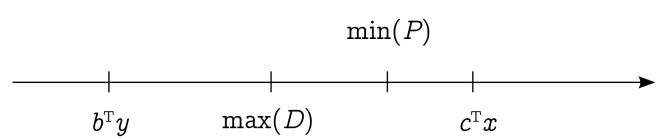


Figura 4.1. Valores óptimos del primal (P) y dual (D)

El lema anterior nos dice cómo podemos determinar cotas inferiores (resp. cotas superiores) para el valor óptimo del problema primal (P) (resp. problema dual (D)), siempre que $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$. En efecto, cualquier elemento y_0 en Y (resp. x_0 en X), satisface de acuerdo al Lema 4.4,

$$\min(P) \geq b^\top y_0 \text{ (resp. } \max(D) \leq c^\top x_0).$$

Del mismo modo, también nos provee de una cota de error para la diferencia del valor de la función objetivo en una solución factible de (P) y el valor óptimo de (P): dados $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$,

$$0 \leq c^\top x_0 - \min(P) \leq c^\top x_0 - \max(D) \leq c^\top x_0 - b^\top y_0. \tag{4.1}$$

$$0 \leq \max(D) - b^\top y_0 \leq \min(P) - b^\top y_0 \leq c^\top x_0 - b^\top y_0. \tag{4.2}$$

En este caso, se puede considerar a x_0 (resp. y_0) como una solución aproximada de (P) (resp. (D)) con un error de, al menos, $c^\top x_0 - b^\top y_0$.

Ejemplo 4.4. Encontrar una cota superior para el valor óptimo del problema

$$
(D)\qquad \left\{\begin{array}{lccccccc}
\max & -7y_1 & + & 9y_2 & + & 16y_3 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & + & 2y_2 & + & 9y_3 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & - & 2y_2 & - & 9y_3 & \leq & -2 \\
y_1 & \geq 0, & y_2 & \geq 0, & y_3 & \geq 0. & &
\end{array}\right.
$$

Se observa que no es fácil resolver el problema (D) geométricamente, pero no es difícil ver que $y_0 = (1, 3, 0)$ es factible para (D), y su valor objetivo es $-7(1)+9(3)+16(0) = 20$. Por otro lado, su formulación dual deberá tener dos variables y tres desigualdades como restricciones y, por lo tanto, podría ser resuelto gráficamente. Más precisamente, el problema dual de (D) es

$$
(P)\qquad \left\{\begin{array}{lccccc}
\min & 7x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & - & x_2 & \geq & -7 \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & \geq & 9 \\
 & 9x_1 & - & 9x_2 & \geq & 16 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 & \geq 0. & &
\end{array}\right.
$$

Nótese que la primera y tercera desigualdad son redundantes, pues se obtienen de la segunda. Es fácil chequear que $x_0 = (5, 0)$ es un punto factible para el dual de (D), que es (P) y, en consecuencia, su valor objetivo es $7(5) - 2(0) = 35$. Luego, por el Lema 4.4, se tiene que 35 es una cota superior para el valor óptimo del problema original, (D). Obviamente, no es la mejor: la cota exacta será el valor óptimo de (P), que en este caso se puede determinar geométricamente. Después de graficar la región factible de (P), se obtiene que la solución óptima es $\bar{x} = (9/2, 0)$ y así, el valor óptimo es $7(4{,}5) - 2(0) = 31{,}5$.
En consecuencia, el punto $y_0 = (1, 3, 0)$ se puede considerar como una solución aproximada del problema (D) con una cota de error de (ver (4.2))

$$
\max(D) - b^\top y_0 = \min(P) - b^\top y_0 = 31{,}5 - 20 = 11{,}5,
$$

esto es demasiado con relación a lo esperable.
Un modo de encontrar una solución óptima del problema (D), se propone en el Ejercicio 4.3.

El Lema 4.4 implica dos resultados importantes que a continuación se indican.

Corolario 4.5. *Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

(a) *Sean $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in Y$. Si $c^\top \overline{x} = b^\top \overline{y}$, entonces $\overline{x}$ es solución óptima de (P) e $\overline{y}$ es solución óptima de (D).*

(b) *Si $\min(P) = -\infty$ (resp. $\max(D) = +\infty$), entonces $Y = \emptyset$ (resp. $X = \emptyset$).*

Demostración. (a): Del lema anterior obtenemos $c^\top \overline{x} = b^\top \overline{y} \leq c^\top x$, para todo $x \in X$, lo que nos dice que $\overline{x}$ es solución óptima de (P); similarmente, se tiene $b^\top \overline{y} = c^\top \overline{x} \geq b^\top y$, para todo $y \in Y$, lo que prueba que $\overline{y}$ es solución óptima de (D).
(b): Si $Y \neq \emptyset$, entonces, fijado $y \in Y$, el lema anterior implica $c^\top x \geq b^\top y$, para todo $x \in X$. Luego $\min(P) > -\infty$, lo que no puede suceder. $\square$

El recíproco de (a) del Corolario 4.5 también se cumple. Tal resultado es parte del Teorema 4.11: su demostración requiere el lema de Farkas que se discutirá en la sección siguiente.
Por otro lado, el recíproco de la Parte (b) no siempre es cierto (esta implicancia también tiene que ver con el Ejemplo 4.11). En efecto, el ejemplo siguiente muestra que se puede tener $Y = \emptyset$ y $X = \emptyset$ y, por lo tanto, $\min(P) \neq -\infty$; mientras que el segundo ejemplo muestra una situación en la cual la Parte (b) se cumple.

Ejemplo 4.5. Se considera el problema primal:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccccc} \min & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & \end{array} \right.$$

cuyo dual es:

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccccc} \max & y_1 & + & y_2 & & \\ \text{s.a.} & y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\ & -2y_1 & + & 2y_2 & \leq & -2 \\ & y_1 \geq 0, & y_2 & \geq 0. & & \end{array} \right.$$

Aquí, $X = Y = \emptyset$.

Ejemplo 4.6. Dado el problema primal:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccccccc} \min & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & \\ \text{s.a.} & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & \geq & -4 \\ x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq 0, & & \end{array} \right.$$

el dual es:

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccccc} \max & -y_1 & - & 4y_2 & & \\ \text{s.a.} & -y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\ & -y_1 & + & y_2 & \leq & -1 \\ & y_1 & & & \leq & -1 \\ & y_1 \geq 0, & y_2 & \geq 0, & y_3 & \geq 0. \end{array} \right.$$

Evidentemente, $Y = \emptyset$ y aplicando el método del simplex, se obtiene $\min(P) = -\infty$.

Ejemplo 4.7. Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$ y $c \in I\!R^n$, y consideramos el problema

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a}: & Ax & \geq & c \\ & x & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Si existe x_0 tal que $Ax_0 = c$, $x_0 \geq 0$, entonces demostrar que x_0 es una solución óptima para (P).

Solución.
Considerando que A es simétrica, el problema dual a (P) es:

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{lrcl} \max & c^\top y & & \\ \text{sujeto a :} & Ay & \leq & c \\ & y & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Luego, x_0 es también factible para (D) y, como el valor de las funciones objetivos de (P) y (D) coinciden, el Corolario 4.5 implica que x_0 es tanto solución óptima de (P) y (D), ¿cómo explicaría este resultado desde el punto económico?

Ejercicio 4.2. Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$ y $c \in I\!R^n$, y consideramos el problema

$$(P_e) \qquad \left\{ \begin{array}{lrcl} \min & c^\top x & & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = & c \\ & x & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Si existe x_0 factible para (P_e), es decir, $Ax_0 = c$, $x_0 \geq 0$, entonces demostrar que x_0 es una solución óptima para (P_e).

Para obtener el resultado de dualidad fuerte como contraparte al Lema 4.4, se necesita el lema de Farkas. Su estudio se realizará en la sección siguiente.

4.3 El lema de Farkas y condiciones de optimalidad

Esta sección se dividirá en dos partes: la primera se dedica a establecer principalmente el lema de Farkas, el cual se utiliza para establecer las condiciones de optimalidad (debido a Karush, Kuhn y Tucker) en la segunda parte.

4.3.1 El lema de Farkas y relacionados

Este gran resultado debido a Julius Farkas juega un papel importante en optimización lineal, de la misma forma que la alternativa de Fredholm (también conocido como el teorema fundamental) lo hace en álgebra lineal. Por lo que ambos son resultados del tipo alternativo, pero demostraremos que la alternativa de Fredholm es una consecuencia del lema de Farkas.

En lo que resta de esta sección, A será una matriz de orden $m \times n$, b un vector de $I\!R^m$ y c en $I\!R^n$.

Lema 4.6. (*Julius Farkas, 1902*) *Uno y sólo uno de los sistemas siguientes tiene solución:*

(*I*) $Ax \geq 0$, $c^\top x < 0$;
(*II*) $A^\top y = c$, $y \geq 0$.

Demostración. Si tanto (I) como (II) tienen solución x e y, respectivamente, entonces $y^\top Ax \geq 0$ y $x^\top A^\top y = x^\top c = c^\top x$. Luego, $c^\top x \geq 0$, contradiciendo el hecho que $c^\top x < 0$.
Ahora supongamos que (I) no tiene solución. Esto quiere decir que $c^\top x \geq 0$, para todo x tal que $Ax \geq 0$. Así, el problema

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq 0 \end{array} \right.$$

tiene como solución óptima al vector nulo y su valor óptimo es cero. Escribimos el problema (P) en su forma estándar, obteniendo

$$(\tilde{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x^+ - c^\top x^- + 0^\top x_h & \\ \text{sujeto a :} & \left(\begin{array}{ccc} -A & A & I \end{array} \right) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x_h \end{pmatrix} & = 0 \\ & x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0, & x_h \geq 0, \end{array} \right.$$

donde I es la matriz identidad de orden m. Vamos a representar los datos del problema $(\tilde{P})$ por la matriz $\tilde{A}$ de orden $m \times (2n+m)$, el vector costo $\tilde{c} \in I\!R^{2n+m}$. En consecuencia,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc} -A & A & I \end{array} \right),\ \tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que $\overline{x} = (\overline{x}_{\tilde{N}}, \overline{x}_{\tilde{B}}) = (0,0)$ es una solución básica óptima del problema $(\tilde{P})$, correspondiente a la base $\tilde{B} = I$. Así, podemos aplicar el Teorema 3.15 para obtener eventualmente otra base (continuaremos denotando por $\tilde{B}$), para el cual se tenga $\tilde{z}_j - \tilde{c}_j \leq 0$, para todo índice j. Teniendo en cuenta que

$$\tilde{z}_j = \tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \alpha_j = \tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1} \tilde{a}_j,$$

donde $\tilde{a}_j$ es la j-ésima columna de $\tilde{A}$, se obtiene $\tilde{z}_j - \tilde{c}_j = \tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1}\tilde{a}_j - \tilde{c}_j$. Por lo tanto, de la desigualdad anterior se desprende

$$-\tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1} A - c^\top \leq 0,\ \tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1} A + c^\top \leq 0,\ \tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1} \leq 0.$$

Entonces, poniendo $y = -(\tilde{c}_{\tilde{B}}^\top \tilde{B}^{-1})^\top$, las desigualdades precedentes se reducen a

$$A^\top y = c,\ y \geq 0,$$

y, por lo tanto, el sistema (II) tiene solución. $\square$

Interpretación geométrica del lema de Farkas

Se ilustra en las Figuras 4.2 y 4.3. La primera se refiere a la existencia de un elemento x que forme un ángulo menor de 90 grados con las filas a^i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de la matriz A, pero que forme un ángulo estrictamente mayor que 90 grados con el vector c. La segunda, tiene que ver con el hecho que c pertenezca al cono positivo generado por los vectores dados por las transpuestas de las filas de A (ver la Sección 1.5). Recordemos que, en esta monografía, los vectores son considerados vectores columnas.

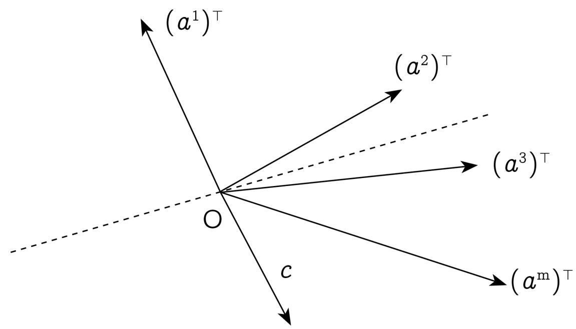


FIGURA 4.2. Sistema I tiene solución y II no tiene

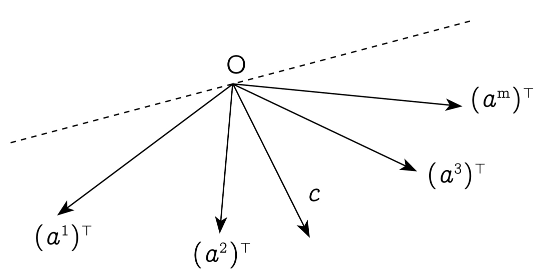


FIGURA 4.3. Sistema I no tiene solución y II tiene

Una forma equivalente (ver la observación más abajo) muy útil del lema de Farkas es la siguiente:

Lema 4.7. *Uno y sólo uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:*
(I) $Ax \geq 0,\ x \geq 0,\ c^\top x < 0$;
(II) $A^\top y \leq c,\ y \geq 0$.

Demostración. Esto es una consecuencia del lema de Farkas, después de escribir los sistemas (I) y (II), respectivamente, como:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \geq 0,\ \ c^\top x < 0;$$

$$\begin{pmatrix} A^\top & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = c,\ \ (y, y') \geq (0, 0).$$

□

Observación 4.2. En realidad los Lemas 4.6 y 4.7 son equivalentes, en el sentido que uno puede ser demostrado a partir del otro. En efecto, ya vimos que el Lema 4.6 implica el Lema 4.7; probaremos que el último implica el primero: para ello simplemente observamos que (I) del Lema 4.6 se puede escribir en la forma de (I) del Lema 4.7 como

$$\begin{pmatrix} A^\top & -A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} c^\top & -c^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} < 0,\ (x^+, x^-) \geq (0, 0).$$

Ejemplo 4.8. Encontrar el sistema alternativo dado por el lema de Farkas a la afirmación siguiente: el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c$$

tiene solución $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.
Para dar respuesta, se debe escribir la afirmación en la forma del sistema (II) del lema de Farkas. Para ello ponemos $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ con $x_1^+ \geq 0$, $x_1^- \geq 0$. Luego, el sistema dado se expresa como

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 6 & 4 \\ 8 & -8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c,\ x_1^+ \geq 0,\ x_1^- \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Entonces, aplicando el lema de Farkas, el sistema alternativo que no tiene solución es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -2 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} y \geq 0,\ c^\top y < 0,\ y \in I\!R^3.$$

Ejemplo 4.9. Sea A una matrix de orden $m\times n$ y $c\in I\!\!R^n$. Suponiendo que el sistema

$$Ax=0,\ x\geq 0,\ c^\top x>0$$

no tiene solución, encontrar otro sistema que sí tenga.
Solución.
Reescribiendo el sistema dado en la forma (I) del lema de Farkas, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} x\geq 0,\ (-c)^\top x<0.$$

Luego, el sistema que debe tener solución es

$$\begin{pmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=-c,\ (u,v,w)\geq(0,0,0).$$

Poniendo $y=u-v$, lo anterior se reduce a que el sistema

$$A^\top y\leq -c$$

tiene solución, o equivalentemente, que el sistema $A^\top y\geq c$ tiene solución. Notar que algunas componentes de y pueden ser positivas y otras negativas.

Teorema 4.8. (*Paul Gordan, 1873*) *Uno y sólo uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:*

(I_g) $Ax>0$;

(II_g) $A^\top y=0,\ y\geq 0,\ y\neq 0.$

Demostración. Se recuerda que $\mathbf{1}$ es el vector columna con todas sus componentes iguales a 1. Primero nos damos cuenta que (II_g) tiene solución, si y sólo si el sistema

(II_g') $A^\top y=0,\ \mathbf{1}^\top y=1,\ y\geq 0$
tiene solución. Tal sistema es equivalente a
(II_g') $\begin{pmatrix} A^\top \\ \mathbf{1}^\top \end{pmatrix} y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y\geq 0,$
el cual tiene la forma (II) del lema de Farkas. Luego, el sistema (I) del mismo lema se convierte en:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}\geq 0,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}<0.$$

Esto implica $x'<0$ y, en consecuencia, $Ax>0$, que es el sistema (I_g). $\square$

Ejemplo 4.10. La alternativa de Fredholm en álgebra lineal.
Este resultado expresa lo siguiente (la matriz A de orden $m\times n$ y $b\in I\!\!R^m$ son dados):

(I_0) $Ax=b$ tiene solución, o,

(II_0) $A^\top y=0$, $b^\top y\neq 0$ tiene solución.

En el contexto del álgebra lineal, lo anterior significa que b está en el espacio columna de A o existe un vector y en el núcleo de $A^\top$, tal que $b^\top y \neq 0$. Más precisamente, la alternativa de Fredholm es otra manera equivalente de escribir el *teorema fundamental del álgebra lineal* que dice (ver sección 3.2.4 de [**G**])

$$\mathcal{R}(A) = (\ker(A^\top))^\perp, \tag{4.3}$$

donde $\mathcal{R}(A)$ es la imagen de A, el cual coincide con el espacio columna de A. Recordemos que el núcleo de una matriz de orden $p \times q$, M, denotado por $\ker(M)$, es el subespacio vectorial $\{y \in I\!R^q : \ My = 0\}$. Dado un subespacio vectorial $K \subseteq I\!R^m$, se define el *subespacio ortogonal* a K, como el subespacio vectorial dado por

$$K^\perp \doteq \{z \in I\!R^m : \ z^\top y = 0, \text{ para todo } y \in K\}.$$

Para demostrar la alternativa de Fredholm, se aplica el lema de Farkas. Con este fin, debemos escribir (I_0) en la forma de (II) del Lema 4.6. Para ello, ponemos $x = u - v$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, luego, (I_0) queda expresado como

$$\begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = b, \ (u, v) \geq (0, 0) \ \text{ tiene solución.}$$

Así, Farkas afirma que la anterior relación se cumple o que

$$\begin{pmatrix} A^\top \\ -A^\top \end{pmatrix} y \geq 0, \ b^\top y < 0 \ \text{ tiene solución.}$$

Es decir, $A^\top y = 0$, $b^\top y < 0$ tiene solución. En otras palabras, existe un vector y que es ortogonal a cada fila de A y que forma un ángulo obtuso con el vector b. También se concluye que el sistema $A^\top y = 0$, $b^\top y > 0$ tiene solución.

Ejemplo 4.11. Demostrar que si el problema primal

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{ccll} \min & c^\top x & & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0, \end{array} \right.$$

no tiene solución factible y si su dual (D) tiene una solución factible, entonces $\sup(D) = +\infty$.

Solución

El dual asociado es

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{ccll} \max & b^\top y & & \\ \text{sujeto a :} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Por hipótesis, sea y_0 una solución factible para (D). Si $X = \emptyset$, o equivalentemente, el sistema $Ax \geq b$, $x \geq 0$, no tiene solución, entonces por el Lema 4.7, existe $\overline{y}$ tal que

$$A^\top \overline{y} \leq 0, \ \overline{y} \geq 0, \ b^\top \overline{y} > 0.$$

Luego, $y = y_0 + t\overline{y}$ es factible para (D), para todo $t > 0$. En efecto, para cada $t > 0$ se tiene, $y_0 + t\overline{y} \geq 0$ y $A^\top(y_0 + t\overline{y}) = A^\top y_0 + tA^\top\overline{y} \leq c$. Por otro lado,

$$\sup(D) \geq b^\top(y_0 + t\overline{y}) = b^\top y_0 + tb^\top\overline{y} \to +\infty, \text{ cuando } t \to +\infty.$$

De donde se concluye que $\sup(D) = +\infty$.

4.3.2 Condiciones de Optimalidad de Karush, Kuhn y Tucker

Las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker son condiciones necesarias y fueron formuladas originalmente para problemas de optimización no lineal bajo hipótesis de diferenciabilidad. En nuestro caso, es decir, para problemas de optimización lineal, tales condiciones también son suficientes, como veremos más adelante.
Estas condiciones fueron establecidas primero por W. Karush (1939) en su tesis de Maestría, e independientemente por Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker en 1950. Aún se puede encontrar en algunos libros de los años cincuenta, sesenta o setenta, que las mencionadas condiciones se deben sólo a Kuhn y Tucker, desconociendo la contribución de W. Karush.

Consideremos el problema

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0. \end{array} \right.$$

Sea $\overline{x}$ factible para (P), es decir, $A\overline{x} \geq b$, $\overline{x} \geq 0$. Definimos los conjuntos

$$I = \{i : \ a^i\overline{x} = b_i\}, \ J = \{j : \ \overline{x}_j = 0\},$$

donde a^i es la fila i-ésima de la matriz A. Al conjunto $I \cup J$ se le llama el conjunto de los índices activos asociados a la solución factible $\overline{x}$, es decir, es el conjunto de los índices donde las restricciones se convierten en igualdad al ser evaluadas en $\overline{x}$.
Por a^I denotamos la submatriz de A formada por las filas a^i con $i \in I$; y por $e_J^\top$ la matriz que tiene por filas $e_j^\top$ con $j \in J$, donde e_j es el vector en $\mathbb{R}^n$, cuyas componentes son todas cero excepto la j-ésima que es 1. Sea ahora

$$A_0 = \begin{pmatrix} (a^I)^\top \\ e_J^\top \end{pmatrix}.$$

El teorema siguiente expresa las condiciones de optimalidad de Karush, Kuhn y Tucker.

Teorema 4.9. *Sea $\overline{x}$ factible para (P). Entonces, $\overline{x}$ es solución óptima de (P), si y sólo si existe $y \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$A^\top y + v = c, \ y \geq 0, \ v \geq 0; \tag{4.4}$$

$$y^\top(A\overline{x} - b) = 0, \ v^\top\overline{x} = 0. \tag{4.5}$$

Demostración. Si $\overline{x}$ es solución de (P) no es difícil demostrar que el sistema

$$A_0 d \geq 0,\ c^\top d < 0$$

no tiene solución (en efecto, suponiendo que el sistema tenga solución, se demuestra la existencia de soluciones factibles de la forma $\overline{x} + td$, para t suficientemente pequeño, donde el valor de la función objetivo es menor que el mínimo). Luego, por el lema de Farkas, existe $z \in I\!R^m$ tal que $A_0^\top z = c$, $z \geq 0$. Poniendo $z = (y, v)$, $y \in I\!R^{|I|}$, $v \in I\!R^{|J|}$ ($|I|$, $|J|$ denotan los cardinales de I y J), y desarrollando obtenemos

$$\sum_{i\in I} y_i (a^i)^\top + \sum_{j\in J} v_j e_j = c. \tag{4.6}$$

Si añadimos las condiciones

$$y_i(a^i\overline{x} - b_i) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I;$$
$$v_j \overline{x}_j = 0,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J,$$

podemos completar las sumas en (4.6), resultando en forma matricial (4.4) y (4.5). Recíprocamente, supongamos que (4.4) y (4.5) se cumplen para alguna $y \geq 0$ y alguna $v \geq 0$. Entonces, para cualquier x factible se tiene

$$c^\top x - c^\top \overline{x} = (y^\top A + v^\top)(x - \overline{x}) = y^\top A(x - \overline{x}) + v^\top(x - \overline{x}) = y^\top(Ax - b) + v^\top x \geq 0,$$

puesto que $Ax - b \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $v \geq 0$. Esto prueba que $\overline{x}$ es solución de (P). ☐

La hipótesis $\overline{x} \in K$ indica la "*factibilidad primal*"; la expresión (4.4) expresa las condiciones de optimalidad de Karush, Kuhn y Tucker (KKT), e indica la "*factibilidad dual*" porque tiene que ver con la región factible del problema dual (D) dada en la Definición 4.1 y, por la misma razón, a y también se le conoce como variable dual; mientras que (4.5) expresa las "*condiciones inactivas de complementariedad*" y (y, v) son los llamados "*multiplicadores de Lagrange*".
En conclusión, se tiene lo siguiente: si (P) tiene solución óptima, entonces el problema dual (D) asociado tiene una solución óptima que es el multiplicador de Lagrange, dado por el Teorema 4.9. Esto es una consecuencia del Corolario 4.5(a).

Observación 4.3. Geométricamente, la igualdad 4.6 afirma que el vector costo c se puede escribir como una combinación positiva de los vectores $(a^i)^\top$, e_j, con $i \in I$, $j \in J$. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.12. Consideremos el problema:

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{lccccc} \min & -2x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{s.a.} & -x_1 & - & x_2 & \geq & -8 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & \geq & -12 \\ & x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & \end{array} \right.$$

1. Graficar la región factible y determinar sus puntos extremales.
2. Verificar la validez o no de las condiciones KKT en cada uno de los puntos extremales.

Solución.
1. La Figura 4.4 ilustra la región factible y sus puntos extremales, los cuales son: $u^1 = (0,0)$, $u^2 = (0,4)$, $u^3 = (\frac{12}{5}, \frac{28}{5})$, $u^4 = (8,0)$
2. Vamos a usar la Observación 4.3. Escribimos $A^\top = ((a^1)^\top \ (a^2)^\top)$ donde $(a^1)^\top = (-1,-1)$, $(a^2)^\top = (2,-3)$, y denotamos por $\mathcal{L}_1$ la recta determinada por $x_1 + x_2 = 8$ y $\mathcal{L}_2$ la recta determinada por $2x_1 - 3x_2 = -12$. Los vectores (considerados sólo como direcciones) apenas mencionados se grafican en las Figuras 4.4 y 4.5 y, en general, representan solamente direcciones.

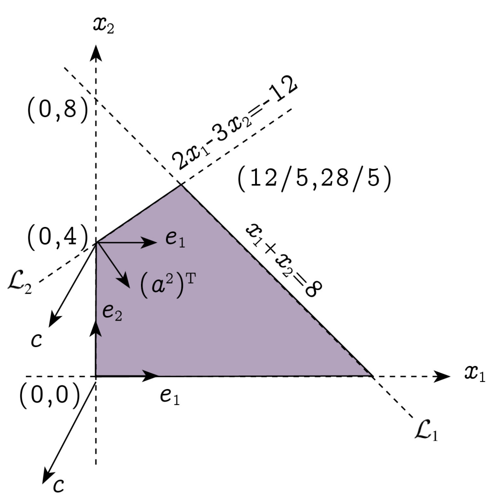


Figura 4.4. Condiciones KKT para $(0,0)$ y $(0,4)$

Al analizar en $u^1 = (0,0)$, se obtiene $I = \emptyset$, $J = \{1,2\}$, y la Figura 4.4 muestra que efectivamente $c = (-2,-3)$ no puede ser escrito como una combinación positiva de $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, pues $c = -2e_1 - 3e_2$; al considerar $u^2 = (0,4)$ se tiene $I = \{2\}$, $J = \{1\}$ y tampoco c puede ser escrito como una combinación positiva de $(a^2)^\top = (2,-3)$ y e_1, ya que $c = (a^2)^\top - 4e_1$.
Observando ahora la Figura 4.5 y considerando $u^3 = (\frac{12}{5}, \frac{28}{5})$, se obtiene $I = \{1,2\}$, $J = \emptyset$ y se concluye que c sí es una combinación positiva de $(a^1)^\top$, $(a^2)^\top$, pues $c = \frac{12}{5}(a^1)^\top + \frac{1}{5}(a^2)^\top$; mientras que en $u^4 = (8,0)$ los índices activos son $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, y c no pueder ser escrito de la forma (4.4), ya que $c = 2(a^1)^\top - e_2$.

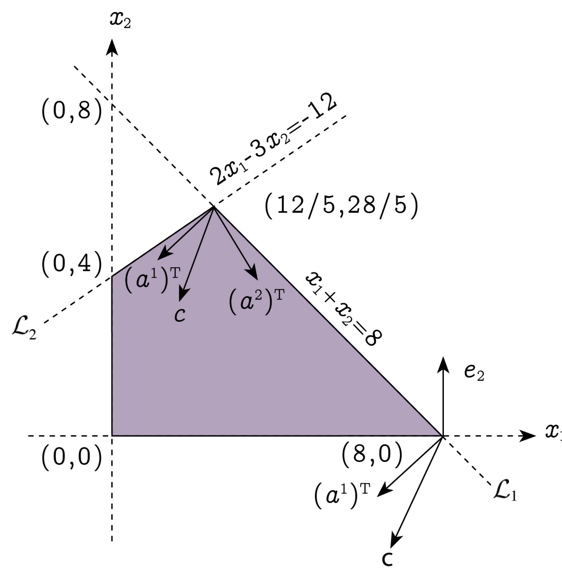


Figura 4.5. Condiciones KKT para $(\frac{12}{5}, \frac{28}{5})$ y $(8, 0)$

Observación 4.4. En virtud del teorema anterior, el problema de encontrar una solución x para (P) es equivalente a encontrar $(x, y) \in I\!R^n \times I\!R^m$ tal que

$$Ax \geq b, \;\; x \geq 0;$$
$$A^\top y \leq c, \;\; y \geq 0;$$
$$y^\top (Ax - b) = 0, \;\; x^\top (c - A^\top y) = 0.$$

Esta formulación corresponde a una clase de problemas llamados de "complementariedad lineal", estudiadas en optimización cuadrática. Tales problemas consisten, dada una matriz M de orden $k \times k$ y un vector $q \in I\!R^k$, en encontrar $z \in I\!R^k$, tal que

$$z \geq 0, \;\; Mz + q \geq 0,$$
$$z^\top (Mz + q) = 0.$$

Teorema 4.10. *Consideremos el problema en su forma estándar:*

$$(P_e) \qquad \begin{cases} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0. \end{cases}$$

Sea $\overline{x}$ factible para (P_e). Entonces, $\overline{x}$ es solución de (P_e), si y sólo si existe $y \in I\!R^m$, $v \in I\!R^n$ tales que

$$A^\top y + v = c, \ v \geq 0;$$
$$v^\top \overline{x} = 0.$$

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior después de escribir $Ax = b$ como $Ax \geq b$ y $-Ax \geq -b$. □

4.4 Teorema de Dualidad Fuerte

El teorema siguiente (cuando el problema primal está escrito en su forma canónica) o el Teorema 4.14 (si está formulado en su forma estándar), resume el gran resultado que nos entrega la teoría de dualidad y que es muy útil para la elaboración de otros algoritmos del tipo simplex para problemas de optimización lineal (ver Observación 4.5).
Recordemos que

$$X \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}, \ Y \doteq \{y \in I\!R^m : \ A^\top y \leq c, \ y \geq 0\}.$$

Se demostró anteriormente que para cualesquiera $x \in X$, $y \in Y$, se tiene (Lema 4.4),

$$c^\top x \geq b^\top y.$$

Este es el resultado que expresa el resultado de dualidad débil. Una consecuencia que también se vio es que, si $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in Y$ y $c^\top \overline{x} = b^\top \overline{y}$, entonces $\overline{x}$ es solución óptima de (P) e $\overline{y}$ es solución óptima de (D). Ahora, haciendo uso de las condiciones de optimalidad demostradas en el Teorema 4.9, veremos que el recíproco de la implicación anterior también es cierto.

Teorema 4.11. *Sean $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in Y$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *$\overline{x}$ es solución óptima de (P) e $\overline{y}$ es solución óptima de (D);*
(b) *$\overline{y}^\top (A\overline{x} - b) = 0$, $\overline{x}^\top (A^\top \overline{y} - c) = 0$;*
(c) *$c^\top \overline{x} = b^\top \overline{y}$.*

Demostración. Evidentemente, $(b) \Longrightarrow (c)$ y, por el Corolario 4.5, $(c) \Longrightarrow (a)$. Veamos $(a) \Longrightarrow (c)$: por el Teorema 4.9, existe $y \geq 0$ tal que $A^\top y \leq c$ y $y^\top (A\overline{x} - b) = 0 = \overline{x}^\top (A^\top y - c)$. Luego, $0 = y^\top (A\overline{x} - b) = c^\top \overline{x} - y^\top b \geq c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y} \geq 0$, por el Lema 4.4.
$(c) \Longrightarrow (b)$: Esto resulta de la igualdad

$$0 = c^\top \overline{x} - b^\top \overline{y} = \overline{x}^\top (c - A^\top \overline{y}) + \overline{y}^\top (A\overline{x} - b)$$

y del hecho que $A\overline{x} - b \geq 0$, $\overline{x} \geq 0$, $c - A^\top \overline{y} \geq 0$, $\overline{y} \geq 0$. $\square$

Teorema 4.12. Teorema de dualidad fuerte.
Si uno de los dos problemas, (P) o (D), tiene solución óptima, entonces el otro también tiene solución óptima y sus valores óptimos coinciden.

Demostración. Por simetría, basta probar el resultado, suponiendo que (P) tiene solución óptima.
Si $\overline{x} \in X$ es solución óptima de (P) entonces (ver Teorema 4.9) existe $\overline{y} \geq 0$ tal que $A^\top \overline{y} \leq c$ y $\overline{y}^\top (A\overline{x} - b) = 0 = \overline{x}^\top (A^\top \overline{y} - c)$. De aquí, $c^\top \overline{x} = b^\top \overline{y}$. Luego, por el teorema anterior, $\overline{y}$ es solución óptima de (D). $\square$

El teorema fundamental de dualidad, que a continuación se enuncia, presenta las diferentes situaciones que verifican cualquier par de problemas de optimización lineal. La versión original de dicho resultado se debe a John von Neumann, después de escuchar las ideas básicas de George B. Dantzig en Octubre de 1947 sobre optimización lineal. Tal teorema es el análogo al teorema del mismo nombre, debido a von Neumann, en teoría de juegos. Sin embargo, su demostración fue publicada en 1950 por Albert W. Tucker y sus estudiantes David Gale y Harold W. Kuhn.

Teorema 4.13. Teorema fundamental de dualidad.
Dados los problemas primal (P) y dual (D), una y sólo una de las afirmaciones siguientes es cierta:

(a) *tanto (P) como (D) poseen soluciones óptimas y* $\min(P) = \max(D)$;
(b) *uno de los problemas tiene valor óptimo ilimitado y el otro problema tiene conjunto factible vacío;*
(c) *ambos problemas tienen conjunto factible vacío.*

Demostración. Este es una consecuencia del teorema anterior, la Parte (b) del Corolario 4.5 y los Ejemplos 4.5 y 4.6. $\square$

Ejemplo 4.13. Dado el problema siguiente

$$\begin{array}{lccccccccc}
\min & 2x_1 & + & 15x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 2 \\
 & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & \geq & 3 \\
 & x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq 0, & x_4 \geq 0, & &
\end{array}$$

escribir el problema dual, resolverlo geométricamente y finalmente, usando el teorema de dualidad, resolver el problema primal.

Solución.
No es difícil ver que el problema dual asociado es

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2y_1 & + & 3y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 2 \\
& 6y_1 & - & 5y_2 & \leq & 15 \\
& 3y_1 & + & y_2 & \leq & 5 \\
& y_1 & - & 3y_2 & \leq & 6 \\
& y_1 \geq 0, & & y_2 \geq 0. & &
\end{array}$$

Graficando el conjunto factible del dual en el plano (la segunda y cuarta restricción son redundantes), se encuentra que la solución óptima y el valor óptimo son, respectivamente, $(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = (\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$ y 3,8. Para tal $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$, (b) del Teorema 4.11 se reduce a

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_4 = 0,\ \overline{x}_1 + 3\overline{x}_3 = 2,\ 2\overline{x}_1 + \overline{x}_3 = 3,$$

donde $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ es una solución óptima del primal. Resolviendo el sistema anterior se obtiene, $\overline{x}_1 = 7/5$, $\overline{x}_3 = 1/5$ y, por consiguiente, se ha encontrado una solución óptima del primal que es: $\overline{x} = (7/5, 0, 1/5, 4)$ cuyo valor óptimo es 3,8, el cual ya se esperaba.

Ejercicio 4.3. Considerar los problemas (P) y (D) del Ejemplo 4.4 donde se encontró que $\overline{x} = (9/2, 0)$ es una solución óptima de (P). Usando el Teorema 4.11, encontrar una solución óptima de (D).

Aun cuando, todo problema en su forma estándar puede llevarse a su forma canónica para aplicar el teorema anterior, es preferible enunciar el resultado análogo a dicho teorema para el problema escrito en su forma estándar, ver Proposición 4.3. Su demostración se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 4.14. *Sean $\overline{x}$ factible para (P_e), $\overline{y}$ factible para (D_e). Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *$\overline{x}$ es solución de (P_e) e $\overline{y}$ es solución de (D_e);*
(b) *$\overline{x}^\top(A^\top\overline{y} - c) = 0$;*
(c) *$c^\top\overline{x} = b^\top\overline{y}$.*

Ejercicio 4.4. Demostrar el Teorema 4.14.

Observación 4.5. (Base del algoritmo del simplex dual)
Ante la posibilidad de resolver el problema dual dado el primal, usando el algoritmo del simplex (primal) expuesto en el Capítulo 3, también tenemos la opción de resolver el dual, aplicando un algoritmo llamado "*algoritmo del simplex dual*" directamente al problema primal.

Por cuestiones de simplicidad, se considera el problema primal escrito en su forma estándar:

$$(P_e) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0. \end{array} \right.$$

Las condiciones de optimalidad son (ver Teorema 4.10):

$$A\overline{x} = b, \ \overline{x} \geq 0; \tag{4.7}$$

$$A^\top \overline{y} \leq c; \tag{4.8}$$

$$\overline{x}^\top (c - A^\top \overline{y}) = 0. \tag{4.9}$$

Tal como se vio en el capítulo anterior, en cada iteración el algoritmo del simplex (primal) determina una base B de A, es decir, se determina una descomposición $A = (B \ N)$ y se calcula (ver Sección 3.2)

$$\overline{x} \doteq (\overline{x}_B, 0), \ \overline{x}_B \doteq B^{-1}b \geq 0$$

$$\overline{y}^\top \doteq c_B^\top B^{-1}.$$

Estos vectores satisfacen las condiciones (4.7) y (4.9), y en la última iteración, si el problema tiene solución óptima, también se satisface (4.8). En efecto, si el problema tiene solución óptima, se tiene (a_j representa la columna j-ésima de A) $z_j - c_j = c_B^\top B^{-1} a_j - c_j = \overline{y}^\top a_j - c_j \leq 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, el cual es equivalente a decir que (4.8) se cumple.

Por tanto, se puede concluir que en cada iteración el algoritmo del simplex (primal) determina un vector $\overline{x}$ de modo que verifique la factibilidad primal, calcula un vector $\overline{y}$ de tal manera que se satisfaga la condición inactiva de complementariedad, y se detiene cuando la factibilidad dual se cumple. En este instante, los vectores generados $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son soluciones óptimas de (P_e) y (D_e), respectivamente, debido al Teorema 4.14. El algoritmo del simplex dual construye vectores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ que satisfacen la condición inactiva de complementariedad y la factibilidad dual, y se detiene cuando la factibilidad primal se verifica.

4.5 Interpretación económica del problema dual

Veamos ahora una interpretación económica del problema dual, cuando el primal consiste en minimizar el gasto de fabricar m bienes a partir de n insumos que se deben adquirir en el mercado, para satisfacer una cierta demanda. La matriz tecnológica A, cuyos elementos a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) representan la cantidad del bien i que se obtiene al emplear 1 unidad del insumo j. Se desean producir los m bienes para satisfacer la demana de b_i unidades del bien i. Matemáticamente, tal problema se formula como:

$$
(P) \qquad \begin{cases} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a}: & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0. \end{cases}
$$

Cada componente c_j del vector c indica el costo del insumo j a adquirir; mientras que cada componente x_j del vector x indica la cantidad del insumo j a adquirirse, para la producción de los m bienes.

Supongamos ahora que una fábrica competidora le desea vender los m bienes en las cantidades previstas para satisfacer la demanda. Más precisamente, sea y_i el precio de venta del bien i ofrecida por la competencia.

Está claro que $y_i \geq 0$, pues de lo contrario la competencia no vende. Por tanto,

$$y \geq 0.$$

Otra condición es que los precios deben ser tales que si compramos algunas unidades de los bienes requeridos, el gasto obtenido con esta compra debe ser compensado por una necesidad menor de la producción (ahorro). Considerando la solución óptima $\overline{x}$ del problema (P). Si una variable x_j asumiese una unidad más que el valor en la solución óptima, es decir, $x_j = \overline{x}_j + 1$, mientras que los valores de las otras componentes se mantienen (es decir, $x = \overline{x} + e_j$, donde e_j es el vector columna con n componentes, en cuya posición j-ésima está el uno y el resto son ceros), entonces tendríamos un costo adicional de c_j pesos en el costo de la producción, pues $c^\top x = c^\top \overline{x} + c_j$.

Con esta compra adicional podríamos satisfacer una demanda mayor, concretamente, la demanda podría ser aumentada en a_j unidades en los m bienes (recordar que a_j representa la columna j-ésima de la matriz A), pues $Ax = A\overline{x} + Ae_j = A\overline{x} + a_j \geq b + a_j$. Si esta demanda adicional de a_j unidades se compra a la competencia, se incurre en un gasto de $a_j^\top y$ pesos. Dicho gasto no debe superar al costo adicional que si lo hubiese producido la fábrica misma, usando el insumo j, c_j, es decir,

$$a_j^\top y \leq c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

La fábrica competidora tratará de maximizar su ganancia al vender los m bienes, es decir, la competencia debe maximizar $b^\top y$. En consecuencia, el problema planteado por la segunda fábrica es

$$
(D) \qquad \begin{cases} \max & b^\top y & \\ \text{sujeto a}: & A^\top y & \leq c \\ & y & \geq 0. \end{cases}
$$

Ahora, continuando con la interpretación económica, analizamos las condiciones inactivas de complementariedad en las soluciones óptimas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de (P) y (D) respectivamente. Dichas condiciones son:

$$\overline{y}^\top (A\overline{x} - b) = 0.$$

Si en la solución óptima $\overline{x}$ se tiene $a^i \overline{x} > b_i$, para algún bien i (a^i representa la fila i-ésima de la matriz A), entonces su precio justo debe ser $\overline{y}_i = 0$, puesto que aun la compra de los n productos en la solución óptima sería suficiente para una demanda menor que b_i unidades. Por otra parte, si el precio justo del bien i es estrictamente positivo, $y_i > 0$, es porque efectivamente conviene satisfacer exactamente la demanda b_i, es decir, $a^i\overline{x} = b_i$.

Un análisis similar se realiza respecto de la condición:

$$\overline{x}^\top(c - A^\top\overline{y}) = 0.$$

Notas adicionales

El lector interesado en el desarrollo del algoritmo del simplex dual u otros relacionados puede consultar el libro [**BJS**]. Una interpretación económica del problema dual, desde otro punto de vista a la entregada en la Sección 4.5, puede encontrarse en [**EGSMW**], [**BJS**], al igual que material suplementario sobre dualidad.

4.6 Problemas

1. Consideremos los problemas siguientes:

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{cc} \min & f(x) \\ \text{sujeto a :} & x \in K, \end{array} \right. \qquad (P_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & z & \\ \text{sujeto a :} & f(x) & \leq z, \\ & x \in K, & \end{array} \right.$$

donde $K \subseteq I\!R^n$ es un conjunto no vacío, y $f : K \to I\!R$ es cualquier función. Dado $\overline{x} \in K$, demostrar que:
(a) si $\overline{x}$ es solución óptima de (P_0), entonces $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ es solución óptima de (P_1).
(b) si $(\overline{x}, \overline{z})$ es solución óptima de (P_1), entonces $\overline{z} = f(\overline{x})$, y así, $\overline{x}$ es solución óptima de (P_0).

2. Usando el resultado de problema anterior, escribir la formulación canónica y estándar del problema

$$\min\{|3x_1 + 4x_2 - 7| : \ (x_1, x_2) \in I\!R^2\}.$$

También escribir su problema dual.

3. Se considera el problema siguiente:

$$\min\{5|3x_1 + 4x_2 - 7| + 2|2x_1 + 3x_2 - 5| + 8| - x_1 + 4x_2 - 9| : \ (x_1, x_2) \in I\!R^2\}.$$

(a) Escribir tal problema como uno de optimización lineal en su forma canónica y estándar.
(b) Encontrar su dual reduciéndolo a su mínima expresión en ambos casos.
(Sugerencia: aplicar un razonamiento parecido al Problema 2).

4. Escribir el problema siguiente en su forma canónica y luego, formule su dual:

$$\begin{array}{llcll} \min & c^\top u & + & d^\top v & \\ \text{s.a.} & Au & + & Bv & \leq \; b \\ & u \geq 0, & v \text{ sin} & \text{restricción} & \end{array}$$

5. Encontrar el dual del problema siguiente, reduciéndolo a la mínima expresión,

$$\begin{aligned} &\max\ r \\ &\text{s.a. } \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\ &A^\top y \quad \geq \mathbf{1}r \\ &y \qquad \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí, A es una matriz de orden $m \times n$ y $\mathbf{1}$ es el vector (columna) en $\mathbb{R}^n$ con todas sus componentes iguales a 1.

6. Resolver el problema siguiente

$$\begin{array}{lccccccc} \max & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 21x_3 & & \\ \text{s.a.} & 6x_1 & + & 9x_2 & + & 25x_3 & \leq & 25 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 25x_3 & \leq & 20 \\ x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq 0. & & \end{array}$$

(Sugerencia: usar el problema dual).

7. Después de formular matemáticamente los problemas del 2 al 7 del Capítulo 1; entregue una interpretación económica del problema dual asociado. (Sugerencia: reflexionar en base a la interpretación hecha en la Sección 4.5).

8. Muchos problemas concretos no requieren que las variables de decisión sean no negativas y, por lo tanto, adquieren la formulación siguiente:

$$(P_1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & c^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq b. \end{array} \right.$$

Sea $\overline{x}$ factible para (P_1). Demostrar que $\overline{x}$ es solución óptima de (P_1), si sólo si existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, tal que

$$A^\top y = c;$$

$$y^\top (A\overline{x} - b) = 0.$$

(Sugerencia: reescribir (P_1), usando $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$ y, luego, aplicar el Teorema 4.9).

9. Teniendo en cuenta lo anterior, escribir las condiciones de optimalidad de KKT para el problema del tipo "Aproximación de Chebyshev"

$$\min\ x_{n+1}$$

s.a.

$$-x_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq x_{n+1},\ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \text{ sin restricción},\ j = 1, \ldots, n+1.$$

10. (Estados de equilibrio en procesos de Markov) Supongamos que una partícula puede estar en un estado u otro, los que son enumerados por $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea p_{ij} la probabilidad de transición del estado j al i. Se impone que

$$p_{ij} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En un cierto instante, sea x_j la probabilidad que la partícula esté en el estado j. Entonces,

$$x_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

El vector $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ recibe el nombre de vector *estado* (de probabilidad). Después de una transición la partícula estará en el estado i con probabilidad

$$y_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De donde $y_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Se observa que el nuevo vector de estado verifica $y = Px$, donde P es la matriz de transición de probabilidades $P = (p_{ij})$.
Un estado de equilibrio es un vector de estado que satisface

$$x = Px, \ x_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Por ejemplo, si la matriz P es simétrica, el estado de equilibrio es

$$x = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Pero si la matriz de Markov no es simétrica, no es fácil probar la existencia del estado de equilibrio.
Probar la afirmación siguiente usando el lema de Farkas :
Cualquier matriz de Markov P admite un estado de equilibrio.
Encontrar el estado de equilibrio para la matriz

$$P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para mayor información sobre procesos de Markov, el lector puede consultar el Capítulo 5 de [**G**].

Capítulo 5: Optimización Lineal Multiobjetivo

En la vida real muchas veces para tomar una decisión, se debe optimizar varias funciones objetivo de manera simultánea. Tales funciones podrían estar en conflicto unas con otras, en el sentido que la mejora en alguna de ellas hará que otra empeore. Por ejemplo, en la compra de una casa, uno quiere la "*mejor*" pero al menor precio. En base al sentido común parece razonable aceptar como "*mejor casa*", aquella que es la más amplia, la que resulte más confortable, la que tenga mejor ubicación (por ejemplo, se puede considerar aquella que esté más cerca del centro de trabajo) y ciertamente la que minimice el costo de mantención. Si a estas funciones objetivo agregamos la del costo de la casa, la cual queremos minimizar, se tiene un problema con cinco objetivos o multiobjetivo en general. Como es imposible encontrar una casa que satisfaga todos los requerimientos mencionados de modo optimal, debemos hacer ciertos compromisos, ya que de todas formas se debe tomar alguna decisión. Se observa que, mientras para algunas funciones objetivo se debe minimizar, para otras queremos maximizar.

Tal como se mencionó en el Capítulo 1, después de anteponer un signo menos se puede suponer que estamos interesados en minimizar todas las funciones objetivo. Luego, un vector que minimice, simultáneamente, todas las funciones objetivo es muy difícil de encontrar: si éste fuese el caso, tal vector recibe el nombre de "solución ideal" o "solución fuerte" del problema de optimización multiobjetivo. Por lo que deben adoptarse otros conceptos de solución.

En este capítulo sólo se tratará con soluciones en el sentido de Pareto (o solución eficiente), también conocido como "óptimo Paretiano", "óptimo de Pareto" o "Pareto optimal". El nombre deriva de su creador Vilfredo Federico Damaso Pareto, quien nació el 15 de julio de 1848 en París y falleció el 19 de agosto de 1923 en Ginebra, y fue un sociólogo, economista y filósofo italiano. Técnicamente, un vector es óptimo de Pareto cuando no se puede encontrar otro vector que "mejore" alguna función objetivo sin "perjudicar" a otra función.

Pareto también es famoso por introducir el concepto de la regla 80:20. En Italia, él observó que dentro de su sociedad la gente se dividía en dos grupos: el minoritario, que consistía en el 20 % de la población que poseía el 80 % de algún bien; y el grupo mayoritario, formado por el 80 % de la población restante que ostentaba el 20 % de ese mismo bien.

Una vez enunciado este principio según el cual el 20 % de una acción producirá el 80 % de los efectos; mientras que el 80 % restante sólo origina el 20 % de los mismos efectos, se ha descubierto que éste es aplicable a diversos ámbitos, por ejemplo, en el comercio, logística, control de calidad, entre otros.

Este capítulo se inicia presentando un par de modelos de aplicación en optimización multiobjetivo: el problema de la compra de una casa y aquél de la dieta, ambos en el caso discreto, es decir, cuando se cuenta con un número finito de alternativas. Luego se formula el problema general de un problema de optimización lineal multiobjetivo, estableciendo cuándo un punto dado es solución eficiente. Finalmente, se dan caracterizaciones algebraicas de la no vacuidad/acotación del conjunto solución.

5.1 Un par de ejemplos de motivación: caso Discreto

A continuación se describen un par de situaciones que se modelan a través de un problema de optimización multiobjetivo.

Problema de la compra de una casa.

Imaginemos que una pareja desea comprar una casa, la cual se debe elegir entre los cuatro modelos que les interesan y que ofrece el mercado immobiliario: casa A, B, C y D. La decisión que se tomará será hecha considerando el precio, gastos de mantención (consumo de agua, gas, electricidad) y la distancia de la casa al lugar de trabajo, aquí se refleja el consumo por el transporte desde la casa al trabajo. Luego, se tiene un problema con cuatro alternativas y tres criterios o tres funciones objetivo a considerar. Como usualmente los gastos de mantención van en directa relación con la zona de ubicación de la casa, y ésta con el precio de ella, no se puede esperar que exista una casa cuyo precio sea el menor, con gastos de mantención mínima y cuya distancia al lugar de trabajo sea la menor posible. Observamos que, eligiendo sólo uno de los criterios, siempre es posible encontrar la casa deseada sin mayores dificultades, por ejemplo, la casa más barata, o la casa que gasta menos en mantención, o la casa que está ubicada más cerca al lugar de trabajo. La tabla siguiente muestra las características de las cuatro casas.

	casa A	casa B	casa C	casa D
Precio (1 millón Pesos)	45	50	60	55
Mantención (100.000 Pesos)/mes	3	4	5	3.5
Distancia (1 km)	15	12	13	14

Para introducir un concepto de solución a nuestro problema, se debe distinguir cuándo una casa es “mejor” que otra. Para simplificar nuestro razonamiento en un primer instante, ignoramos el criterio correspondiente a mantención (por ejemplo si tales gastos son cubiertos por los papás de la pareja o reciben algún tipo de subsidio por parte del gobierno regional por ser la pareja más joven, por ejemplo) y nos quedamos con los criterios relacionados con el precio y la distancia.
Se dice que una casa X es “mejor” que otra Y, si el precio de X es estrictamente menor que el precio de Y y la distancia de Y al lugar de trabajo es mayor o igual que la distancia de X al mismo lugar; o, si la distancia de X al lugar de trabajo es estrictamente menor que la distancia de Y al mismo lugar y el precio de la casa Y es mayor o igual que el precio de X.

Luego, se elige como solución del problema a aquella casa tal, que no existe otra "mejor", en el sentido apenas descrito. En otras palabras, la casa elegida será aquella tal que cualquier otra casa o es más costosa o la distancia al lugar de trabajo es estrictamente mayor. Parece bastante razonable aceptar este concepto de solución, el cual por supuesto, no garantiza que exista solución única.
La figura siguiente ilustra la ubicación de las cuatro casas considerando los (dos) criterios: precio de la casa y distancia entre la casa y el lugar de trabajo.

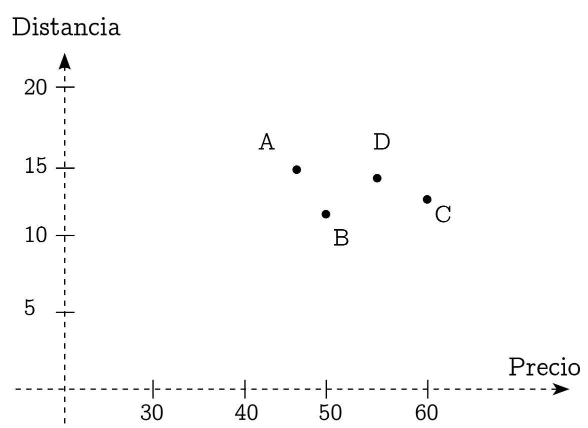


FIGURA 5.1. Problema de la Casa: Precio - Distancia

Luego, se deduce que las casas A y B son soluciones del problema, es decir, las casas A y B son mejores que las casas C y D, pero A no es mejor que B, ni B es mejor que A. Para la familia es indiferente elegir entre A y B.

Si ahora consideramos los tres criterios, también es posible definir cuándo una casa es mejor que otra. Se dice que una casa es "mejor" que otra, si sus valores correspondientes a los tres criterios es menor o igual que aquellos correspondientes a la segunda, pero existe un criterio cuyo valor correspondiente a la primera casa es estrictamente menor que la correspondiente a la segunda.

Por lo tanto, se elige como solución del problema a aquella casa tal, que no existe otra casa "mejor" tal como fue introducido en el párrafo anterior, es decir, aquella casa tal que cualquier otra o es más costosa o es más lejana o su gasto de mantención es mayor.

Problema de la dieta.

En un restaurante se ofrecen cuatro posibles menúes (por un menú se entiende un plato de comida principal, un plato de entrada, un postre, pan y un vaso de jugo) y se plantea el problema de elegir el menú menos costoso y que contenga el menor número de calorías. Se sobrentiende que los cuatro menúes cumplen con los requerimientos nutricionales mínimos para el ser humano, establecidos por algún organismo competente. La tabla a continuación muestra los datos asociados a cada menú.

	menú 1	menú 2	menú 3	menú 4
Precio (1 mil Pesos)	3	4	4.5	3.5
Calorías	2000	1900	1800	1850

Luego, el gráfico siguiente muestra la ubicación de los cuatro menúes considerando los dos criterios.

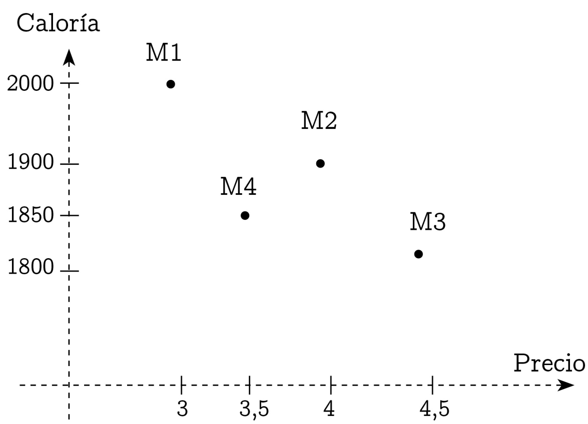


Figura 5.2. Problema de la Dieta: Precio - Caloría

Nuevamente se dice que un menú es "mejor" que otro, si el primero cuesta menos y no contiene más calorías que el segundo menú o si el primero contiene menos calorías y no es más caro que el segundo. Así, como solución (menú óptimo) del problema se elige aquel menú tal, que no existe otro menú mejor en el sentido descrito anteriormente. Por lo tanto, el gráfico anterior nos permite concluir que tenemos tres soluciones de nuestro problema: el menú 1, 4 y el 3.

Hasta aquí hemos visto dos modelos de problemas de optimización multiobjetivo del tipo discreto, es decir, cuando el número de alternativas es finito (cuatro casas en el primer problema y cuatro menúes en el segundo).

Sin embargo, en los capítulos anteriores se ha tratado el problema de optimización (escalar) del modo continuo, es decir, cuando el número de alternativas o soluciones factibles forman un continuo en $\mathbb{R}^n$. Desde este punto de vista se formulará el problema de optimización multiobjetivo en la sección siguiente.

5.2 El Problema revisado de la Dieta: caso Continuo

Retomamos el ejemplo del problema de la dieta del Capítulo 1, tal como ahí fue planteado. Nos interesa una dieta nutritiva (bajo ciertas condiciones) cuyo costo sea el menor posible, es decir, se tenía una sola función objetivo: el costo de la dieta. Se añade como segunda función objetivo aquella que mide la cantidad de calorías presentes en la dieta. Dicha función también se desea minimizar. En tal situación se quiere encontrar una dieta nutritiva cuyo costo sea menor y que permita perder peso. Obviamente sabemos que un asado, que eventualmente puede tener bajo costo (también se puede pensar en un menú en base a comida rápida), no es el más indicado para ser incluído en la dieta si se quiere perder peso o una dieta en base a pescado puede ser nutricionalmente adecuada, pero no siempre se puede contar con él porque es más caro.

Vamos a recordar la formulación del problema de la dieta. Se supone que la dieta es elaborada en base a ciertos alimentos elegidos de una lista de n productos preestablecidos, los cuales poseen m nutrientes. Sea a_{ij} la cantidad de unidades del nutriente i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, presente en el producto j $(j = 1, \ldots, n)$. Por ejemplo, entre los nutrientes podemos tener, vitamina B1, proteínas, grasa, carbohidratos, etc., por lo tanto, a_{ij} puede ser: el número de unidades de vitamina B1 en un gramo de trigo o el número de unidades de proteína en un gramo de arroz o el número de unidades de grasa en un gramo de carne de pollo, etc. También se supone conocido la cantidad mínima del nutriente i que la persona debe consumir por comida, dicha cantidad se denota por b_i.

Sea ahora x_j (que debe ser no negativo) la cantidad en gramos del producto j presente en la dieta. Se debe satisfacer

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Poniendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $b = (b_1, b_2, \ \cdots \ , b_m)$, lo anterior se escribe como

$$Ax \geq b, \ x \geq 0,$$

donde también se añadió la condición de no-negatividad sobre x.

Si c_{1j} representa el costo en pesos del alimento j por gramo, entonces el costo total de la dieta es

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n.$$

Si además c_{2j} representa el número de calorías presente en 1 gramo del alimento j, entonces el número total de calorías contenidas en la dieta es

$$\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n.$$

Sea C la matriz costo de orden $2 \times n$ dado por $C = (c_{ij})_{2\times n}$, donde

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix},$$

luego, la función biobjetivo que se debe considerar es

$$h(x) = (\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j)$$

sujeto a

$$Ax \geq b, \ x \geq 0.$$

Este es un problema de optimización lineal biobjetivo.
Para introducir un concepto de solución a nuestro problema, se debe distinguir cuándo una dieta es mejor que otra. Se dice que la dieta (factible) x' es "*mejor*" que (preferida a) la dieta (factible) x, si x' cuesta menos y no contiene más calorías que la dieta x, o si x' contiene menos calorías y no es más caro que x. Matemáticamente, x' es "*mejor*" que x, si

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x'_j < \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j \text{ y } \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x'_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j,$$

o si,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x'_j < \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j \text{ y } \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x'_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j.$$

Ambas relaciones pueden escribirse matricialmente como

$$Cx' \leq Cx, \ Cx' \neq Cx, \tag{5.1}$$

o equivalentemente,

$$Cx - Cx' \in I\!R^2_+ \setminus \{0\}.$$

Si esto sucede, se dice que la dieta x es "*ineficiente*", en otras palabras, x es "*ineficiente*", si existe otra dieta (factible) x' que es mejor; es decir, que satisfaga (5.1). Si no existe ninguna tal x', se dice que x es "*eficiente*". Este es el concepto de solución que se asociará al problema de optimización multiobjetivo.

5.3 El Problema de Optimización Lineal Multiobjetivo

Ahora se va a formular matemáticamente el problema general de optimización lineal multiobjetivo.

Sean A una matriz real de orden $m \times n$, C una matriz de costos de orden $k \times n$ y b un vector (columna) en $I\!R^m$. El problema de optimización lineal multiobjetivo (k funciones objetivo) se puede formular como

$$(PV) \qquad \begin{cases} \min & Cx & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0, \end{cases}$$

donde, como en capítulos anteriores, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es vector columna con n componentes. Se debe señalar que la elección de la forma del conjunto factible no es restrictiva, puesto que un conjunto de la forma $\{x \in I\!R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ se puede escribir como $\{x' \in I\!R^n : \ Ax' \geq b, \ x' \geq 0\}$. Este caso se discutirá más adelante. Poniendo

$$K \doteq \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\},$$

se va a considerar el siguiente concepto de solución asociado a (PV), el cual proviene de (5.1).

Definición 5.1. Se dice que $\overline{x} \in K$, es una "*solución eficiente*" (también se conoce como *"Pareto optimal"*) del problema (PV), si no existe $x \in K$, tal que

$$Cx \leq C\overline{x}, \ Cx \neq C\overline{x}, \tag{5.2}$$

o equivalentemente,

$$Cx - C\overline{x} \notin -I\!R^k_+ \setminus \{0,\} \text{ para todo } x \in K. \tag{5.3}$$

Por E se denota el conjunto de soluciones eficientes del problema (PV). Cuando $k = 1$ la noción de solución eficiente no es otra cosa que el mínimo de una función a valores reales. Se debe notar que la forma del conjunto K no interviene en absoluto en la definición de solución eficiente. En particular, si K es un conjunto finito, la definición apenas dada coincide con aquella presentada en la Sección 5.1.

El carácter geométrico de (5.3) se refleja en la siguiente expresión equivalente:

$$(C(K) - C\overline{x}) \cap (-I\!R^k_+) = \{0\}, \tag{5.4}$$

o lo que es igual,

$$C(K) \cap (C\overline{x} - I\!R^k_+) = \{C\overline{x}\}, \tag{5.5}$$

donde $C(K) \doteq \{Cx \in I\!R^k : \ x \in K \}$, es decir, $C(K)$ es la imagen de K a través de la matriz C. Evidentemente, la expresión (5.5) es útil si conocemos el conjunto imagen $C(K)$, porque de ella se deduce la imagen del conjunto de soluciones eficientes. Lo anterior se ilustra en la figura siguiente.

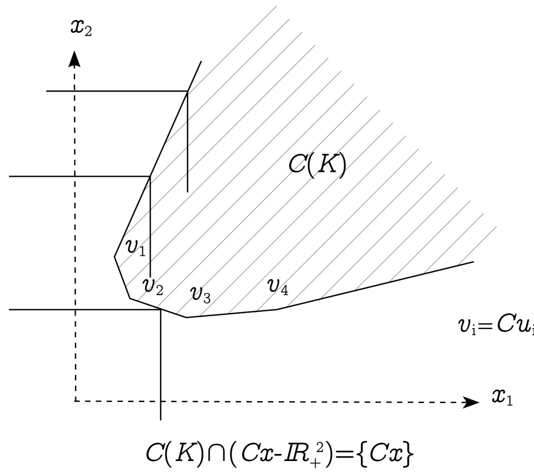


FIGURA 5.3. Imagen del conjunto factible, $C(K)$

A continuación tenemos una caracterización de las soluciones eficientes mediante problemas de minimización asociadas a sus escalarizaciones, la cual es muy importante para el cálculo de ellas. Para tal fin, dado $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in I\!R^k$, se considera el problema de minimización lineal escalar:

$$(P_w) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \min & (C^\top w)^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0. \end{array} \right.$$

Tal problema (P_w) se dice que es una escalarización del problema (PV) con peso $w > 0$. Por $X(w)$ se denota el conjunto de soluciones óptimas del problema (P_w), cuyo dual es:

$$(D_w) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} \max & b^\top y & & \\ \text{sujeto a :} & A^\top y & \leq & C^\top w \\ & y & \geq & 0. \end{array} \right.$$

El conjunto de las soluciones óptimas del problema (D_w) se denota por $Y(w)$.
El teorema siguiente nos entrega varias condiciones necesarias y suficientes para que un punto $\overline{x} \in K$ sea una solución eficiente del problema (PV). La parte (d) da una técnica de escalarización para resolver el problema (PV), dando lugar al "*método de la ponderación*".

Teorema 5.2. *Sea* $\overline{x} \in K$*. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\overline{x} \in E$;

(b) $\exists\, \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0,\ \exists\, \overline{y} \in I\!R^m,\ \overline{y} \geq 0:$
$$(C\overline{x})^\top \overline{w} = b^\top \overline{y},\ A^\top \overline{y} \leq C^\top \overline{w};$$

(c) $\exists\, \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0,\ \exists\, \overline{y} \in I\!R^m,\ \overline{y} \geq 0:$
$$\overline{x} \in X(\overline{w}),\ \overline{y} \in Y(\overline{w});$$

(d) $\exists\, \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0:\ \overline{x} \in X(\overline{w})$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Se considera el problema de optimización lineal

$$\text{(5.6)} \qquad \begin{array}{ll} \max & 0^\top x + 0^\top u + \mathbf{1}^\top z \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} A & -I_m & 0 \\ C & 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ C\overline{x} \end{pmatrix} \\ & x \geq 0,\ u \geq 0,\ z \geq 0, \end{array}$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector en $I\!R^k$, cuyas componentes son todas 1, I_m es la matriz identidad de orden m, e I_k la matriz identidad de orden k. Teniendo en cuenta que $\overline{x}$ es una solución eficiente de (PV), no es difícil chequear que $(\overline{x}, A\overline{x} - b, 0)$ es solución óptima del problema (5.6) (ver Ejercicio 5.1) y, por lo tanto, su valor óptimo es cero. En consecuencia, el problema dual de (5.6) es

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{array}{ll} \min & b^\top(-y) + (C\overline{x})^\top w \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ -I_m & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ w \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

también tiene solución óptima, digamos $(\overline{w}, \overline{y})$, y cuyo valor óptimo coincide con el del problema (5.6), es decir,

$$(C\overline{x})^\top \overline{w} + b^\top(-\overline{y}) = 0.$$

Además, se tiene $A^\top \overline{y} \leq C^\top \overline{w}$ y $\overline{w} \geq \mathbf{1}$, lo que demuestra (b).

$(b) \Longrightarrow (c)$: Veamos ahora que $\overline{x}$ es solución óptima del problema $(P_{\overline{w}})$. En efecto, si x es cualquier solución factible de $(P_{\overline{w}})$, es decir, $x \in K$, entonces por (b) se obtiene

$$\overline{w}^\top Cx = (Cx)^\top \overline{w} = x^\top C^\top \overline{w} \geq x^\top A^\top \overline{y} = (Ax)^\top \overline{y} \geq b^\top \overline{y} = (C\overline{x})^\top \overline{w} = \overline{w}^\top C\overline{x},$$

lo que demuestra $\overline{x} \in X(\overline{w})$. Se usa el Teorema 4.11 y (b), para concluir que $\overline{y} \in Y(\overline{w})$.

$(c) \Longrightarrow (d)$: Es directa.

$(d) \Longrightarrow (a)$: Si $\overline{x}$ no es solución eficiente para (PV), entonces existe $x \in K$, tal que $Cx - C\overline{x} \leq 0$ y $Cx - C\overline{x} \neq 0$. Esto implica $\overline{w}^\top(Cx - C\overline{x}) < 0$, contradiciendo el hecho que $\overline{x} \in X(\overline{w})$. $\square$

Observación 5.1. De la Parte (b) del Teorema 5.2 se desprende que

$$\overline{x}^\top(A^\top\overline{y} - C^\top\overline{w}) = 0,$$

de donde,

$$\overline{x}_j(A^\top\overline{y} - C^\top\overline{w})_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Otra manera de escribir la equivalencia entre (a) y (d) se expresa en el corolario siguiente, el cual afirma que todas las soluciones eficientes de (PV) se pueden encontrar resolviendo (P_w), para algún $w > 0$. La manera de construir $w > 0$ aparece en la demostración del Teorema 5.2 y tiene que ver con el Ejercicio 5.1 de más adelante.

Corolario 5.3. *Dado el problema (PV) con $K \neq \emptyset$. Se tiene*

$$E = \bigcup\{X(w) : \ w > 0\},$$

es decir, cada solución eficiente del problema (PV) es solución óptima del problema (P_w), para algún $w > 0$, y que cada solución óptima de (P_w), $w > 0$, da lugar a una solución eficiente de (PV).

Ejercicio 5.1. Dado $\bar{x} \in K$, demostrar que $\bar{x}$ es una solución eficiente del problema (PV), si y sólo si $(\bar{x}, A\bar{x} - b, 0)$ es una solución óptima del problema de optimización lineal escalar (5.6).
Sugerencia: Una implicación aparece en la demostración del Teorema 5.2. Para el otro sentido, suponer, por el contrario que $\bar{x} \notin E$; luego, existe $x \in K$, tal que $Cx - C\bar{x} \leq 0$ y $Cx - C\bar{x} \neq 0$. Llegar a un absurdo probando que $(x, Ax - b, C\bar{x} - Cx)$ es factible para (5.6).

El teorema anterior nos provee de un método para resolver el problema lineal multiobjetivo, estudiando problemas de optimización lineal escalar (donde podemos emplear toda la maquinaria desarrollada en los capítulos anteriores). Debido a la forma del conjunto $K = \{x \in I\!R^n : \ Ax \geq b,\ x \geq 0\}$, suponiendo que no es vacío, se tiene garantizada la resolución de cada problema (P_w), en el sentido que éste tiene solución óptima o posee valor óptimo $-\infty$, tal como afirma el Teorema 2.17.
En la práctica se elige un conjunto de valores para $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ y se resuelve el problema correspondiente (P_w), generando de esta manera un subconjunto de soluciones eficientes. Sin embargo, no se puede asegurar, a priori, que cada valor de w entregue diferentes soluciones eficientes del problema (PV), tal como el ejemplo de más adelante lo muestra.

Cuando estudiamos el problema de minimización en los capítulos anteriores nos damos cuenta que el valor óptimo es único, es decir, el valor de la función objetivo en cualquier solución óptima es el mismo, e igual al valor mínimo. Esto no ocurre en el caso de problemas de optimización multiobjetivo. En virtud de esto, se introduce la "*línea de eficiencia*" del problema (PV), la cual se define como el conjunto:

$$\mathcal{L} \doteq \{C\overline{x} \in I\!R^k : \ \overline{x} \text{ es solución eficiente de } (PV)\ \}.$$

Para el estudio de esta línea es conveniente tener presente la expresión (5.5):

$$C(K) \cap (C\overline{x} - I\!R^k_+) = \{C\overline{x}\}.$$

Ejemplo 5.1. Resolver el problema

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \min & Cx & \\ \text{sujeto a}: & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right.$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El conjunto factible $K = \{x \in I\!R^2 : \ Ax \geq b. \ x \geq 0\}$ se ilustra en la Figura 5.4

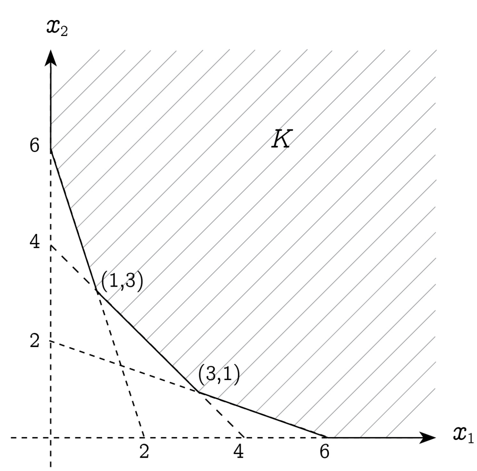


Figura 5.4. Conjunto factible

mientras que su imagen a través de C, es decir, $C(K)$ se muestra en la Figura 5.5

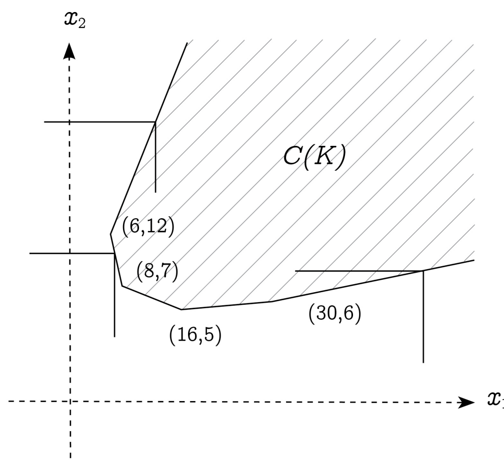


FIGURA 5.5. Imagen del conjunto factible

Luego, teniendo en cuenta (5.5), se concluye que

$$E = \mathrm{co}(\{(0,6),(1,3)\}) \cup \mathrm{co}(\{(1,3),(3,1)\}).$$

Por lo tanto, la línea de eficiencia asociada es

$$\mathcal{L} = \mathrm{co}(\{(6,12),(8,7)\}) \cup \mathrm{co}(\{(8,7),(16,5)\}).$$

Se va a encontrar ahora los valores de w para los cuales la solución eficiente $(0,6)$ es solución óptima de (P_w).
De las igualdades de la Parte (b) del Teorema 5.2, y teniendo en cuenta (5.8), resulta

$$6\overline{w}_1 + 12\overline{w}_2 = 6\overline{y}_1 + 4\overline{y}_2 + 6\overline{y}_3,$$

$$5\overline{w}_1 + \overline{w}_2 \geq 3\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3,$$

$$\overline{w}_1 + 2\overline{w}_2 = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + 3\overline{y}_3,$$

con $\overline{w}_i > 0$, $i = 1,2$, y $\overline{y}_j \geq 0$, $j = 1,2,3$. De las dos igualdades precedentes, se obtiene

$$\overline{y}_2 = \overline{y}_3 = 0.$$

Luego, $\overline{y}_1 = \overline{w}_1 + 2\overline{w}_2$. Esto, junto a la desigualdad anterior, nos da

$$2\overline{w}_1 \geq 5\overline{w}_2. \tag{5.9}$$

En consecuencia, el conjunto de $\overline{w} \in I\!R^2$, para los cuales $(0,6)$ es solución óptima de $(P_{\overline{w}})$, es

$$\{(\overline{w}_1, \overline{w}_2) \in I\!R^2 : \ \overline{w}_1 > 0, \ \overline{w}_2 > 0, \ 2\overline{w}_1 \geq 5\overline{w}_2 \ \}.$$

Ejercicio 5.2. En referencia al Ejemplo 5.1, encontrar todos los valores w para los cuales $(2,2)$ es solución óptima de (P_w). Hacer lo mismo para las soluciones eficientes $(1,3)$ y $(3,1)$.
Respuesta: use también (5.8); para $(2,2)$ se obtiene el conjunto

$$\{(w_1, w_2) \in I\!R^2 : \ w_1 > 0, \ w_2 > 0, \ 4w_1 = w_2 \ \}.$$

A continuación se establece una caracterización de la no vacuidad del conjunto (eventualmente no acotado) de las soluciones eficientes del problema (PV), la cual reduce el problema de existencia de solución para el problema (PV) a un problema algebraico. Escribimos

$$C^\top = ((C^1)^\top \ (C^2)^\top \ \ldots \ (C^k)^\top),$$

donde C^i representa la fila i-ésima de la matriz C.

Teorema 5.4. *Dado el problema (PV) con $K \neq \emptyset$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $E \neq \emptyset$;
(b) $d \geq 0, \ Ad \geq 0, \ Cd \leq 0 \Longrightarrow Cd = 0$;
(c) $d \geq 0, \ Ad \geq 0, \ Cd \leq 0 \Longrightarrow (C^1 + C^2 + \cdots + C^k)d = 0$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Si $E \neq \emptyset$, entonces $X(\overline{w}) \neq \emptyset$, para algún $\overline{w} > 0$, por el corolario anterior. Luego, aplicando el Teorema 2.17, y teniendo en cuenta la Observación 2.5, se obtiene

$$(Cd)^\top \overline{w} = (C^\top \overline{w})^\top d \geq 0 \ \forall \ d \geq 0, \ Ad \geq 0.$$

Puesto que $\overline{w} > 0$, lo anterior implica

$$d \geq 0, \ Ad \geq 0, \ Cd \leq 0 \Longrightarrow Cd = 0.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$: Esto es inmediato.
$(c) \Longrightarrow (a)$: (c) puede escribirse de modo equivalente como

$$d \geq 0, \ Ad \geq 0, \ Cd \leq 0, \ (C^1 + C^2 + \cdots + C^k)d \leq 0 \Longrightarrow (C^1 + C^2 + \cdots + C^k)d = 0,$$

puesto que la desigualdad $(C^1 + C^2 + \cdots + C^k)d = 0$ es una consecuencia de $Cd \leq 0$. Fijado $x_0 \in K$, es decir, $Ax_0 \geq b$ y $x_0 \geq 0$, por el Teorema 2.17, el problema

$$(Q_{x_0}) \qquad \left\{ \begin{array}{cc} \min & (\sum_{i=1}^k C^i)x \\ \text{sujeto a :} & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \\ & Cx \leq Cx_0, \end{array} \right.$$

tiene una solución óptima $\overline{x}$. Se demostrará que $\overline{x}$ es solución eficiente del problema (PV). En efecto, si no lo fuese existiría $x \in K$, tal que

$$Cx - C\overline{x} \leq 0, \ \text{y} \ Cx - C\overline{x} \neq 0. \qquad (5.10)$$

Como $C\overline{x} \leq Cx_0$, entonces $Cx \leq Cx_0$ y, por lo tanto, x es factible para el problema (Q_{x_0}). Además, de (5.10), es fácil deducir que

$$(\sum_{i=1}^{k} C^i)x < (\sum_{i=1}^{k} C^i)\overline{x}.$$

Esto no puede suceder si $\overline{x}$ es solución óptima de (Q_{x_0}). En consecuencia, $\overline{x} \in E$. $\square$

Se denota por $Z(x_0)$ el conjunto de las soluciones óptimas del problema (Q_{x_0}), con $x_0 \in K$, donde

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b, \; x \geq 0\}.$$

La demostración del teorema precedente permite enunciar el resultado siguiente, que es análogo al Corolario 5.3.

Corolario 5.5. *Dado el problema (PV) con $K \neq \emptyset$. Se tiene:*

$$E = \bigcup \{Z(x_0) : \; x_0 \in K\},$$

en otras palabras, x es una solución eficiente, si y sólo si x es una solución óptima de (Q_{x_0}), para algún $x_0 \in K$.

Ejercicio 5.3. Probar que $E \neq \emptyset$, si y sólo si existe $w \in \mathbb{R}^k$, $w > 0$, tal que $w^\top Cd \geq 0$, para todo $d \in K^\infty$.
Sugerencia: use resultados del Capítulo 2.

El próximo resultado presenta una condición (algebraica) necesaria para que el conjunto solución del problema (PV) no sea vacío y acotado.

Corolario 5.6. *Dado el problema (PV) con $K \neq \emptyset$, considere las afirmaciones siguientes:*

- (a) *$E \neq \emptyset$ y acotado*;
- (b) *$d \geq 0$, $Ad \geq 0$, $Cd \leq 0 \Longrightarrow d = 0$*;
- (c) *$Z(x_0) \neq \emptyset$ y acotado, para todo $x_0 \in K$.*

Se tiene $(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c)$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Sea $d \geq 0$, $Ad \geq 0$, $Cd \leq 0$. Por el teorema anterior se tiene $Cd = 0$. Fijamos $\overline{x} \in E$, luego $\overline{x} + \lambda d \in K$, para todo $\lambda > 0$. Se demostrará que $\overline{x} + \lambda d \in E$, para todo $\lambda > 0$. En efecto, supongamos que existe $x \in K$, tal que

$$Cx - C(\overline{x} + \lambda d) \leq 0 \text{ y } Cx - C(\overline{x} + \lambda d) \neq 0.$$

Como $Cd = 0$, lo anterior se reduce a

$$Cx - C\overline{x} \leq 0 \text{ y } Cx - C\overline{x} \neq 0.$$

De donde se concluye que $\overline{x}$ no sería una solución eficiente para el problema (PV). Por lo tanto, $\overline{x} + \lambda d \in E$, para todo $\lambda > 0$, lo que no puede suceder si $d \neq 0$, puesto que E es acotado.

$(b) \Longleftrightarrow (c)$: Esto es una consecuencia del Corolario 2.20 aplicado al problema (Q_{x_0}), considerando que la expresión

$$d \geq 0,\ Ad \geq 0,\ Cd \leq 0 \Longrightarrow d = 0$$

es equivalente a

$$d \geq 0,\ Ad \geq 0,\ Cd \leq 0,\ (C^1 + C^2 + \cdots + C^k)d \leq 0 \Longrightarrow d = 0.$$

$\square$

El ejemplo siguiente muestra que la implicación $(b) \Longrightarrow (a)$ es falsa en general.

Ejemplo 5.2. Se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \min & Cx & \\ \text{sujeto a}: & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0, \end{array} \right. \tag{5.11}$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$K \doteq \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 :\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Así (ver Figura 5.6),

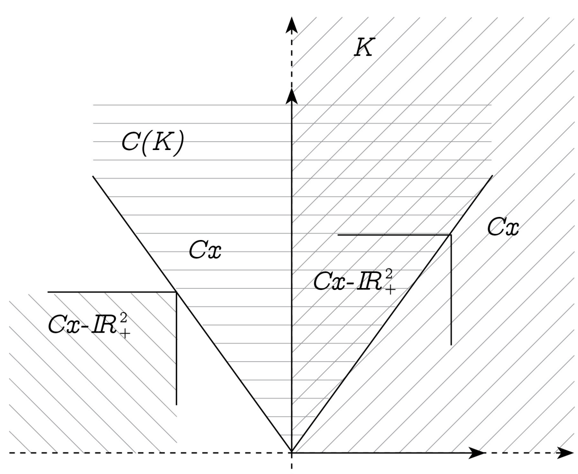


FIGURA 5.6. Conjuntos K y $C(K)$ del Ejemplo 5.2

$$C(K) = \{(x_1 - x_2, x_1 + x_2) \in I\!R^2 :\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Teniendo en cuenta (5.5), no es difícil deducir que la línea eficiente es

$$\mathcal{L} = \{(-x_2, x_2) \in I\!R^2 : \; x_2 \geq 0\},$$

y, por lo tanto, el conjunto de las soluciones eficientes del problema multiobjetivo es:

$$E = \{(0, x_2) \in I\!R^2 : \; x_2 \geq 0\},$$

el cual no es un conjunto acotado. Sin embargo, al resolver el sistema de desigualdades

$$d \geq 0, \; Ad \geq 0, \; Cd \leq 0$$

se obtiene que necesariamente $d = 0$, es decir, la expresión (b) del Corolario 5.6 se cumple, pero no (a). El mismo corolario permite concluir que el problema (Q_{x_0}) posee solución óptima, para todo $x_0 \geq 0$; más concretamente, el conjunto solución de dicho problema es acotado y no vacío para cualquier $x_0 \geq 0$.
Este ejemplo también ilustra una situación en la que

$$\min(P_w) = -\infty$$

para muchos valores $w > 0$. En efecto, dado $w > 0$, el problema (P_w) correspondiente a (5.11) se escribe como:

$$\text{(5.12)} \qquad \begin{array}{ll} \min & (w_1 + w_2)x_1 + (w_2 - w_1)x_2 \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \end{array}$$

el cual tiene valor óptimo finito, si y sólo si $w_1 \leq w_2$. Concretamente, si $w_1 = w_2 > 0$, el conjunto de soluciones óptimas de (5.12) es $\{(0, x_2) \in I\!R^2_+ : \; x_2 \geq 0\}$; si $0 < w_1 < w_2$ el conjunto solución de (5.12) se reduce al origen, mientras que si $w_1 > w_2 > 0$, el valor óptimo es $-\infty$.

Ejemplo 5.3. Vamos a aplicar el Teorema 5.4 para determinar si el problema del Ejemplo 5.1 tiene solución. El lado izquierdo de la Parte (b) de dicho teorema se escribe como

$$d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, \; 3d_1 + d_2 \geq 0, \; d_1 + d_2 \geq 0, \; d_1 + 3d_2 \geq 0, \; 5d_1 + d_2 \leq 0, \; d_1 + 2d_2 \leq 0.$$

De donde se deduce que $d_1 = d_2 = 0$. En consecuencia, el problema del Ejemplo 5.1 tiene solución y, por el Corolario 5.6, el conjunto de las soluciones del problema (Q_{x_0}) es acotado y no vacío, para todo $x_0 \in K$.

Analizamos ahora el problema

$$(PV_0) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & Cx & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0. \end{array} \right.$$

Sea el conjunto factible

$$K_0 \doteq \{x \in I\!R^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}.$$

De modo análogo al problema (PV), dado $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in I\!R^k$, se considera el problema de minimización escalar:

$$(P_w^0) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \min & (C^\top w)^\top x & \\ \text{sujeto a :} & Ax & = b \\ & x & \geq 0. \end{array} \right.$$

También al problema (P_w^0) se le conoce como una escalarización del problema (PV_0) con peso $w > 0$. Por $X_0(w)$ se denota el conjunto de soluciones del problema (P_w^0), cuyo dual es:

$$(D_w^0) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \max & b^\top y & & \\ \text{sujeto a :} & A^\top y & \leq & C^\top w \\ & y & \text{sin} & \text{restricción.} \end{array} \right.$$

El conjunto de las soluciones óptimas del problema (D_w^0) se denota por $Y_0(w)$. El teorema siguiente es el análogo del Teorema 5.2 para el problema (PV_0).

Teorema 5.7. *Sea $\overline{x} \in K_0$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\overline{x} \in E$;

(b) $\exists\ \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0,\ \exists\ \overline{y} \in I\!R^m$:

$$(C\overline{x})^\top \overline{w} = b^\top \overline{y},\ \ A^\top \overline{y} \leq C^\top \overline{w};$$

(c) $\exists\ \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0,\ \exists\ \overline{y} \in I\!R^m$:

$$\overline{x} \in X_0(\overline{w}),\ \ \overline{y} \in Y_0(\overline{w});$$

(d) $\exists\ \overline{w} \in I\!R^k,\ \overline{w} > 0 :\ \overline{x} \in X_0(\overline{w})$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$: Se considera el problema de optimización lineal

$$(5.13) \qquad \begin{array}{ll} \max & 0^\top x + \mathbf{1}^\top z \\ \text{sujeto a :} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ C\bar{x} \end{pmatrix} \\ & x \geq 0,\ z \geq 0, \end{array}$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector en $I\!R^k$ cuyas componentes son todas 1, I_k la matriz identidad de orden k. Teniendo en cuenta que $\overline{x}$ es una solución eficiente de (PV_0), no es difícil chequear que $(\overline{x}, 0)$ es solución óptima del problema (5.13) y, por lo tanto, su valor óptimo es cero. Luego, proseguir con el mismo razonamiento del Teorema 5.2. $\square$

Ejercicio 5.4. Dado $\bar{x} \in K_0$, demostrar que $\bar{x}$ es una solución eficiente del problema (PV_0), si y sólo si $(\bar{x}, 0)$ es una solución óptima del problema de optimización lineal escalar (5.13).

Ejercicio 5.5. Enunciar y demostrar los resultados análogos al Teorema 5.4 y al Corolario 5.6 para el problema (PV_0).

Notas adicionales

Esta es una disciplina que aún está en desarrollo y actualmente está recibiendo un fuerte impulso de los investigadores. Una buena referencia es el libro de Ehrgott [**E**], donde se presenta un estudio sistemático de la teoría de existencia de soluciones para problemas de optimización multiobjetivo (no necesariamente lineales) y caracterización de las soluciones eficientes. Ahí también existen capítulos dedicados al estudio del método simplex en optimización multiobjetivo lineal. Además, se puede consultar el libro [**F**] para una interpretación sobre el problema escalarizado (P_w) asociado a un problema lineal. El libro [**N**] tiene un capítulo sobre optimización multiobjetivo convexo donde además se establecen algunas condiciones de optimalidad. En los dos primeros libros el lector encontrará ejemplos suplementarios.

Los interesados podrán encontrar numerosa literatura sobre la vida y obra de Vilfredo Pareto en internet: simplemente escribir tal nombre en cualquiera de los buscadores conocidos.

5.4 Problemas

1. Una pareja recien casada desea comprar un auto nuevo y tiene que decidir entre cuatro modelos que el mercado les ofrece: un Toyota, un Hyundai, un Nissan, y un Peugeot (éstos ya satisfacen sus gustos). La pareja acordó considerar las tres siguientes características para tomar la decisión: precio, consumo de combustible y mantenimiento. La tabla adjunta ilustra tales características en detalle para cada auto (los datos numéricos no necesariamente obedecen a la realidad).

	Toyota	Hyundai	Nissan	Peugeot
Precio (10^6 Pesos)	7.5	7.2	7.8	8.0
Rend. (km/litro)	14	15	14.5	13
Mant. (10^4 Pesos/semestre)	6	5.2	5.8	6.2

Determinar un auto eficiente para la familia, en base a sus preferencias si:

(a) los padrinos de matrimonio les prometen regalar el auto;

(b) el tío millonario del marido, quien posee una gasolinera, les dona el combustible por el resto de sus vidas;

(c) ellos deciden comprar y mantenerlo por su cuenta.

2. Encontrar todas las soluciones eficientes del problema (PV) con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

y los valores correspondientes de w para los cuales tal solución eficiente es óptima para (P_w).

3. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$, funciones cualesquiera definidas en un conjunto $K \subseteq I\!R^n$. Se dice que $\overline{x} \in K$ es una solución eficiente del problema

$$(PV_g) \qquad \begin{cases} \min & (f_1(x), f_2(x), \quad \ldots \quad , f_k(x)) \\ \text{sujeto a :} & x \in K \end{cases}$$

si no existe $x \in K$, tal que:

$$f_j(x) \leq f_j(\overline{x}), \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots, k, \text{ y}$$
$$f_i(x) < f_i(\overline{x}), \quad \text{para algún } i.$$

(a) Probar que si $\overline{x}$ es solución óptima del problema

$$\min_{x \in K} \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x)$$

para $w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $\overline{x}$ es una solución eficiente de (PV_g).

(b) Probar que si $\overline{w} \geq 0$, $\overline{w} \neq 0$, y $\overline{x} \in K$ es la única solución óptima del problema en (a) con $w = \overline{w}$, entonces $\overline{x}$ es una solución eficiente de (PV_g).

Bibliografía

[BJS] Bazaraa M. S., Jarvis J. J., Sherali H.D. *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, 2da Edición, Nueva York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.

[B] Beale E.M.L. *Cycling in the dual simplex algorithm*, Naval Res. Logistic Q, 1955, 2, 269 - 276.

[BChD] Bector C.R. , Chandra S. , Dutta J. *Principles of optimization theory*, Alpha Science International Ltd Press., Harrow, U.K., 2005.

[DT] Dantzig G. B., Thapa M. N. *Linear programming*, Springer Series in Operation Research, 1997.

[E] Ehrgott M. *Multicriteria optimization*, Springer, 2da Edición, 2005.

[EGSMW] Eppen G.D. , Gould F.J. , Schmidt C.P., Moore J.H., Weatherfood L.R. *Investigación de operaciones en la Ciencia Administrativa*, Pearson, Prentice Hall 5ta Edición, 2000.

[F] Franklin J. *Methods of Mathematical Economics*, Springer-Verlag, Nueva York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[G] Gil O. *Excursiones por el Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, J.C Sáez Editor, Santiago, 2011.

[KB] Kolman B., Beck R.E. *Elementary linear programming with applications* , Academic Press, 2da Edición, San Diego, Nueva York, Boston, Londres, 1995.

[KS1] Kotiah C.T., Steinberg D.I. *Ocurrences in a class of linear programming models*, Commun. A.C.M., 1977, 20, 107 - 112.

[KS2] Kotiah C.T., Steinberg D.I. *On the possibility of cycling with the simplex method*, Operation research, 1978, 26, 374 - 375.

[HL] Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*, Springer-Verlag, Nueva York, Heidelberg, Berlin, 1993.

[N] Sanjurjo V.N. *Teoría de la optimización, Aula Abierta*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2da Edición, Madrid, 1999.

[R] Rockafellar R. T. *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.

[S] Salazar J.J. *Programación Matemática*, Ediciones Díaz de Santos, S.A., 2001.

[T] Taha H.A. *Investigación de Operaciones*, Pearson Prentice Hall, 2004.

Índice de figuras

Índice de Términos