Estudio de casos en la formación de profesores de matemática:
Integrando matemática y pedagogía

ISBN: 978-956-306-078-2
Registro de Propiedad Intelectual: 200.535
Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas.
Diseño: Jessica Jure de la Cerda.
Diseño de Ilustraciones: Cristina Felmer Plominsky, Catalina Frávega Thomas.
Diagramación: Pedro Montealegre Barba, Francisco Santibáñez Palma.
Financiamiento: Proyecto Fondef D05I-10211.

Datos de contacto para la adquisición de los libros:
Para Chile:
1. En librerías para clientes directos.
2. Instituciones privadas directamente con:
   Juan Carlos Sáez C.
   Director Gerente
   Comunicaciones Noreste Ltda.
   J.C. Sáez Editor
   jcsaezc@vtr.net
   www.jcsaezeditor.blogspot.com
   Oficina: (56 2) 3260104 - (56 2) 3253148
3. Instituciones públicas o fiscales: www.chilecompra.cl

Desde el extranjero:
1. Liberalia Ediciones: www.liberalia.cl
2. Librería Antártica: www.antartica.cl
3. Argentina: Ediciones Manantial: www.emanantial.com.ar
4. Colombia: Editorial Siglo del Hombre
   Fono: (571) 3377700
5. España: Tarahumara, tarahumara@tarahumaralibros.com
   Fono: (34 91) 3656221
6. México: Alejandría Distribución Bibliográfica, alejandria@alejandrialibros.com.mx
   Fono: (52 5) 556161319 - (52 5) 6167509
7. Perú: Librería La Familia, Avenida República de Chile # 661
8. Uruguay: Dolmen Ediciones del Uruguay
   Fono: 00-598-2-7124857

Estudio de casos en la formación de profesores de matemática: Integrando matemática y pedagogía
| Cristián Reyes Reyes Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
email@dim.uchile.cl

ESTA PRIMERA EDICIÓN DE 2.000 EJEMPLARES
Se terminó de imprimir en febrero de 2011 en WORLDCOLOR CHILE S.A.

ESTUDIO DE CASOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA: INTEGRANDO MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA

Cristián Reyes Reyes

Universidad de Chile

Dirección del Proyecto Fondef D05I-10211
Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática

Patricio Felmer, Director del Proyecto
Universidad de Chile.

Leonor Varas, Directora Adjunta del Proyecto
Universidad de Chile.

Salomé Martínez, Subdirectora de Monografías
Universidad de Chile.

Cristián Reyes, Subdirector de Estudio de Casos
Universidad de Chile.

Presentación

Este libro es el resultado de una tarea creativa de un numeroso equipo de académicos de seis universidades, que combinó de un modo único lo colectivo y lo personal, conocimientos y experiencias, teoría y práctica, y por sobre todo, una extraordinaria disposición intelectual y afectiva de apertura, de plantearse preguntas nuevas cuyas respuestas se adivinaban escurridizas, de sumergirse en la complejidad de enseñar matemáticas sin salvavidas que simplificaran esta tarea, cuya desafiante riqueza es el verdadero corazón de este empeño.

En rigor, se trata del producto de un proyecto FONDEF, planificado con anticipación y detalle, cuyos atributos se comprometieron por anticipado con cuidadosa precisión. Esta condición ilumina varias de sus características pero oculta otras.

El proyecto FONDEF "Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática", desde donde se origina este libro, generó una colección de monografías de temas matemáticos para la formación disciplinar de los profesores de matemática y varios Talleres (cursos o seminarios) de Estudio de Casos que sirvieron a la preparación para enseñar matemática de futuros profesores y también de profesores en ejercicio. En estas tareas se compartieron una visión del problema— la preparación para enseñar matemática— y una metodología de trabajo. La clave metodológica se trasmite con facilidad: participación de usuarios en todo el proceso de desarrollo. Esta simpleza, sin embargo, no da cuenta de los imprevisibles caminos a los que esta opción conduce.

Las ideas que inspiran el proyecto y marcan sus productos se enraízan en una particular concepción de la enseñanza de la matemática, que reconoce en primer lugar su enorme complejidad. Esta complejidad incluye desafíos que se originan en una mirada respetuosa de la profundidad y dificultad de los contenidos matemáticos que componen el currículo escolar, más allá del cómo enseñarlos. ¿Qué significa exactamente la pendiente de una recta? ¿Qué vale como una definición exacta y precisa de ella? ¿De donde sale que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1? ¿Es esto siempre válido? ¿Qué relación existe entre el ángulo que forman dos rectas y el producto de sus pendientes, en otros casos? Estas preguntas tratan de matemáticas, y de matemáticas escolares, no de matemáticas avanzadas. Por otra parte, se refieren al contenido, no a la forma de enseñarlo. Y sus respuestas no son obvias. Es más, se trata de preguntas "tontas", sin ningún interés, en cualquier otro contexto distinto al de la enseñanza. Pero en el contexto de una clase no solo pueden aparecer; su aparición debería ser bienvenida. Se trata de preguntas genuinas, cuyas respuestas no estaban hechas antes de plantear la pregunta, justamente porque no se trata de un contenido a “aprender”. Abordar estas preguntas en una clase de matemática corresponde a “hacer matemáticas”, del mismo modo en que trabajan los matemáticos, lo que corresponde a una cima de la educación matemática para todos y para la vida.

En segundo lugar esta complejidad se refiere a la densidad de la realidad en la que ocurre, o se produce, la enseñanza de la matemática: el lenguaje utilizado, los ejemplos, las metáforas seleccionadas, las asociaciones y motivaciones de los alumnos, sus intereses y preocupaciones, la organización escolar, el tiempo disponible para despejar una duda o aclarar un concepto, el escenario de la clase, la variedad de personalidades y liderazgos que se encuentran en un curso, las relaciones entre colegas, el prestigio profesional que se pone en juego, la colaboración entre pares. Cada uno de estos elementos puede ser estudiado por separado y en el marco de un curso o actividad académica bien sustentada teóricamente. Pero en la realidad estos factores se mezclan, se trenzan, se superponen y combinan de modos imprevistos. La experiencia acumulada por años de ejercicio en aula no ofrecerá jamás todas las respuestas a situaciones conocidas, que se repiten sin más. Pero dará confianza y permitirá el desarrollo de herramientas con las cuales se pueden abordar sin angustia los desafíos nuevos, que nada ni nadie evitarán que aparezcan constantemente.

En los Casos de Estudio que aquí se presentan se intentó poner de manifiesto algunas complejidades de la matemática que se enseña a nivel escolar y de exponer a los estudiantes de pedagogía a la sensación del roce que opone a la enseñanza de la matemática esa densa y rugosa realidad en la que de verdad ocurre y que es el sitio único donde se probará la calidad de la preparación lograda y su eficacia. Así fue propuesto, diseñado y planificado en el mencionado proyecto FONDEF.

Se planificó también el modo en que se haría, el apoyo de expertos internacionales, los numerosos pilotajes, la participación de usuarios, la diversidad institucional y profesional del equipo desarrollador. Si bien estas opciones y el plan para llevarlas a cabo resultan imprescindibles para comprender este libro de Casos, no son suficientes ni reflejan con justicia su espíritu ni el aliento que lo atraviesa.

La elaboración de los Casos de Estudio y sus numerosas puestas en escena fueron una aventura de aprendizaje constante. Se puede adivinar que cada Caso de Estudio fue escrito y re-escrito muchas veces; que la versión final tiene muchas manos y que además de las opiniones de los autores incorpora la experiencia y las opiniones de alumnos de pedagogía que los analizaron y de sus profesores. Pero más allá de la versión escrita final, cada nueva discusión de un mismo Caso de Estudio con diferentes grupos de estudiantes de pedagogía hace aparecer nuevas aristas y aspectos imprevistos e interesantes. Incluso los experimentados y talentosos expertos extranjeros que colaboraron con este proyecto compartieron el entusiasmo de descubrir nuevas riquezas y proyecciones en cada nueva ejecución del Taller de Casos.

Este libro es más que un libro, más que la historia de su gestación y más que la suma de sus autores y aportes diversos. El valor de este libro solo se aprecia en plenitud cuando se lo somete Caso a Caso al debate colectivo; cuando estos retazos de realidad relatada se juntan con personas que se preparan para enseñar matemática con la honestidad, la responsabilidad y la emoción de quienes emprenderán la conquista de una alta cumbre: que todos sus alumnos accedan a aquella parte de la promesa de la educación que aporta la matemática, desde las visiones de mundo que porta hasta las capacidades para la vida moderna que desarrolla.

María Leonor Varas

Agradecimientos

Agradecemos a todos quienes han hecho posible la realización de este proyecto Fondef: “Herramientas para la formación de Profesores de Matemáticas”. A Cristián Cox, quien apoyó con decisión la idea original y contribuyó de manera crucial para obtener la participación del Ministerio de Educación como institución asociada. Agradecemos a Carlos Eugenio Beca por su apoyo durante toda la realización del proyecto. A Rafael Correa, Edgar Kausel y Juan Carlos Sáez, miembros del Comité Directivo. Agradecemos a Rafael Benguria, Servet Martínez y Fidel Oteiza, miembros del Comité Editorial de la colección, quienes realizaron valiosos aportes a los textos. A José Sánchez, entonces Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción y a Guillermo Marshall, quién fuera Decano de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. A ambos agradecemos por su decisiva contribución para lograr la integridad de la colección de 15 monografías. Agradecemos a Víctor Campos, Ejecutivo de Proyectos de Fondef, por su colaboración y ayuda en las distintas etapas del proyecto.

En este volumen manisfestamos nuestro especial agradecimiento a Jaime San Martín, director del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, por su constante apoyo durante toda la realización de este proyecto. Más aun, su apoyo decidido y generoso que permitió que esta monografía sea parte de la colección. También queremos reconocer su valioso aporte a la educación manifiestado desde la dirección del Centro de Modelamiento Matemático, el cual ha permitido un fuerte impulso al involucramiento de matemáticos activos en esta importante tarea.

Agradecemos también a Bárbara Ossandón de la Universidad de Santiago, a Jorge Ávila de la Universidad Católica Silva Henríquez, a Víctor Díaz de la Universidad de Magallanes, a Patricio Canelo de la Universidad de Playa Ancha en San Felipe y a Osvaldo Venegas y Silvia Vidal de la Universidad Católica de Temuco, quienes hicieron posible las visitas que realizamos a las carreras de pedagogía en matemática. Agradecemos a todos los evaluadores, alumnos, académicos y profesores -cuyos nombres no incluimos por ser más de una centena- quienes entregaron sugerencias, críticas y comentarios a los autores, que ayudaron a enriquecer cada uno de los textos.

Agradecemos a Marcela Lizana por su impecable aporte en todas las labores administrativas del proyecto, a Aldo Muzio por su colaboración en la etapa de evaluación, y también a Anyel Alfaro por sus contribuciones en la etapa final del proyecto y en la difusión de los logros alcanzados.

Dirección del Proyecto

Índice General

Prefacio 17

Capítulo 1: Introducción 21

Capítulo 2: Antecedentes 25

2.1 Metodología del estudio de casos 25
2.2 La experiencia del Boston College 26
2.3 La experiencia de la Universidad de Harvard 28

Capítulo3: Nuestra experiencia 31

3.1 Algunas preguntas 31
3.2 La metodología de estudio de casos 33
3.3 Conformación de equipos 37
3.4 La participación de los expertos extranjeros 38
3.5 La elaboración y experimentación de los casos 43

Capítulo 4: Extensión de la metodología 51

4.1 Taller de casos para la formación inicial de profesores de Educación Básica 51

Capítulo 5: El taller de casos para estudiantes de pedagogía en matemática 57

5.1 Antecedentes 57
5.2 Metodología 58
5.3 Facilitación de una sesión de un Taller de casos 64

Capítulo 6: Casos para la formación de profesores de matemáticas de enseñanza media 69

Capítulo 7: Casos para la formación inicial de profesores de enseñanza básica 179

Capítulo 8: Casos para la formación continua de profesores de Matemática 219

Bibliografía 243

Prefacio

Este libro relata y resume la experiencia del proyecto FONDEF[1] "Herramientas para la formación de profesores de matemática" del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile (UCH), durante los años 2007 y 2009, de introducción de la metodología de estudio de casos en seis escuelas de pedagogía del país: Universidad de la Serena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Universidad Católica del Maule, Universidad de Concepción y Universidad de Chile.

Creemos que el destinatario natural del presente libro es un académico de una escuela de pedagogía que desea implementar esta metodología en algún curso de la carrera, o crear un curso dedicado específicamente a desarrollarla. También, hemos pensado en un lector que es académico de una escuela de pedagogía que ya tiene implementada la metodología, pero que requiere ejemplos de casos para llevar a cabo su actividad académica, junto a sugerencias para facilitarlos.

Desde luego, hemos considerado a investigadores que deseen realizar una experiencia como la nuestra —en otras áreas del conocimiento— y a quienes nuestro proyecto pueda resultarles útil y orientador en cuanto a metodología de trabajo, conformación de equipos y pruebas con estudiantes, como un primer acercamiento a resolver un problema respecto a la integración de pedagogía y disciplina, en alguna unidad académica.

Nuestro proyecto introdujo la metodología de estudio de casos, viendo en ella una manera cierta de aportar a la integración de pedagogía y matemática. Basados tanto en estudios sobre la educación en Chile como en nuestra experiencia en proyectos anteriores, observábamos que la integración de ambas disciplinas no estaba aún bien dada; más aún, los propios estudiantes requerían de instancias de reflexión para pensar el tema y analizar con mayor profundidad los desafíos reales de su futuro desempeño en aula.

Dicha metodología consiste en presentar a los estudiantes un relato de 3 a 5 páginas, con el objetivo de que lo lean y luego discutan los puntos centrales que se

[1] FONDEF corresponde a las siglas del Fondo de Fomento de Desarrollo Científico y Tecnológico, organismo dependiente de la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONICYT). Es una agencia del Gobierno de Chile que, vía el financiamiento de proyectos, pretende fortalecer y aprovechar las capacidades científicas y tecnológicas de los centros de investigación nacionales.

presentan. Por lo general, estos puntos centrales representan dos posiciones en conflicto, verosímiles y descritas en forma balanceada, que requieren un reconocimiento profundo de las dificultades propias y del sistema y que, sobre todo, requieren respuestas efectivas que no necesariamente son únicas.

A través de una encuesta realizada a académicos y estudiantes, medimos aspectos como la verosimilitud de los casos, la relevancia de los asuntos tratados, la claridad de la presentación, el balance de las posiciones, la discusión integradora que produce y, finalmente, su aporte a la formación integral del futuro profesor o profesora.

Las opiniones de los y las estudiantes nos obligaron a ajustar tanto nuestros casos como las respectivas guías para los facilitadores; incluso, debimos desechar varios de los casos elaborados, porque la realidad misma no los aceptaba.

Incluimos una descripción de los aspectos centrales de la metodología, una descripción del Taller de casos —con una reseña de las experiencias previas de la metodología de estudio de casos en diferentes ámbitos—, y una detallada descripción de nuestro proyecto en lo que se refiere a la elaboración de casos y pruebas de casos.

Además, entregamos una colección de 11 casos y su respectiva guía del Facilitador, con la intención clara de que puedan ser usadas de manera efectiva en todas las escuelas formadoras de profesores del país, pero también para que se pueda extender a otros sectores del conocimiento escolar.

Hemos incluido una Adenda, que contiene otros ejemplos de casos elaborados para la formación inicial de profesores de Educación Básica, y algunos casos elaborados para la formación continua de profesores de Educación Media.

Creemos que este esfuerzo facilitará que los estudiantes de pedagogía integren diferentes aspectos de la formación en matemática, y reflexionen respecto a la matemática profunda que existe en los tópicos que deberán enseñar. Esperamos que todo ello se traduzca en mejores aprendizajes para nuestras niñas, niños y jóvenes que asisten a establecimientos educacionales de nuestro país.

Este proyecto tuvo éxito gracias a que muchas personas, profesionales y estudiantes, participaron en él con gran compromiso y dedicación. Los talentos y esperanzas de matemáticos y educadores en matemáticas se hicieron presentes para la elaboración y pilotaje de los casos, así como para hacer los ajustes necesarios en ellos y en las guías para los facilitadores.

Las personas nombradas a continuación dedicaron sus esfuerzos a la elaboración de los casos y de las guías para los facilitadores que aparecen en este libro. Además, debieron interrumpir sus cursos habituales para probar nuestros casos en el primer piloto de 2007, y crear un curso extra para realizar nuestro taller en 2008. Así, en la elaboración de casos, pruebas y puesta en escena de los casos para la formación inicial de docentes de matemática de enseñanza media, participaron Eduvina Villagrán, Laura Vega, Michael Neuburg y Gustavo Labbé, de la Universidad de La Serena (ULS); Luisa Aburto, Soledad Montoya y Jaime Mena de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV); Lino Cubillos, Patricio Felmer, Jorge Soto, María Leonor Varas y Cristián Reyes de la Universidad de Chile; María Cecilia Tapia, Soledad Ibaceta y Giovanna Ticchione de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE); María Aravena, Carlos Caamaño y Jorge González Lorca de la Universidad Católica del Maule (UCM); Andrés Ortiz, Eugenio Chandía y César Flores de la Universidad de Concepción (UDEC). A todos estos profesionales, nuestro más profundo agradecimiento por la calidad del trabajo resultante, por el tiempo dedicado y la experiencia puesta a disposición de este proyecto.

Un agradecimiento muy especial para los y las estudiantes de estas escuelas de pedagogía, que tan generosamente participaron de los diferentes talleres pilotos, respondieron encuestas y nos aportaron valiosos comentarios para mejorar nuestros casos y las respectivas guías para el facilitador.

Por otra parte, el proyecto creó extensiones de la metodología de estudio de casos a la formación continua de profesores de matemática, para lo cual se implementó un curso JAP (Jornadas para la Actualización de Profesores) en la Universidad de Chile, donde en una semana de enero de 2009, profesores en ejercicio reflexionaron y discutieron sobre su práctica docente y los conceptos matemáticos y habilidades que esperaban desarrollar en sus estudiantes. Este curso fue dirigido por Jorge Soto y Lino Cubillos y contó con la valiosa ayuda de Carmen Gloria Medina, quien participó activamente en la elaboración de casos, ajuste de los mismos para las necesidades propias del profesorado en ejercicio, en la evaluación del curso y en su conducción. Una experiencia en formación continua se realizó también en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, en un curso de una semana con profesores de primer ciclo básico. La conducción de este curso contó con la participación de Romina Menares.

Otra extensión de la metodología fue realizada para estudiantes de Pedagogía en Enseñanza General Básica con especialización en matemática de segundo ciclo básico, la que estuvo a cargo de los investigadores de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Luisa Aburto, Soledad Montoya y Jaime Mena, quienes crearon nuevos casos y los pilotearon con estudiantes de la carrera, que participaron con mucho entusiasmo de esta experiencia.

En 2009 se realizó una nueva experiencia en la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), con estudiantes de Pedagogía en Enseñanza Básica, a cargo de un equipo liderado por Pierina Zanocco, y en el que participaron Ivette León, Renato Lewin, y Gloria Schwarze como observadora; Jaime Mena (PUCV) como capacitador.

Todo este trabajo contó con la capacitación y seguimiento continuo de dos expertos internacionales: Katherine Merseth de la Universidad de Harvard en EE.UU. y Solomon Friedberg del Boston Collage, también de EE.UU., quienes nos mostraron qué es un buen caso, cómo conducirlo y cuáles son las bondades de la metodología. Nuestro más sincero agradecimiento a ambos.

Agradecemos también a Anyel Alfaro, quien fuera periodista del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, y que colaboró tanto en la difusión de los resultados del proyecto como en la revisión del primer borrador de este libro, también a Josefina Muñoz Valenzuela, quien contribuyó notablemente en la edición de este libro, mejorándolo sustancialmente.

Finalmente, nuestro agradecimiento a Lino Cubillos, de la Universidad de Chile y a Fernando Córdova, de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, quienes comentaron una primera versión de este libro, el cual mejoró notablemente una vez incluidas sus sugerencias.

Capítulo 1: Introducción

En marzo de 2007 se inicia el proyecto FONDEF D05I-10211 “Herramientas para la formación de profesores de matemática” del CMM de la Universidad de Chile. Dichas herramientas consisten en una colección de 14 Monografías de tópicos matemáticos, y en la instalación de la metodología de estudio de casos en seis escuelas de pedagogía en matemática de educación media.

Las Monografías fueron escritas por matemáticos, con especial atención en la matemática de Educación Media (los últimos cuatro cursos previos a la educación universitaria) y en el público joven al cual están dirigidas, que son los futuros profesores de matemática. Con ello se pretendía cubrir una necesidad evidente, como es la falta de textos de matemática en castellano, escritos especialmente para futuros profesores, por especialistas hispanoamericanos y con toda la rigurosidad necesaria.

Por otro lado, el proyecto tenía como meta hacerse cargo, en parte, de una realidad que se apreciaba a nivel nacional (e incluso, internacional): el hecho de que, en general, la matemática y la pedagogía se imparten como dos aspectos inconexos en la formación inicial de profesores. Más aún, con frecuencia, los cursos pedagógicos están a cargo de académicos de una facultad y los cursos matemáticos, de académicos de otra facultad. Estos docentes no necesariamente dialogan o comparten visiones y creencias y, con frecuencia, tampoco coinciden en cuáles son los aspectos relevantes de la formación de profesores de matemática. Cabe destacar que el informe de la OECD[1] hace mención a esta no integración de las diferentes áreas de la formación de un profesor.

De manera fundamental, este proyecto pretendía ser un aporte concreto al logro de dicha integración, creando un taller de estudio de casos en varias escuelas de pedagogía del país. Para ello, convocamos a varios investigadores y académicos de universidades que imparten la carrera de pedagogía en matemática, educadores en matemática y matemáticos. También invitamos a expertos internacionales que han

[1]OECD corresponde a las siglas en inglés de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico. Aquí nos referimos al documento “Revisión de políticas nacionales de educación. Chile”. Centro para la Cooperación con los países no miembros de la OECD. 2004

utilizado esta metodología en la preparación de profesores de secundaria o de profesores ayudantes en primeros años universitarios, con muy buenos resultados.

Solomon Friedberg del Boston College, y Katherine Merseth de la Universidad de Harvard, ambos del estado de Massachussets, EE.UU., nos visitaron en dos ocasiones, para compartir su experiencia en la elaboración de casos y en la puesta en escena de los mismos, con estudiantes reales y con necesidades precisas.

En arduas jornadas de creación, discusión y reflexión, aprendimos a elaborar casos verosímiles, capaces de provocar discusión sobre aspectos importantes de la enseñanza de la matemática. El análisis de los casos y la riqueza de las discusiones nos ayudó a depurar el material, razón por la cual en el libro se recoge menos de un tercio del total de casos que elaboramos, es decir, solamente aquéllos que cumplían con los estándares de calidad que nos autoimpusimos, y que resultaban apropiados para el nivel de reflexión que deseábamos alcanzar.

Los casos fueron probados con estudiantes de las seis escuelas de pedagogía, durante dos meses del segundo semestre del año 2007. El segundo semestre del año 2008, se realizó esta prueba por segunda vez, ocasión en que se desarrolló un taller de estudio de casos que duró un semestre completo, y en el cual se probó el conjunto que incluimos en este libro. Todos los investigadores participantes del proyecto han sido autores y facilitadores[2] de los casos que presentamos en este libro.

La experiencia relatada es fruto del trabajo conjunto de educadores y matemáticos, y constituye una muestra clara de que esta colaboración produce resultados beneficiosos para la formación en matemática de nuestra población. Si bien este trabajo debe ser constante en la investigación, debe serlo especialmente en la formación inicial de nuestros futuros profesores y profesoras: que el o la docente de geometría, de álgebra o de cálculo, conduzca el aprendizaje según las ideas expuestas en los cursos de didáctica; que el o la docente de didáctica domine los conceptos matemáticos en profundidad, y pueda hacer las conexiones no solo con la matemática de la educación básica y media, sino también con las ideas matemáticas que dan origen al concepto en cuestión y las ideas que generalizan dicho concepto.

Deseamos que más matemáticos participen de manera directa en la formación de nuestros futuros profesores y profesoras, con disposición para aportar, pero también para aprender y comprender más profundamente las dificultades que deberán enfrentar en su desempeño profesional.

[2]Llamamos “facilitador” al académico que conduce la discusión de un caso, en una sesión con estudiantes de pedagogía.

Esperamos que se forme una comunidad crecientemente activa en la comunicación y en la creación de casos, que involucre a una variedad de agentes, entre ellos psicólogos, especialistas en didáctica, expertos en evaluación, matemáticos, neurocientíficos y otros profesionales ligados a la formación de los docentes. Sin duda, estos nuevos casos deben estar igualmente centrados en la realidad; reconociendo la diversidad e importancia de las teorías, es fundamental que este aspecto se oriente al objetivo de alcanzar los aprendizajes deseados, especialmente en el caso de aquellos niños y niñas que, después de realizar variadas actividades y participar de sucesivas presentaciones y representaciones en torno a un problema o ejercicio matemático, siguen expresando o evidenciando "no entender".

Creemos que las experiencias y reflexiones que aquí presentamos hacen visible la necesidad de lograr que pedagogía y disciplina estén ya plenamente integradas en los espacios de formación de los futuros docentes. Por otra parte, se releva la importancia que reviste la discusión en torno al tema, especialmente de parte de los y las estudiantes de pedagogía, quienes tienen mucho que decir y aportar.

Capítulo 2: Antecedentes

2.1 Metodología del estudio de casos

Existen varias acepciones para esta metodología. La más popular es aquella utilizada especialmente en ciencias sociales, que consiste en una investigación en profundidad de un caso (una persona, un curso, un colegio, una organización sindical, una empresa, etc.), con el fin de reconocer patrones o principios que se puedan extrapolar a otras organizaciones o individuos del mismo tipo que el analizado.

Sin embargo, en nuestro proyecto —y en este libro, desde luego— nos hemos centrado en la **metodología de enseñanza**, que es diferente a la metodología de investigación. Esta metodología de estudio de casos consiste en presentar un problema real —o al menos verosímil— de alguna disciplina en particular, para que los estudiantes discutan acerca del tema, reconozcan dificultades, propongan soluciones y, finalmente, entreguen un informe con el análisis de la situación y sus posibles soluciones.

Esta metodología es muy utilizada en carreras relacionadas con economía, administración, medicina y leyes. Fue en Harvard, en la década del 40, donde un educador de ciencias presentó el estudio de casos como un método formal de enseñanza. Sin embargo, este método tiene una antigüedad mayor en carreras relativas a Leyes, Economía, Medicina y Psicología, en las cuales se han utilizado, incluso, juicios y empresas reales.

Por ejemplo, se presenta a estudiantes de administración y negocios el estado actual de una empresa de hotelería, y un conflicto a resolver: la demanda de los pasajeros del hotel por más y mejores canchas de tenis. Se conoce la historia del problema, las características de las principales competencias, las habilidades de los ejecutivos y personal del hotel, las posibilidades geográficas y la situación económica global del hotel. Los estudiantes deben discutir grupalmente la manera de presentar una solución al problema y una justificación de dicha solución.

En escuelas de medicina, los estudiantes son enfrentados al caso de un paciente real o un actor entrenado por los profesores de medicina, para que cuente su estado de salud, describa síntomas, historia y tratamientos utilizados hasta el momento en que es conocido por el estudiante. El futuro médico debe realizar un diagnóstico y proponer un tratamiento a seguir.

En las escuelas de leyes la metodología se utiliza del mismo modo; se muestra al estudiante un caso legal y las posiciones adoptadas por los abogados de ambas partes. El estudiante toma una parte del caso (asignado por el profesor del curso) y desarrolla una estrategia para ganar el juicio.

En cualquiera de las áreas donde se utiliza la metodología de casos como un método de enseñanza, se tiene como premisa que el conocimiento y análisis de un caso, no necesariamente permite conocer todos los casos de la misma clase, ni mucho menos tener una respuesta o solución para todos los posibles casos que surjan en la práctica profesional. En este sentido, la metodología no tiene como objetivo mostrar la diversidad de casos y proveer a los estudiantes de diferentes estrategias de solución.

El objetivo central de la metodología es exponer a los estudiantes a situaciones verosímiles y desafiantes, frente a las cuales deberán acudir a todos los recursos teóricos y prácticos adquiridos durante su formación para solucionar un problema real, no para escribir un artículo dirigido a especialistas. Es necesario mejorar al paciente, salvar de la quiebra a una empresa o ganar un juicio. En nuestro caso, responderle a un estudiante de un colegio que percibe que el resultado que dio a un problema matemático está errado, pero no logra entender por qué su modo de resolver le funciona en algunas ocasiones y en otras no.

2.2 La experiencia del Boston College

En el Boston College, el prestigioso matemático y académico Solomon Friedberg, junto a un equipo de matemáticos, ha desarrollado un programa de Estudio de Casos para formar profesores auxiliares o *teaching assistant (TA)*. Típicamente, se trata de estudiantes de postgrado que deben enseñar a alumnos de *College*, es decir, estudiantes de los primeros años de universidad.

Solomon Friedberg comenta que: "En EE.UU., durante muchos años, enviaban a estudiantes graduados de matemáticas —incluso a algunos que ya habían obtenido sus doctorados en matemáticas— a enseñar la materia sin ninguna reflexión respecto de lo que era necesario para ser un buen profesor. Esto es similar a tomar a una persona joven, tirarla a la piscina y esperar que descubra cómo nadar antes de ahogarse, y por supuesto que esa no es la manera correcta de hacer las cosas. Por esta razón, creo que el Estudio de Casos puede contribuir a reducir la brecha que existe entre el conocimiento matemático y la forma de enseñar matemáticas".

Según los investigadores liderados por Friedberg, suponiendo un conocimiento serio de la matemática, existen dos atributos esenciales para lograr un buen profesor a nivel universitario, nivel en el cual ellos desarrollaron su proyecto: experiencia y buen juicio. El primer atributo es obvio y sólo se gana con el tiempo, mientras que el buen juicio es crucial para responder preguntas fundamentales, como: ¿Por qué es importante este concepto matemático? ¿Qué material es fundamental para la clase y cuál no? ¿Cómo balanceamos la comprensión conceptual profunda con los detalles para solucionar problemas técnicos? ¿Cómo respondemos en clases si los estudiantes están confundidos y, por lo tanto, son poco permeables? ¿Cómo podemos motivar a nuestros estudiantes y cautivarlos intelectualmente? ¿Qué tareas potencian y ponen en evidencia sus avances? ¿Cómo respondemos a la gran diversidad de niveles de preparación?

Las respuestas a estas preguntas marcan la diferencia entre quienes son profesores efectivos y quienes no lo son, entendiendo por efectivos a aquellos que logran aprendizajes sustanciales en sus estudiantes. Por esa razón se piensa que cuanto antes se enfrenten los y las estudiantes al análisis de experiencias verosímiles, más se avanzará a lograr mejores profesores. Friedberg utiliza una metáfora bastante decidora: "Si un conductor patina en un pavimento resbaladizo, la próxima vez conducirá más lentamente si el piso está mojado"[1].

Los casos elaborados por el equipo de Friedberg, presentan escenarios ficticios para ser analizados por futuros profesores auxiliares de cursos de matemática de primeros años. Se presentan situaciones complicadas que ocurren en una sala de clases, las cuales son discutidas por los futuros profesores auxiliares hasta presentar soluciones, las que no necesariamente son únicas.

En el libro "Teaching Mathematics in Colleges and Universities: Case Studies for Today's Classroom" de Solomon Friedberg et al. de la American Mathematical Society en colaboración con la Mathematical Association of America, se encuentran *in extenso* 14 casos elaborados por el equipo de Friedberg. Las dificultades que aparecen en este libro, salvo los tópicos involucrados que corresponden a matemática de nivel universitario, son también dificultades que aparecen en las clases de matemática de nivel medio o básico. Por ejemplo, un caso que se llama "Haciendo olas", trata de un profesor auxiliar que presenta bonitas aplicaciones de la teoría para introducir series de Fourier, pero el nivel del curso no permitiría conocer dichas aplicaciones en profundidad. Otro caso aborda la calificación del examen de un estudiante que resolvió un problema, pero utilizando conocimientos que el examen no pretendía medir.

Esta experiencia del Boston College nos sirvió de inspiración para partir con el proyecto, pero debimos realizar varias adaptaciones a la realidad nacional, de manera que el resultado fuera útil para nuestros académicos y futuros docentes. Además, contamos con la participación del propio Solomon Friedberg, quien nos ayudó a adoptar la metodología en nuestras escuelas de pedagogía y nos mostró las dificultades y aciertos en el desarrollo de su propio proyecto.

[1] "Teaching Mathematics Graduate Students How to Teach". Solomon Friedberg. Notices Amer. Math. Soc. 52 (2005), N^{0}8, 842 – 847.

2.3 La experiencia de la Universidad de Harvard

La Universidad de Harvard tiene vasta experiencia en la implementación de estudio de casos, como metodología de enseñanza en carreras relacionadas con economía y negocios, y en las escuelas de leyes y medicina. También es utilizada en ciencias sociales, especialmente en psicología.

La experiencia a la cual nos referiremos en estos párrafos es la realizada por la profesora Katherine Merseth, de la Escuela de Graduados de Educación de dicha Universidad. Ella ha utilizado la metodología de estudio de casos en la formación inicial de profesores de matemática de diversos niveles, pero también en la formación de profesores en ejercicio.

Según Katherine Merseth, con la implementación de la metodología de estudio de casos en la formación inicial de profesores de matemáticas, se intenta dar solución a una queja constante de parte de los estudiantes de pedagogía en su universidad: que el entrenamiento y la educación que reciben en programas de educación superior o educación de docentes, es demasiado teórica. A menudo los alumnos dicen: 'quiero la historia práctica', 'quiero saber exactamente qué debo hacer en esta situación particular'. Si bien un caso no puede decirle a un futuro profesor o profesora cómo actuar en cada situación que le tocará enfrentar en una sala de clases, sí le ayudará en términos de aprender a pensar, analizar, trabajar con distintos materiales, y así enfrentar de manera más exitosa nuevas situaciones.

Katherine Merseth cree que los casos permiten traer un fragmento de realidad a las aulas universitarias, que se aprecia como convincente y que requiere de un análisis y un pensamiento más profundos, lo que contribuye a hacerlo más vivo y real. En ese sentido, los y las estudiantes ya no se preguntan qué tiene que ver esto con su práctica diaria, sino que se enfrentan a dar respuestas a problemas concretos, en situaciones similares a las reales. Si bien hay un trasfondo teórico, el aprendizaje se liga más estrechamente al quehacer futuro en la variedad de aulas en que deberán desempeñarse.

Según la profesora Merseth, basada en la literatura existente y en su propia experiencia, existen tres factores que han influido en el acelerado interés que ha despertado el estudio de casos como metodología de enseñanza en los EE.UU. El primero es la reciente y activa consideración que ha tenido de parte de los educadores el conocimiento pedagógico de la matemática y, precisamente, esta metodología resulta muy adecuada para acercarse a ese conocimiento. El segundo factor es que, según algunos investigadores, esta metodología, aplicada en la formación de los y las docentes, no es realmente nueva, sino que su utilización no ha sido desarrollada de manera sistemática; esto explicaría el que no produzca rechazo.

Finalmente, una ya avanzada discusión nacional en EE.UU. respecto de la enseñanza de la matemática, estándares curriculares y de desempeño, y reformas a la educación de profesores, han motivado el examen de metodologías alternativas a las utilizadas en los programas de formación de docentes.

Sin duda, los casos constituyen ejemplos a ser estudiados, porque, entre otras cosas, muestran prácticas profesionales que, gracias al análisis grupal, orientan hacia una definición de cuáles entregan mejores soluciones para alcanzar buenos aprendizajes en diferentes niveles educativos. También, son oportunidades para el desarrollo activo y creativo de intercambio de perspectivas, para la elaboración de hipotéticos planes de acción, para procesos de autorreflexión y de reflexión conjunta de un grupo de estudiantes.

En el caso de formación de profesores en ejercicio, la metodología es la misma, pero la implementación se puede volver más demandante, pues la verosimilitud de los casos está puesta a prueba con participantes más exigentes. Según Katherine Merseth, en este ambiente, un buen caso es aquel frente al cual los estudiantes dicen "profesora, ¿cómo supo que esto me pasó?".

La profesora Merseth participó activamente en nuestro proyecto. Luego de explicarnos lo que, según su experiencia, son los atributos de un buen caso y cuál es una buena manera de conducirlo, fue la guía de un caso que discutimos los investigadores del proyecto, desempeñando el rol de estudiantes de pedagogía.

Capítulo 3: Nuestra experiencia

3.1 Algunas preguntas

¿Cómo afecta en la enseñanza que un profesor o profesora piense y crea que hay alumnos que nunca van a entender, pese a todos los esfuerzos que haga?

¿Cómo motivar el aprendizaje de la matemática en un alumno que quiere estudiar derecho, sus padres y abuelos son abogados, sabe que no necesitará elevados contenidos de matemática, no le gusta la disciplina y, además, su puntaje en los ensayos PSU es suficiente para postular a su carrera?

¿Por qué decimos que un medio es equivalente a dos cuartos y escribimos el signo igual? ¿De dónde heredamos esta nomenclatura?

Representar las fracciones como partes de un todo, ¿sirve para representar la suma de fracciones?

¿Cómo pasar de la representación gráfica del cuadrado del binomio a una general que cubra todos los casos?

¿Es necesario dar un argumento algebraico, si una representación gráfica "permite ver" claramente cuál es el dominio de una función?

¿Es motivante para estudiantes de hoy, que tienen acceso a video juegos con gráfica muy realista y de alta definición en 3D, una clase de geometría con software educativo cuyos diseños les resultan "aburridos"?

Estas son algunas de las muchas preguntas para las cuales los futuros docentes debieran contar con herramientas que les permitan responderlas de manera acertada, antes de ir a un aula con estudiantes de educación media o básica. Son preguntas difíciles de responder, porque no tienen respuesta única y a ellas deben enfrentarse día a día las y los profesores de matemática.

Creemos que un futuro docente, al ser expuesto a estas interrogantes o a conflictos que no tienen soluciones únicas, podrá sentirse más seguro de sus propias capacidades y reconocer ciertas debilidades en su formación que, de otra forma, no percibiría hasta el momento de la práctica real, cuando ya sería muy tarde.

De acuerdo a los datos expuestos en diversos informes (TIMSS[1] , PISA[2] , Sistema de Medición de Calidad de la Educación (SIMCE), etc.), los niños y jóvenes chilenos presentan un desempeño insuficiente a nivel escolar, especialmente en matemática.

El Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), de la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), tiene como objetivo medir habilidades y conocimientos de estudiantes de varios países del mundo. El año 2003, estudiantes de octavo básico de Chile participaron en esta medición que distingue cuatro niveles de logro de acuerdo a los conocimientos y habilidades mostrados por los alumnos: Avanzado, Alto, Intermedio y Bajo.

Los resultados indicaron que Chile, con 387 puntos en matemática, se encuentra 80 puntos bajo el promedio internacional. El 59 % de los alumnos chilenos tiene un rendimiento inferior al nivel Bajo. Además, el nivel Avanzado no fue alcanzado por ningún estudiante, y el nivel Alto, solo por el 3 % de ellos. Esto significa que ni siquiera los mejores alumnos de nuestro país obtienen buenos resultados en este examen. Además, muchos de nuestros estudiantes tienen docentes que no confían en sus propios conocimientos matemáticos. La situación descrita hace meditar respecto de las razones que explicarían esta realidad.

En el informe de la OECD (Organization for Economic Co-operation and Development) del año 2004, se hace mención a la no integración de las diferentes áreas en la formación de un futuro docente. Este documento señala que los profesores reciben una formación inicial desarticulada, debido a que, por una parte, se les enseña la disciplina y por otra, cómo enseñar, pero no se les enseña cómo enseñar la disciplina. Además, algunas carreras de pedagogía están alejadas de los problemas de las prácticas docentes, y esta sería una de las razones por la cual los profesores se sienten inseguros de los tópicos matemáticos que deben enseñar, tal como lo indican las encuestas TIMSS.

Nuestra experiencia en proyectos anteriores nos ha permitido constatar esta disociación entre disciplina y pedagogía, la que se da en las escuelas de pedagogía del país, pero también en instituciones internacionales. Más aún, los cursos pedagógicos son impartidos por académicos de una facultad y los cursos matemáticos, por académicos

[1] TIMSS “Trends in International Mathematics and Science Study”. Al estudio que nos referimos es “Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS”. Resultado de los estudiantes chilenos de 8^o básico en el estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias 2003. UCE-MINEDUC. 2004

[2] PISA “Program for International Student Assessment”. Al informe que nos referimos aquí es: “Competencias para la vida. Resultados de los estudiantes chilenos en el estudio Pisa 2000”. UCE-MINEDUC. 2004

de otra, profesionales que no necesariamente dialogan o están de acuerdo en visiones, creencias y aspectos importantes de la formación de profesores de matemática.

Con el fin de buscar algún tipo de solución a estos y otros problemas, y con el objetivo de mejorar la calidad de la formación pedagógica y disciplinaria de los estudiantes de pedagogía en matemática, un equipo de investigadores del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile concibió este proyecto en 2007.

Un propósito central del proyecto fue mejorar la integración entre matemática y pedagogía, así como potenciar la confianza de los futuros profesores en los conocimientos matemáticos adquiridos. Para ello se elaboraron 14 Monografías de contenidos matemáticos orientadas a reforzar los conocimientos que los futuros docentes deben adquirir a lo largo de su formación inicial. Se incorporó allí la metodología de estudio de casos, porque permite aportar a la deseada integración entre disciplina matemática y pedagogía.

3.2 La metodología de estudio de casos

Como ya hemos dicho, esta metodología ha sido y es muy utilizada en carreras relacionadas con economía, administración, medicina y leyes, pero no así en la formación de profesores. Aparte de las experiencias de K. Merseth en la Universidad de Harvard y de S. Friedberg en el Boston College, para la elaboración del proyecto conocimos la experiencia de la universidad de Buffalo, donde se encuentra instalado el "National Center for Case Study Teaching in Science" que cuenta con una larga experiencia en la metodología y con una gran fuente de casos para la enseñanza de las ciencias. Sin embargo, los intentos para que participaran de nuestro proyecto fueron infructuosos, lo que nos impidió conocer más de cerca su valiosa experiencia.

El Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México, también ha desarrollado esta metodología de enseñanza para la formación docente, pero no tuvimos una respuesta favorable de parte de ellos a participar de nuestro proyecto.

En Chile, muchos de los futuros profesores y profesoras de matemática llegan a la universidad con gran interés en esta área, pero la clave está en que entiendan cómo tomar su conocimiento y usarlo para explicarles la matemática a quienes serán sus estudiantes. El estudio de casos colabora a este propósito, porque les permite ponerse en el lugar de un profesor que está en el aula, antes de que estén realmente allí; esto les da la posibilidad de analizar una situación de enseñanza complicada, y pensar qué harían ellos para enfrentarla y para comprender las diversas necesidades de los alumnos de un mismo curso. Sin duda, esto les ayuda a pensar en cómo disminuir la brecha que existe entre entender la matemática y lograr que otras personas la entiendan, creando así su propia idea acerca de lo que se requiere para ser un buen profesor.

Uno de los elementos más poderosos con respecto a la enseñanza basada en el estudio de casos, es que se trata de representaciones verosímiles de eventos que ocurren en las aulas, que nos permiten integrar a la educación superior un evento real que los estudiantes pueden analizar, discutir y observar desde diversas y múltiples perspectivas, para obtener una comprensión más profunda acerca de lo que realmente ocurre.

Los casos pueden involucrar múltiples perspectivas, razón por la cual los futuros profesores tienen la oportunidad de observar una misma situación, analizándola desde distintos puntos de vista. Esto es lo que permite traer todas esas opiniones al aula y enseñarles a los estudiantes cómo analizar, cómo considerar otros puntos de vista y cómo construir un nuevo entendimiento más profundo y complejo.

Previo a la elaboración de un caso, es necesario definir cuáles son las metas reales de una sesión de discusión del caso particular, qué es necesario comunicar a los estudiantes, cómo se abordarán los muchos y diversos niveles de alumnos que típicamente se encuentra en una sala de clases, y cómo manejar situaciones difíciles que involucren a un estudiante en particular o al grupo en general.

La metodología de estudio de casos presenta desafíos que todo maestro deberá encarar y contar con recursos propios para hacerles frente, lo que se alcanza con mayor facilidad al reunirse con otros pares, comentar con ellos las situaciones y así apreciar, comparar y comprender las variadas respuestas que buscan, de manera central, lograr mejores aprendizajes en las aulas. Creemos que es muy poderoso que los estudiantes se reúnan para hablar acerca de una situación educativa, para reflexionar acerca de lo complicado que es enseñar, y para aplicar las ideas sobre cómo enfrentar una crisis en su propia enseñanza.

Enseñar no es solo poner un teorema en la pizarra, sino saber cómo comunicarse con los estudiantes y cómo darles un sentido de lo que es importante. Ser profesores efectivos, creemos, es mucho más que saber matemática, porque requiere haber pensado cuidadosamente en cómo hacer que se desarrolle en los estudiantes, reflexionar respecto de cuáles son las diferentes situaciones, obstáculos o metas y qué métodos pueden colaborar a su logro: desde ejemplos y motivaciones, hasta ejercicios rutinarios capaces de derribar las barreras del entendimiento, y que posibilitan un desarrollo mayor de los distintos tipos de problemas y formas de interactuar con la clase. Lo anterior es un puente que permite pasar de "saber matemática" a ser un muy buen docente, además de evidenciar las debilidades que cada estudiante de pedagogía pueda tener respecto a tópicos matemáticos puros.

Según Katherine Merseth, el estudio de casos representa las tres "C" de la formación:

- **C**omplejidad: Un caso nos permite traer al aula situaciones complejas de educación, con el objetivo de realizar un análisis que permita lograr un mayor entendimiento y una discusión más profunda.
- Enfoque de **C**onstrucción hacia el aprendizaje: Los lectores aportan sus propias perspectivas, sus propios esquemas, su propia comprensión de la situación, para luego, en grupo, desarrollar un nuevo entendimiento.
- **C**omunicación: Los casos requieren que los participantes aprendan a colaborar y ayuden a los individuos a aprender. "Uno de los problemas que enfrentamos es que los profesores están aislados, no saben cómo hablar con sus colegas, no saben cómo hacer preguntas acerca del mundo de la práctica, y un caso le permite a profesores y administradores, saber cómo colaborar, cómo discrepar, cómo presentar un punto de vista alternativo, en suma, nos permite aprender a comunicarnos más efectivamente", en palabras de la profesora Merseth.

En la metodología de casos, un "caso" no es la práctica profesional, sino un relato de tres a cinco páginas, que presenta situaciones donde se contraponen dos visiones igualmente válidas, e igualmente ponderadas en el relato. En la búsqueda de soluciones, se reconocen debilidades y fortalezas matemáticas, se comparten diferentes puntos de vista y surge la necesidad de explicar, en lenguaje simple, aspectos profundos de la matemática.

Tiene la ventaja de que concentra un dilema profundo y de solución no trivial ni única. Si bien no es la realidad, pretende serlo. Tiene la desventaja de que no hace vivir el conflicto, pero en las prácticas docentes que realizan los futuros profesores durante su formación, no es claro que se presenten todos estos puntos fundamentales y, en general, no es claro que la práctica docente provoque el nivel de discusión y reflexión que despiertan los casos.

Un beneficio particular de formar docentes de matemática a través de los casos, es que les permite identificar áreas que parecen inofensivas, pero que en realidad esconden una profundidad de la que no se habían percatado. Por ejemplo, se pueden construir casos en torno a situaciones reales de aula, permitiendo que afloren errores típicos, como cuando se le pregunta a un niño cuánto es $1/2 + 1/3$, y responde $2/5$, lo cual suele darse con frecuencia.

El estudio de casos pretende promover que el profesor o profesora:

1. Evite la sobre-simplificación y la sobre-regularización. Los profesores expertos reconocen la importancia de la contextualización y de la síntesis, y el peligro de atajos reduccionistas. Aunque puede ser inicialmente atractivo, los mejores docentes no buscan comodidad o recetas para enseñar o aprender.
2. Domine y cree múltiples representaciones.
3. Reconozca lo central de las diversas situaciones.

4. Sitúe la conceptualización. Los profesores expertos unen conocimiento conceptual y aplicación. Hay sinergia entre la teoría y la práctica.
5. Permita que funcione el esquema flexible. Los profesores expertos pueden moverse desde un esquema rígido o fijo, a un esquema más flexible. No esperan tener todas las respuestas, pero confían en desarrollar un esquema nuevo y útil según las necesidades de una situación.
6. Realice múltiples interconexiones.
7. Logre la participación activa y proporcione la dirección didáctica. Los profesores expertos son participantes activos en el ambiente. Funcionan como facilitadores para la adquisición de conocimiento de los y las estudiantes.

Los académicos que participaron de este proyecto, respondieron encuestas respecto a la utilidad de la metodología, y respecto a las debilidades y beneficios de cada caso particular. Los resultados de dichas encuestas nos permiten afirmar que piensan que la metodología permite a los futuros docentes:

- Integrar didáctica y matemática.
- Anticipar posibles dificultades.
- Poner en práctica teorías estudiadas.
- Trabajar en equipo, en un ambiente de respeto y confianza.
- Desarrollar habilidades de comunicación oral y escrita.
- Crear seguridad en los propios conocimientos.
- Reflexionar sobre problemas no triviales de la enseñanza, de solución no única.
- Hacerse cargo de la propia formación.

Es importante notar que la metodología de estudio de casos propuesta en este libro, se refiere a problemas de enseñanza de la matemática, problemas que aparecen en clases de matemática, y que serán analizados desde un punto de vista pedagógico. No se debe confundir con la enseñanza de matemática mediante problemas, que consiste en presentar un problema matemático a los estudiantes y recoger las estrategias, métodos, posibles soluciones y comentarlas en el curso.

El académico que conduce el caso, denominado *facilitador*, cumple un rol fundamental, ya que en una o dos sesiones, debe lograr que los y las estudiantes de pedagogía reflexionen y discutan acerca de los aspectos profundos del caso. Ante un conflicto en el que un estudiante de enseñanza media comete un error en algún tópico matemático, la respuesta más típica de un estudiante de pedagogía en matemática es: *"yo lo hubiese hecho diferente, por lo tanto a mí no me hubiese pasado eso"*, lo cual cierra la discusión. Si esto se aceptara como conclusión definitiva, no se lograría ninguna reflexión. Entonces, el facilitador será el encargado de convencer a los futuros profesores y profesoras de que los conflictos siempre existirán, y que esta metodología no pretende cubrir exhaustivamente todos los conflictos, como si estos estuviesen listados y tipificados.

El facilitador debe conocer el caso con anticipación, sus personajes y conflictos principales, lograr que todos los estudiantes participen, evitar que se monopolice la discusión, mantener un clima de respeto y tolerancia y, muy fundamentalmente, no dar una respuesta definitiva. Los casos no tienen soluciones absolutas ni únicas.

3.3 Conformación de equipos

Convencidos de la potencialidad de la metodología de estudio de casos para integrar la disciplina matemática con la pedagogía, se empezó a investigar al respecto y los encargados del proyecto convocaron a varios investigadores y académicos de las seis universidades nombradas al inicio y que imparten Pedagogía en Matemática en el país. Se buscó universidades de varias regiones del país, pero no demasiado distantes para que el trabajo pudiese ser operativo.

El equipo central del proyecto estaba conformado por Patricio Felmer, del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM) y del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile, director del proyecto; María Leonor Varas, del CMM y del Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) de la misma universidad, y Cristián Reyes, del CMM, director ejecutivo y coordinador de la parte del proyecto referente a la metodología de estudio de casos. Es importante recordar que otra parte del proyecto estaba referida a la elaboración de una colección de 14 monografías, cuya directora ejecutiva fue Salomé Martínez, del DIM y del CMM.

Este equipo tenía la misión de coordinar el trabajo de los equipos de elaboradores de casos, de coordinar la experimentación y su posterior análisis. Además, participaron en la elaboración de casos y en todas las reuniones de capacitación, selección e implementación de los casos.

También se quiso que el equipo de elaboradores y experimentadores estuviera conformado de manera balanceada por matemáticos y por educadores en matemática, de forma tal que todas las visiones del problema estuvieran representadas. Además, un objetivo formal del proyecto era "Generar redes de cooperación e integración de equipos de científicos y de educadores, para abordar materias complejas e interdisciplinarias relacionadas con la pedagogía en matemática"[3].

En cada escuela de pedagogía participante se formó un Equipo de Trabajo Local (ETL), coherente con nuestra propuesta general; es decir, cada ETL estaba constituido por matemáticos y educadores, y uno de los investigadores era el coordinador de ese equipo, con la misión de monitorear el trabajo local y representar al equipo ante el equipo central.

[3]Segundo Objetivo General del proyecto FONDEF "Herramientas para la formación de profesores de matemática."

Los Equipos de Trabajo Locales fueron los siguientes:

Universidad de La Serena:
Eduvina Villagrán (Coordinadora)
Gustavo Labbé
Michael Neuburg
Laura Vega

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso:
Luisa Aburto (Coordinadora)
Jaime Mena
Soledad Montoya

Universidad de Chile:
Jorge Soto Andrade (Coordinador)
Lino Cubillos

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
María Cecilia Tapia (Coordinadora)
Soledad Ibaceta
Giovanna Ticchione

Universidad Católica del Maule
Carlos Caamaño (Coordinador)
María Aravena
Jorge González Lorca

Universidad de Concepción:
Andrés Ortiz (Coordinador)
Eugenio Chandía
César Flores

También contamos con la participación de dos expertos del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) del Ministerio de Educación, Silvia Navarro y Alfonso Calderón, quienes opinaron de nuestros casos, participaron en la selección y en la definición de las características que debía tener un caso. La participación del CPEIP nació a raíz de de una reunión con quien era entonces su Director, Carlos Eugenio Beca, acordándose contar con la valiosa ayuda de expertos de dicho centro. Es importante hacer notar que uno de los socios del proyecto era el MINEDUC, y la repartición interna que interactuaba con nosotros era el CPEIP.

3.4 La participación de los expertos extranjeros

Invitamos a los expertos norteamericanos Solomon Friedberg, quien nos visitó dos veces, una vez al inicio del proyecto y la segunda, al cabo de un año, y a Katherine

Merseth, quien coincidió con la primera visita de Solomon, para contarnos su experiencia y mostrarnos en qué consistía la elaboración de casos y la puesta en escena de los mismos, con estudiantes reales y con necesidades precisas.

FIGURA 3.1. Katherine Merseth de la Universidad de Harvard, experta en la metodología de estudio de casos para formación de profesores. La imagen corresponde al seminario de instalación del proyecto, realizado en Santiago de Chile, entre el 28 y 29 de mayo de 2007.

Este trabajo de mostrarnos su experiencia se orientó a responder dos preguntas fundamentales: ¿qué es un buen caso? y ¿cómo conducir un buen caso?

A través de ejemplos reales de casos entendimos lo que era un buen caso, al menos en teoría. Entre otras cosas, aprendimos que se debía tener presente:

- ¿Cuál es el objetivo? (Por qué se va a presentar este caso)
- ¿En qué se basa este caso? (Más que real, debe ser verosímil y útil)
- ¿Por qué se quiere usar este caso y no otro?
- ¿Se cuenta con participantes bien dispuestos?

- ¿Se presenta una cuestión delicada?
- ¿Es posible que este caso perjudique a alguien?
- ¿Es completa la información que se ha reunido?
- ¿Tiene una perspectiva abierta e imparcial?
- ¿Se está considerando la secuencia curricular?

Antes de escribir el caso, es necesario tener claro:

- ¿Qué incluir? ¿Personas? ¿Antecedentes? Intentar siempre incluir estudiantes.
- ¿Constituye el caso una narración coherente?
- Tener presente el público al que va dirigido.

Durante la elaboración:

- Introducción: Orientación de la acción. Creación de un escenario.
- Exposición: Despliegue de los antecedentes.
- Desarrollo: Los detalles de la cuestión planteada.
- El desarrollo de la personalidad de un personaje clave.
- La importancia de captar la vitalidad y el carácter de una escena.
- La creación de los antecedentes o el montaje del caso.
- El diálogo como recurso para revelar la personalidad, las cuestiones importantes, el tono emocional.

Algunas consideraciones importantes:

- Organizar el caso alrededor de cuestiones múltiples.
- Proveer vías de acceso al tema central del caso.
- Formas de presentarse cuando se es uno de los "actores" del caso.
- Incluir un agudo dilema, una decisión o una elección que se plantea a un personaje central (y también al lector).
- Basarse en el Currículum Nacional.
- Levantar información vía encuestas y experiencia de los investigadores. Entrevista a docentes en ejercicio.
- Posiciones en conflicto suficientemente fuertes y equilibradas. No debe ser "blanco y negro"; tampoco enfrentar dos posiciones: "una anticuada y débil" y "una políticamente correcta y muy fuerte". Esto no da buenos resultados y la discusión se agota rápidamente.
- Evitar contextos socioeconómicos irrelevantes. En general, nuestros estudiantes de pedagogía entran rápidamente en una discusión socio-política, que distrae del tema que se pretende analizar.

Durante su primera visita, Solomon Friedberg nos mostró el uso de estudio de casos, a través de una experiencia real. Fue así como tomó el papel de facilitador del caso, mientras todos los integrantes del equipo tomábamos el rol de estudiantes. Posteriormente, repetimos esta experiencia con un caso liderado por Katherine Merseth. Los casos presentados fueron desarrollados por sus propios equipos y traducidos por nosotros.

FIGURA 3.2. Solomon Friedberg en su segunda visita a la Universidad de Chile, en junio de 2008, en el marco de nuestro proyecto.

En esta situación experimentamos lo mismo que observaríamos posteriormente en nuestros estudiantes: tuvimos miedo de dar las primeras opiniones, creímos que la nuestra era la mejor y única respuesta. Nos centramos en un solo aspecto del tema y quisimos enfrentar nuestra posición con la antagónica. A poco andar del experimento, nos convencimos de lo difícil que es conducir un caso. Vimos a Solomon y a Katherine moviéndose de un modo especial en el círculo donde se desarrolló la discusión, evitando dar respuestas y devolviéndonos las preguntas, de manera que la discusión fuera acrecentando progresivamente su complejidad.

Luego de ambos ejercicios, los expertos norteamericanos analizaron la discusión que se había generado en el equipo, relevando también el rol del facilitador. Entregaron diversos consejos que nos ayudaron a formular casos efectivos, que abordaran todos los temas; a la vez, aprendimos cómo motivar, dirigir y manejar la discusión. También, nos enseñaron técnicas para hacer que todos los alumnos se mantengan pendientes del caso y se atrevan a participar, tales como:

- El juego de roles, donde algunos participantes toman el papel de un personaje del caso y defienden su postura. Esto permite que se creen nuevos e importantes diálogos, que hacen más rica y compleja la situación del caso.

- Ponerse al lado de un participante, cuando su opinión está más disminuida. Como facilitador, le “traspasa su autoridad o poder”, haciendo que esta persona se siente más segura para opinar y, por ende, el grupo la percibe con mayor peso.
- Evitar discusiones de a dos, centrando el foco en otra persona o en otro tema.
- Ponerse al frente de quien opina, pero atrás del círculo, para que la mirada del opinante cruce toda la audiencia.
- Invitar a los participantes a la pizarra para que muestren sus propias maneras de realizar alguna actividad, o cómo explicarían sus ideas a futuros alumnos y alumnas.
- Si un participante invita al facilitador a dar su opinión, como si fuera un “juez” que determina la corrección de los argumentos, el facilitador invita a otro participante a dar su opinión.
- Si una opinión es demasiado errada, invitar a otro participante a que explique el error: “¿Qué opinas de lo que dijo Cristián?”.

Figura 3.3. Solomon Friedberg facilitando un caso, con estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Junio de 2008.

Este trabajo con los expertos extranjeros duró dos días y medio y nos congregó a todos en Santiago. Luego, regresamos a nuestras sedes universitarias a crear casos con total libertad. En ese momento no nos repartimos tareas por problemas específicos o temas matemáticos particulares. Entendimos que escribir casos es un tema difícil, razón por la cual cada uno escribía sobre lo que se sintiera más capacitado o experto.

3.5 La elaboración y experimentación de los casos

Transcurridos dos meses de la capacitación, nos reunimos nuevamente en Santiago para discutir los casos que habíamos elaborado y analizarlos uno a uno.

Basados en los lineamientos que nos entregaron Solomon y Katherine, decidimos cuáles eran buenos casos y cuáles merecían revisión y ajustes. Varios de los que se dejaron para posteriores ajustes, eran "blanco y negro", es decir, las posiciones en conflicto estaban desbalanceadas. Otros no cumplían con tener un conflicto bien definido ni mostraban con claridad cuál personaje del caso estaba en un dilema.

A veces se dieron duras discusiones, porque cada cual defendía su caso con energía; sin embargo, cometimos el error de que cada caso tenía una autoría conocida, por lo que las opiniones evitaban comentarios demasiado críticos o hirientes. No hubo distinción entre matemáticos y educadores. Las opiniones y argumentos estaban referidos a los acuerdos tomados referentes a los casos, y no a teorías establecidas. El caso debía "defenderse solo".

Del total de casos elaborados, alrededor de 20, solamente ocho pasaron el filtro de esta reunión, para más adelante ser testeados durante dos o tres meses en cada una de las escuelas de pedagogía. Participaron en la experimentación cursos establecidos de Didáctica de tercero, cuarto y hasta quinto año de la carrera o bien, un curso electivo especialmente dictado para este propósito. La puesta en escena de estos ocho casos en las seis escuelas de pedagogía ocurrió entre los meses de agosto y noviembre de 2007; en general, cada escuela realizó la experimentación durante dos meses.

En cada universidad participante se reunían dos veces por semana con los y las estudiantes de pedagogía para analizar los casos en sesiones de una hora y media. Los miembros de cada ETL estaban en la sala del taller de casos y uno de ellos hacía cada vez de facilitador; en algunas ocasiones eran visitados por miembros del equipo central.

Los miembros del ETL que no hacían de facilitadores, tomaban notas del desempeño del facilitador, de las respuestas de los estudiantes y de la forma en que el caso podía ser mejorado, extendido o mejor guiado.

Después de cada caso, los estudiantes respondían un cuestionario referente al caso mismo y a su conducción. Los resultados fueron muy favorables: más del 80 % encontró los casos verosímiles e interesantes, la matemática involucrada relevante y el conflicto pedagógico significativo. Además, sobre el 92 % de los participantes afirmaba que el caso permitía integrar pedagogía y matemática. En esta primera experimentación participaron alrededor de 86 estudiantes de Pedagogía en Matemática.

Algunos estudiantes, especialmente los de cursos más avanzados, reconocían que en toda la carrera no habían tenido una instancia de reflexión comunitaria y sistemática como esta. Reconocían también que problemas importantes, que sin duda enfrentarían en el futuro, no los tenían resueltos o no se habían detenido a analizarlos. A menudo, se asombraron de que un compañero de toda la carrera, con el cual tomaron los mismos cursos, tuviera opiniones tan distintas a la propia sobre aspectos puramente matemáticos.

Muchos decían: "Ojalá hubiésemos tenido más cursos como este" o "¿Por qué no se aplica esta metodología a más cursos de la carrera?".
En su segunda visita, Solomon Friedberg tuvo la oportunidad de ver los avances que había logrado el equipo de trabajo, tanto en la confección de casos como en su mayor experiencia en el rol de facilitadores. En esta ocasión, Solomon facilitó un caso de nuestra autoría con estudiantes de la PUCV. Nos hizo ver la infinidad de visiones que puede tener un caso, y pese a que se trataba de uno que conocíamos muy bien, porque ya había tenido varias implementaciones, ajustes y reescrituras, Solomon lo condujo hacia lugares insospechados para todos nosotros. Así, concluimos que los casos aquí presentados pueden ser guiados con diferentes objetivos, por nuevos facilitadores, pero siempre buscando aprender más de ellos.

Luego del período de capacitación, experimentación e investigación —que consistió en levantar información encuestando a profesores, y averiguando la experiencia de las Universidades con respecto al seguimiento de las prácticas y perfeccionamiento de sus alumnos— nuestra misión como equipo era determinar qué temas eran de mayor relevancia tanto desde el punto de vista matemático como pedagógico. Reunida toda esta información, los equipos de trabajo locales comenzaron a trabajar en la construcción y escritura de los nuevos casos de estudio, pero ahora con temas precisos del currículum nacional y temas pedagógicos específicos.

En esta segunda etapa los casos eran anónimos. Se distribuyeron temas entre todos los participantes, en forma secreta. Los investigadores elaboraron los casos y los enviaron al coordinador, quien los distribuyó anónimamente entre los investigadores, para que escribieran un informe del caso. Luego, se envió el caso con el informe a un nuevo autor, quien sería el encargado de desarrollar la versión definitiva.

El equipo central optó por esta metodología anónima, pues en el proceso anterior de elaboración, al conocer al autor del caso, las opiniones habían sido tan "cuidadosas", que no quedaba claro si se quería decir que el caso debía ser ajustado o dejarse de lado. Además, se quería que el caso perdiera la autoría personal y pasara a ser de construcción colectiva.

Al tratarse de una metodología que hasta ese momento no era familiar para ninguno de los investigadores, todos hicieron su mejor esfuerzo en la creación de casos que cumplieran con todos los requerimientos necesarios. Después de este período de escritura, se realizó una reunión plenaria en la Universidad Católica del Maule, donde Carlos Caamaño, María Aravena y Jorge González organizaron todo para que pudiésemos trabajar en dos intensas jornadas de trabajo.

FIGURA 3.4. Reunión de los participantes del proyecto, en la Universidad Católica del Maule, en noviembre de 2007.

En esta ocasión nos dividimos en varios grupos para analizar los casos elaborados y aquellos que fueron piloteados. Pese a que nadie sabía quién era autor de cada caso, excepto el coordinador, cuando un caso era reprobado por la mayoría, siempre se levantaba una mano para defender al "hijo" que estaba siendo rechazado. De todos modos, este ejercicio permitió seleccionar los mejores casos, guardando para un futuro ajuste los que no cumplían a cabalidad con los objetivos planteados.

Durante arduas jornadas de creación, discusión, reflexión y aprendizaje, educadores en matemática y matemáticos, dialogaron y trabajaron en conjunto para elaborar y seleccionar casos que fueran atrayentes, verosímiles, conflictivos, no triviales e interesantes matemática y pedagógicamente. En total, se han escrito y reescrito

Figura 3.5. Reunión de los participantes del proyecto, en la Universidad Católica del Maule, en noviembre de 2007.

aproximadamente 36 casos, de los cuales se seleccionaron 16 para ser evaluados en diversas experiencias piloto, y algunos de ellos se presentan más adelante.

Luego del piloto siguiente, que correspondió al segundo semestre de 2008, los investigadores elaboraron “Guías para el facilitador”, para que académicos de escuelas de pedagogía pudieran usar estos casos en sus respectivas escuelas, permitiéndoles conocer posibles caminos, objetivos, dificultades, que presentan los casos en su puesta en escena. Estas guías se hicieron pensando en un académico que aunque no necesariamente hubiera participado en nuestro proyecto, de todos modos realizaría un Taller de estudio de casos. Esta guía ayuda a conocer los objetivos del equipo al momento de elaborar el caso, y muestra algunas orientaciones en la conducción del mismo, basadas en la puesta en escena de cada caso por los diferentes ETL.

Los investigadores consideraron que esta experiencia fue enriquecedora, creativa y entretenida. “La formulación, discusión y análisis de cada caso al interior de los ETL nos permitió obtener una buena selección de casos”, explicaron. Además, destacaron fuertemente el valioso aporte de los expertos extranjeros.

En el segundo piloto, al igual que en la ocasión anterior, los alumnos debieron responder una encuesta “online”, para evitar que sintieran alguna presión al entregar la encuesta en papel al facilitador. Los resultados de las encuestas fueron similares a los del primer piloto, y en esta ocasión participaron alrededor de 90 estudiantes.

Según los investigadores del proyecto, esta experiencia, una vez más, les ayudó a confirmar que los estudios de casos ayudan a los y las estudiantes a tomar conciencia del grado de solidez o debilidad que tienen ellos mismos del concepto matemático abordado en cada situación. Así, a través de los casos, pueden observar las dificultades que presenta hacer nacer de manera exitosa un saber matemático; pueden valorar la complejidad de los diferentes marcos teóricos de la didáctica; pueden desarrollar las habilidades de expresión oral y argumentación, ya que al escuchar la opinión de sus pares toman conciencia, siendo aún estudiantes, de las complejidades que se dan día a día en las aulas.

“De esta forma los estudiantes van compartiendo creencias y valores en torno a lo que debe ser un buen profesional, valoran el conocimiento matemático para generar buenas propuestas didácticas con base teórica y dimensionan en forma apropiada sus conocimientos pedagógicos. Este ejercicio les permite ingresar a sus prácticas laborales con una mirada sistemática y desempeñarse como profesionales aptos. Los estudiantes que han participado de esta experiencia, valoraron positivamente el curso como una preparación para enfrentar la práctica final y la iniciación de su desarrollo profesional”, agregaron los investigadores.

El Taller de estudio de casos con estudiantes de tercero, cuarto o incluso quinto año, permite que reconozcan que algunos de los tópicos que deberán enseñar, no fueron estudiados en sus cursos anteriores o, si lo hicieron, no le dieron la importancia suficiente, argumentando que “todas esas cosas las domino bien desde la secundaria”. Desde luego, no es posible hacer clases con esas falencias, por lo tanto, la responsabilidad de impartir buenas clases se vuelve propia, debiendo buscar los apoyos que les permitan profundizar temas específicos que no manejan con propiedad. Entonces, una forma de lograrlo es trabajando en equipo con pares que están en similares condiciones.

El conjunto de estas experiencias significó una valiosa ayuda para mejorar los casos, medir la llegada de esta metodología entre los alumnos y determinar cómo se desenvolvían los facilitadores durante el transcurso de la clase.

En la etapa de construcción de cada uno de los casos, y para efectos de su evaluación, consideramos aspectos como su pertinencia, relevancia temática, verosimilitud, y la calidad de redacción. Para la etapa práctica, se evaluó la implementación de esta nueva estrategia pedagógica en la formación de los futuros docentes. Dado que la metodología de estudio de casos es nueva para los académicos, requiere el desarrollo de habilidades relativas a la discusión y al trabajo grupal con los estudiantes, fundamentales para obtener los resultados de aprendizaje esperados.

En nuestra experiencia y evaluaciones realizadas, la metodología aplicada ha resultado ser una experiencia interesante y motivadora para el conjunto de participantes de los diferentes talleres, entre otras razones, porque las encuestas de opinión realizadas a diversos destinatarios, muestran que los casos fueron considerados relevantes y constituyeron un aporte de calidad para la formación de los profesores de Educación Media, tanto desde el punto de vista matemático como pedagógico, además de ser una oportunidad única de integración entre ambos mundos. Gracias a estas experiencias piloto, los alumnos tuvieron la oportunidad de reflexionar y entablar discusiones con sus pares y profesores sobre temas que deberán enseñar en el aula. Con sorpresa, descubrieron que tenían un dominio incompleto de los temas matemáticos abordados en los casos, y tuvieron que enfrentarse a dudas sobre cómo enseñarlos.

Los casos aquí presentados fueron testeados con estudiantes de Pedagogía en Matemática. En algunos casos, el taller produjo inquietud en estudiantes de cuarto o quinto año de la carrera, pues los relatos les hacían tomar conciencia de la profundidad de algunos conceptos matemáticos aparentemente simples, como la suma de fracciones o la pendiente de una recta, junto a la matemática involucrada y cómo aprenderla y enseñarla. Además, los y las estudiantes podían observar en el taller, en forma directa, la gran heterogeneidad de las concepciones matemáticas de un grupo curso que había recibido la misma formación.

Al inicio de las sesiones, eran frecuentes expresiones como las siguientes: *"No es posible que pensemos tan distinto con Jorge, respecto a esto, que es pura matemática, si tuvimos exactamente los mismos cursos, y notas bien parecidas". "¿En cuántos otros temas estaré débil y no me he dado cuenta?". "Entiendo por qué el resultado del estudiante del relato está mal, pero no sé por qué está mal, es decir, no sé por qué su estrategia a veces le sirve, y otras no. Ni mucho menos sé cómo sacarlo de su error".* Luego, a través de las discusiones grupales iban surgiendo estrategias de solución o de búsqueda de información, para así dar respuesta a preguntas para las cuales, antes de vivir este proceso, no tenían explicación.

La tarea de los facilitadores tiene grados de complejidad, ya que se incorpora una metodología nueva y muy distinta de la enseñanza habitual. Sin embargo, los diversos cursos realizados les permitieron mejorar notablemente la conducción de los casos, lo que se observa en los comentarios y notas de las encuestas. En la aplicación realizada el año 2007, los alumnos calificaron con nota 5,2 su participación en el curso, estimación que subió a 5,9 en la aplicación de 2008. Este incremento refleja una mejor conducción del facilitador, pues la participación de los estudiantes en la discusión del caso es un objetivo central de su tarea.

La experiencia ha resultado ser muy exitosa también para los profesores involucrados en este proyecto, quienes se han encontrado con estudiantes de pedagogía que asumen su formación como un desafío propio, que reconocen que la matemática que deben enseñar es profunda, que están interesados en participar, que poseen una mentalidad crítica y reflexiva, todo lo cual les ha permitido apreciar que existen diferentes visiones para una misma situación, y que uno de los aspectos más importantes para lograr ser un profesor o profesora eficiente es reconocer y enfrentar los conflictos.

La realización de experiencias piloto no solo constituyó un efectivo método para medir los casos de estudio, sino que también fueron de gran utilidad para dar a conocer esta metodología entre los estudiantes de Pedagogía en Matemática. Por otra parte, el éxito alcanzado en estos talleres ha permitido incorporar los estudios de casos como una asignatura formal en diferentes casas de estudio.

Es así como en el plan de formación de profesores de Matemática y Computación, de la Universidad de Concepción, se ha incorporado como curso electivo la asignatura "Estudio de Casos en Educación Matemática".

En la Universidad Católica del Maule el "Taller de Estudio Casos" se incorporó oficialmente desde 2009 como curso optativo de profundización para futuros docentes de matemática.

En la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Serena, se dicta el "Taller de Estudio de Casos" desde el segundo semestre de 2008 como curso electivo, incluido en el área de desarrollo personal y sociocultural de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación. Incluso, existe la posibilidad de que este curso sea integrado como curso obligatorio en futuras propuestas curriculares.

El Instituto de Matemáticas de la PUCV ha incluido "Estudio de Casos" en la nueva malla curricular, como una asignatura actualmente vigente en su carrera de Pedagogía en Matemática. Además, la metodología de estudio de casos ha sido incorporada a los programas de formación continua, específicamente, en el Postítulo de Mención en Educación Matemática y en los Talleres Comunales, actividades ambas realizadas en convenio con el MINEDUC.

En la UMCE se ofrece el "Taller de Estudio de Casos" en forma permanente, como curso electivo de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática.

Desde 2005, la Universidad de Chile tiene un programa de formación de profesores de matemáticas y física, coordinado por la Facultad de Ciencias y por el Departamento de Estudios Pedagógicos de la Facultad de Filosofía y Humanidades. En la actualidad, el "Taller de Estudio de Casos" se dicta como un curso extraprogramático en el segundo semestre de cada año. En 2010, y como parte de un proyecto MECESUP, se está estructurando una malla curricular para este programa, en el cual se pretende incluir el Taller de Casos como un curso electivo.

Podemos afirmar que el Taller de estudio de casos nos ha permitido introducir en todas las universidades participantes una metodología valiosa y muy bien ajustada a las necesidades de la formación pedagógica. Además, es relevante que las dinámicas, los casos y las guías para el facilitador, hayan sido elaboradas íntegramente por académicos chilenos, matemáticos y educadores, que en un trabajo serio y de una entrega a toda prueba, lograron el producto que aquí presentamos con profundo orgullo, animados por la esperanza de contribuir a la mejor formación de nuestros futuros profesores y profesoras de matemática y, por ende, contribuir al logro de mejores procesos de enseñanza y aprendizaje en las escuelas del país.

Capítulo 4: Extensión de la metodología

4.1 Taller de casos para la formación inicial de profesores de Educación Básica

4.1.1 Experiencia en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Durante el segundo semestre de 2008 se realizó un Taller de casos para la formación inicial de profesores de segundo ciclo de Enseñanza Básica con especialización en matemática, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El equipo a cargo de esta extensión del proyecto estuvo integrado por Luisa Aburto, Soledad Montoya y Jaime Mena, quienes crearon nuevos casos y los pilotearon con estudiantes de la carrera.

Se elaboraron cinco casos, donde los temas matemáticos involucrados tenían relación con tópicos del segundo ciclo básico del marco curricular nacional. Algunos de los tópicos tratados fueron el Teorema de Pitágoras, en particular, la diferencia entre indagación para conjeturar y argumentar la validez del teorema; la suma de números enteros, específicamente respecto a la frase "sume los números y conserve el signo del mayor": ¿Cuál es el sentido de esta frase? ¿Está correcta? ¿Podría usted mostrar una manera de explicar la suma de números enteros a estudiantes de Séptimo Básico? También hubo casos referentes a resolución de ecuaciones de primer grado, y uso de gráficos para resumir información estadística, entre otros. En la Adenda incorporamos algunos ejemplos de estos casos.

El taller se realizó dentro del curso "Didáctica de la Matemática 3" y participaron en las sesiones alrededor de 10 estudiantes de sexto semestre de la carrera. Las discusiones se centraron muy fuertemente en lo pedagógico. En general, la mayoría evitaba los temas matemáticos, lo que hizo necesario un trabajo de facilitación importante por parte de los conductores de los casos, para que la reflexión los abordara.

La ventaja de realizar el taller en este nivel, fue que los futuros docentes estaban más abiertos a reconocer que el caso presentaba un dilema real y profundo y que ellos, en primera instancia, no tenían una solución evidente. Una situación diferente se daba con los estudiantes de pedagogía en Educación Media, quienes decían, a menudo, frases como *"el problema es que el profesor del caso partió mal, si lo hubiese hecho de este modo no hubiese tenido este problema"*.

Los futuros profesores y profesoras de Educación Básica en segundo ciclo, reconocían con menor dificultad que invariablemente se suscitarían problemas respecto a la enseñanza de la matemáticas, con respecto a los cuales no siempre tendrían la mejor respuesta para los alumnos y alumnas del curso, ya que, seguramente, ni siquiera habrían pensado en las potenciales preguntas de un estudiante.

Este taller no se replicó en otras universidades, debido a que no era parte del proyecto hacerlo, pero sería interesante pilotear estos casos y crear otros en una comunidad más grande que la que compartió esta experiencia.

4.1.2 Experiencia en la Pontificia Universidad Católica de Chile

El segundo semestre de 2009 se realizó una nueva experiencia piloto, pero en esta oportunidad, enfocada en alumnos de Pedagogía Básica de la Pontificia Universidad Católica. Un equipo de profesores liderado por Pierina Zanocco, de la Facultad de Educación, desarrolló nuevos casos, especialmente orientados para que este nuevo público objetivo pudiera dar una mirada más profunda a temas directamente relacionados con la enseñanza de la matemática del primer ciclo básico. Este taller se incorporó a un curso de Didáctica de la Matemática de la carrera de Pedagogía en Educación General Básica de esa universidad.

En el equipo de investigadores participaron matemáticos y educadores, entre ellos Ivette León y Renato Lewin, junto a Pierina Zanocco; luego se integró al equipo Gloria Schwarze, quien aportó importantes ideas que incluimos en los casos elaborados.

En esta ocasión fue necesario hacer una capacitación en la metodología a los participantes de la PUC, pues ellos, a diferencia del equipo de la PUCV, no participaron del proyecto desde sus inicios. Esta capacitación estuvo a cargo de Jaime Mena de la PUCV y de Cristián Reyes de la U. de Chile, quienes se encargaron de mostrar la metodología, describir las características de un buen caso y cómo elaborarlos. Jaime Mena fue facilitador del primer caso que se puso en escena, de manera de explicar *in situ* todas las dificultades que involucra conducir un caso, y las técnicas que pueden ayudar a mejorar la participación de los estudiantes en la discusión.

Los estudiantes, alrededor de 8, fueron entusiastas y generosos en su participación. Respondieron las encuestas y nos dieron importantes sugerencias. Sin embargo, el piloto fue demasiado pequeño para poder decir algo más definitivo. Creemos importante crear una comunidad que analice, cree y evalúe nuevos casos para este nivel.

Los casos construidos hacían referencia a argumentación de resultados matemáticos mediante representaciones, metáforas de la multiplicación y su algoritmo, dificultades con números decimales y algoritmos de multiplicación, juegos matemáticos (cómo aprovecharlos), medidas de tendencia central (definiciones e interpretaciones), primer acercamiento a la multiplicación, entre otros.

4.1.3 Taller de Casos en la formación continua de profesores y profesoras Enseñanza Media

En enero de 2009 se realizó un curso-taller de estudio de casos, esta vez dentro del marco de formación continua para profesores de Enseñanza Media. El objetivo de esta actividad desarrollada en la Universidad de Chile, era evaluar la metodología de estudio de casos entre 26 profesores en ejercicio, quienes reflexionaron y discutieron acerca de su práctica docente, y respecto a los conceptos matemáticos y habilidades que están desarrollando en sus estudiantes.

Se trataba de un curso JAP (Jornada de Actualización para Profesores) para el magisterio, en el marco del Programa de Educación Continua (PEC) de la Universidad de Chile. Tuvo 25 horas cronológicas, repartidas en cinco días. Durante una semana los participantes analizaron seis casos y respondieron una encuesta que arrojó una positiva evaluación al momento de calificar los contenidos, calidad y aplicación de los mismos en el aula. Las respuestas a las preguntas abiertas confirman que el curso-taller fue apreciado como 'excelente, muy bueno, provechoso, positivo, aplicable al desarrollo profesional docente, y un aporte al trabajo docente en el aula'. Estimaron, además, que era altamente relevante para su práctica profesional, en grado mayor que un curso típico de formación continua.

Este curso fue dirigido por Jorge Soto y Lino Cubillos y contó con la valiosa ayuda de Carmen Gloria Medina, quien participó activamente en la elaboración de casos, ajuste de casos para las necesidades propias de los profesores en ejercicio, en la evaluación del curso y en la conducción.

Cada día los participantes leían un caso, lo discutían en pequeños grupos y luego reflexionaban a nivel de asamblea. Después, el facilitador comentaba asuntos matemáticos o pedagógicos del caso, a modo de profundización o generalización. Al final del curso los participantes presentaron un informe respecto de un caso que se les entregó el último día. Debían reconocer las situaciones problemáticas y las diferentes visiones en tensión, para luego entregar estrategias orientadas a solucionar el problema. Este informe y los breves informes diarios referentes a cada caso, constituyeron la evaluación del curso.

Los tópicos involucrados en los casos tuvieron relación con: metáforas para la enseñanza de la esperanza y varianza estadística, uso de TIC en clases de matemática, demostraciones en matemática (argumentos algebraicos versus representaciones con diagramas), nomenclatura con fracciones (fracciones iguales versus fracciones equivalentes), entre otros.

El curso fue evaluado mediante una encuesta, donde los participantes calificaban de 1 a 7 diferentes características del curso. Por ejemplo, en "calidad de los contenidos entregados" y "metodología utilizada" la nota promedio fue de 6,5; en general, el curso fue evaluado con nota superior a 6,3 en todas las variables.

Primer Ciclo de Enseñanza Básica

En enero de 2010 se realizó un Taller de estudio de casos para profesores de primer ciclo de enseñanza básica, en el marco de los cursos del Bicentenario de la Vicerrectoría de Investigación y Desarrollo de la Universidad de Chile. Fue dirigido por Cristián Reyes y Romina Menares, con una duración de 25 horas, repartidas en cinco días de la segunda semana de enero de ese año. Los objetivos específicos de ese curso fueron los siguientes:

- Analizar situaciones de aula considerando la interrelación sistémica de las dimensiones matemáticas, didácticas y pedagógicas.
- Valorar la propia experiencia y la de los pares, para lograr un desarrollo profesional en comunicación con los diferentes actores.
- Reflexionar sobre aspectos fundamentales y profundos de la enseñanza de la matemática en primer ciclo.

Se analizaron solo cuatro casos, pues a lo largo del proyecto hemos aprendido que un caso no se agota en una sesión, ya que se requieren, al menos, dos sesiones para discutir y presentar propuestas de solución. Es recomendable que esas dos sesiones estén en días distintos, para que los participantes tengan tiempo de reflexionar con mayor profundidad sobre el caso.

El calendario de actividades de ese curso fue el siguiente:

El primer caso correspondía a un nivel de Cuarto Básico, y se refería a la argumentación de resultados matemáticos utilizando metáforas y representaciones. En particular, se refería a conjeturar y argumentar que la suma de dos números pares es par, y a diferenciar de una verificación mediante casos particulares. El segundo caso abordó la utilización de juegos en la clase de matemática, su aporte y cómo se puede obtener mayor provecho de ellos. El tercer caso mostró las presentaciones de la multiplicación de números naturales y su algoritmo, y el cuarto, el uso de metáforas y representaciones para la resolución de problemas.

Las actividades realizadas por los y las docentes estaban relacionadas con el caso del día y permitían seguir avanzando en el análisis de las ideas del caso. Por ejemplo, la actividad asociada al caso de juegos matemáticos fue la siguiente:

Una profesora propone la siguiente "magia" a sus niños de Tercero Básico:

Cuadro 4.1. Calendario de actividades de curso-taller de casos para profesores de primer ciclo básico. Enero 2010. Fac. de Ciencias Físicas y Matemáticas. U. de Chile.

	Lunes 11	Martes 12	Miércoles 13	Jueves 14	Viernes 15
8:30-10:00	Presentación de la Metodología de Estudio de Casos.	Trabajo en Grupo: Planificación de actividades relativas a números pares e impares.	Trabajo en Grupo: Planificación de actividades relativas a juegos en matemáticas.	Trabajo en Grupo: Planificación de actividades relativas a algoritmos de sumas y multiplicación.	Trabajo en Grupo: Resolución de problemas.
10:00-10:05	Descanso	Descanso	Descanso	Descanso	Descanso
10:05-11:35	Análisis del primer caso.	Análisis del segundo caso.	Análisis del tercer caso.	Análisis del cuarto caso	Presentación de problemas por parte de los docentes.
11:35-11:45	Descanso	Descanso	Descanso	Descanso	Descanso
11:45-13:30	Presentación del relator: Argumentación en enseñanza básica.	Presentación del relator: Juegos y matemáticas.	Presentación del relator: Algoritmo de la multiplicación.	Presentación del relator: Metáforas.	Informe final.

"Escriban un número de dos dígitos, sin que yo los vea, luego escriban el mismo número dado vuelta. Resten el menor al mayor. Luego va puesto por puesto preguntando ¿la resta te dio un número de un dígito o de dos dígitos? Cuando le respondían "un dígito, tía", ella adivinaba que la resta le dio nueve. Cuando le respondían "de dos dígitos tía", ella además pedía el dígito de las unidades, y con la respuesta del niño adivinaba el valor de la resta".

Realice las siguientes actividades:

a. ¿Por qué cuando le decían que la resta tenía un dígito, ella siempre decía 9 y efectivamente acertaba?
b. ¿Cuál es la estrategia de la profesora para adivinar la resta cuando tiene dos dígitos?
c. ¿Por qué esa estrategia funciona?
d. ¿Cuáles conocimientos matemáticos están en juego en esta "magia"?

Este curso-taller fue evaluado de manera óptima por los participantes, salvo en un punto, ya que nos dimos cuenta tarde de que los y las docentes de primer ciclo básico no forman un grupo homogéneo, sino que, por lo general, están especializados en subciclos: Primero y Segundo o Tercero y Cuarto, de modo que algunas actividades resultaban muy demandantes para quienes atendían Primero y Segundo.

Dicha experiencia fue la base para un cursillo que dictó el profesor C. Reyes en la Sesión de Educación Matemática del III Workshop Iberoamericano de Matemáticas Aplicadas, de la Universidad del Biobío en Chillán, en la tercera semana de enero de 2010, ocasión en que docentes de diferentes localidades cercanas a Chillán conocieron la metodología y la evaluaron positivamente.

Talleres Comunales

Talleres Comunales es una instancia creada en 2001 por el Ministerio de Educación a través del CPEIP, cuyo objetivo es propiciar la reflexión crítica y constructiva y, por sobre todo, el aprendizaje entre pares. El punto de partida es la valoración del conocimiento generado en la práctica cotidiana, que es experiencial y personificado, y que tiene sentido para quienes lo han producido y utilizado.

Hemos dicho que el estudio de casos es una metodología que tiene como centro la reflexión entre pares; en razón de ello, el área de Didáctica de la Matemática del Instituto de Matemática de la PUCV presenta y desarrolla una propuesta en la cual se plantean Talleres Comunales, y una de las herramientas a utilizar es esta metodología.

El funcionamiento de los Talleres Comunales consiste en que las comunas que participan tienen un grupo de profesores (alrededor de 15 a 30 docentes), quienes se reúnen semanalmente, liderados por un profesor o profesora guía que tiene la responsabilidad de conducirlos.

La Universidad, a través de Jornadas Nacionales, capacita a los profesores y profesoras guías en lo disciplinar (contenidos), lo didáctico, lo pedagógico y la metodología para trabajar con los docentes participantes y desarrollar la capacidad de reflexión y análisis tanto personal como grupal, promoviendo la estrategia del aprendizaje entre pares.

Se desarrollaron entre los años 2008 y 2009, cubriendo en total alrededor de 40 comunas. El equipo estuvo conformado por Arturo Mena, director del proyecto; María Soledad Montoya, directora ejecutiva; y los académicos Jaime Mena, Patricia Vásquez, Elizabeth Ramos, Verónica Fernández y Nielka Rojas.

Capítulo 5: El taller de casos para estudiantes de pedagogía en matemática

5.1 Antecedentes

El taller de estudio de casos, como hemos dicho, es una instancia de formación y desarrollo de competencias docentes basadas en el análisis y reflexión colectiva de situaciones de aula propias de la educación matemática. Basados en la experiencia en el proyecto, lo hemos propuesto como un curso de un semestre con, al menos, dos sesiones semanales en las cuales se analice un caso en profundidad, de manera que los y las estudiantes puedan reconocer valor en las posturas diferentes a la propia y, a la vez, observar las dificultades reales del caso.

La descripción de cada caso es una primera forma de aproximación a la realidad en la que más tarde habrán de desenvolverse profesionalmente. Primero, hay una lectura personal y luego un comentario grupal. Se identifican y analizan los conflictos existentes, se explicitan y parafrasean las concepciones suscritas por los personajes, se proponen y discuten soluciones o variantes de acción, se interpela el texto, se ponen en juego las representaciones personales y se formulan acciones correctivas. En suma, el caso es un elemento reactivo que pone en acción las ideas de cada uno de los integrantes del equipo de trabajo. El facilitador estimula y contribuye a que las interacciones entre los participantes del taller se produzcan y se mantengan dentro del tema central.

En términos de habilidades docentes, no solo profundiza en aspectos complejos y sutiles de la matemática de nivel escolar, sino que también permite vislumbrar y comprender la naturaleza específica del problema pedagógico a enfrentar en el aula, su complejidad y desafíos y su relación con los distintos enfoques de enseñanza, las diferentes teorías de aprendizaje y las particularidades de los alumnos con quienes deberá trabajar. También, desarrolla habilidades y competencias de trabajo en equipo, gracias a la experiencia temprana de trabajo con pares en el análisis de situaciones complejas y en la formulación de estrategias de mejoramiento y superación de las dificultades.

Objetivo central del taller es potenciar la formación profesional de los y las estudiantes de pedagogía en matemática, a través de la metodología de estudio de casos que presupone la discusión, análisis y reflexión de situaciones de aula que integran las dimensiones didácticas, matemáticas y de contexto, propias del ejercicio profesional.

Para alcanzar este objetivo central, el taller se propone que los participantes logren el cumplimiento de los siguientes objetivos específicos:

1. Comprender los elementos centrales de cada caso (posiciones en conflicto, visiones en juego, postura de cada personaje, implicancias de cada visión, soluciones posibles, naturaleza matemática y didáctica de la situación planteada, etc.), presentes en situaciones de aula en relación a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
2. Analizar situaciones de aula propias de la educación matemática, considerando la interrelación de las dimensiones matemáticas, didácticas y pedagógicas en contextos basados o inspirados en la realidad.
3. Desarrollar criterios y estrategias de actuación profesional ante situaciones conflictivas emergentes, propias de los procesos educativos en las aulas.
4. Experimentar la potencialidad del trabajo en equipo como estrategia de desarrollo profesional, en actividades de reflexión, análisis y construcción consensuada de propuestas de mejoramiento o superación de problemáticas de índole educativa en el ámbito de la educación matemática.
5. Comprender, a partir del estudio de los casos planteados, la necesidad de profundizar e investigar acerca de los tópicos matemáticos, pedagógicos o de contexto escolar involucrados en cada caso, como una estrategia pertinente de profesionalización orientada a una práctica profesional reflexiva.
6. Desarrollar habilidades comunicacionales para expresar opiniones en forma oral y escrita, construir argumentaciones fundadas y enriquecer su visión personal a partir de la escucha y consideración de posiciones distintas de la propia.

5.2 Metodología

En el desarrollo del taller de estudio de casos es posible reconocer tres etapas: preparación de la sesión, ejecución y evaluación.

La preparación del taller y de cada sesión requiere tener claros varios aspectos. Primero, tener conciencia de que la participación de los estudiantes no será la misma al inicio, que cuando ya han transcurrido varias semanas de implementación. En las primeras sesiones estarán sorprendidos por esta nueva metodología, y quizás no muy interesados en participar; algunos dirán frases como “yo pienso lo mismo que Mariela” o “el problema es que la profesora se equivocó al introducir así el concepto matemático”.

Por lo tanto, se sugiere que las primeras tres o cuatro sesiones sean de entrenamiento, para que los estudiantes conozcan la metodología y no tengan temor a expresar opiniones o reconocer debilidades. Además, las sesiones iniciales permitirán al facilitador conocer al grupo, sus formas de opinar, qué estímulos los hacen reaccionar. Estos primeros casos debieran ser de fácil acceso, aspecto que debe determinar el propio facilitador.

Previo a cada sesión, el facilitador debe conocer muy bien el caso, sus personajes, sus situaciones problemáticas, las opiniones en contraposición que se espera que reconozcan los estudiantes. Debe tener claros los objetivos del caso y hacia dónde conducir la discusión. También, debe tener decidida la estrategia de presentación y discusión del caso: ¿Pedirá que alguien haga un resumen? ¿Pedirá que algunos estudiantes se concentren en algún personaje del relato? ¿Pedirá que dramaticen algún momento importante del caso?

En la ejecución de una sesión de un caso y, a su vez, en cada caso tratado en el taller, es posible reconocer cuatro momentos, los que serán descritos a continuación: conocimiento del caso, discusión, reflexión personal y síntesis.

- **Conocimiento del caso**: La finalidad de esta etapa es que los participantes conozcan de manera detallada los hechos y posiciones descritos en el caso. Para ello se han realizado acciones como las detalladas a continuación y que, por cierto, no se emplearon de modo excluyente, ya que en algunos casos aparecieron combinadas para asegurar mejor el propósito de esta etapa:
    - Entregar el caso para ser leído antes de la sesión (sesión previa o vía e-mail).
    - Lectura silenciosa del caso al inicio de la sesión de trabajo.
    - Lectura grupal del caso al inicio de la sesión (sucesivos lectores).
    - Parafraseo de las posiciones de cada personaje del relato a cargo de estudiantes participantes designados y/o voluntarios.
    - Representación dramatizada de las posiciones de cada personaje del relato por participantes voluntarios o designados del taller.
- **Discusión del caso**: En esta etapa interesa que los estudiantes expresen sus opiniones y argumentos en relación al caso; que se escuchen unos a otros y que confronten sus posiciones. El facilitador anima esta discusión y cuando no se produce de manera espontánea, la promueve con preguntas dirigidas al grupo o bien, a sus participantes potencialmente más activos. En esta etapa es preciso disponer de preguntas cuidadosamente preparadas antes de la sesión, para motivar la expresión de opiniones, juicios, argumentaciones. Iniciada la discusión, el facilitador pasa a un segundo plano, interviniendo solo para mantener la discusión dentro del tema o para evitar que el uso de la palabra se monopolice por unos pocos participantes.

- **Reflexión Personal**: Concluida la etapa anterior, cada participante redacta un informe de manera personal, con:
  - Su respuesta a preguntas formuladas por el facilitador.
  - Su opinión en relación al caso o a la postura de cada personaje del caso.
  - Sus reflexiones o aprendizajes en relación a los contenidos didáctico matemáticos o de contexto involucrados en el caso.
    Nota: Esta etapa puede ser llevada a cabo después de la síntesis hecha en la sesión, como trabajo en casa entre una sesión y la siguiente.
- **Síntesis del caso**: Etapa colectiva, que debe ser guiada muy de cerca por el facilitador. Aquí se resume cuáles fueron las posiciones antagónicas presentes en el caso, cuáles fueron las dificultades profundas que presenta y posibles planes de acción para solucionar las problemáticas presentadas en el caso.

La evaluación del Taller de casos presenta algunos desafíos específicos para el profesor o facilitador, en virtud de la diversidad de aspectos que entran en juego durante su realización: tópicos de naturaleza matemática, didáctica, de contexto, discusión, opiniones, interacciones personales, reflexiones, etc.

Sin embargo, tratándose de la evaluación del desempeño de los estudiantes participantes en el taller, la pregunta evaluativa es: ¿Qué aprendieron los estudiantes tras su participación en el taller de casos? Y esta pregunta nos mueve a formularnos otra pregunta: ¿Qué es lo que se debe evaluar? Respondido lo anterior, surgen nuevas interrogantes: ¿Cómo evaluar aquello que se ha definido como evaluable? ¿Cuáles son los indicadores que mejor expresan los aprendizajes desarrollados por los estudiantes que participan en el taller de casos?

Para responder a la pregunta ¿qué evaluar?, es necesario remitirse a los objetivos, generales y específicos, declarados como propósitos o intenciones del taller. Sin embargo, este criterio no resuelve todo el problema, pues aunque se tenga claro qué se debe evaluar, en ocasiones no resulta técnicamente sencillo, pese a que acota el campo de indagación evaluativa y permite focalizar los esfuerzos y la mirada del evaluador en aspectos consistentes con la intencionalidad pedagógica del taller.

Acorde al criterio de evaluar en función de los objetivos, es posible reconocer al menos seis ámbitos de evaluación, uno por cada objetivo específico, de acuerdo al siguiente detalle:

Cuadro 5.1. Taller de estudio de casos

Objetivo Específico 1	Comprender los elementos centrales de cada caso (posiciones en conflicto, visiones en juego y sus implicancias, postura de cada personaje, soluciones posibles, naturaleza matemática y didáctica de la situación planteada, etc., presentes en situaciones de aula en relación a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Aspectos evaluables	▪ Conocimiento y comprensión del caso. ▪ Reconocimiento de la postura de cada personaje. ▪ Reconocimiento de "lógicas" y visiones que explican y fundamentan las posiciones y actuaciones de los personajes.
Formas de evaluación	▪ Ítems de respuesta cerrada. ▪ Ítems de pregunta abierta con pautas de corrección. ▪ Ítems de desarrollo con rúbrica de evaluación. ▪ Mapas conceptuales que representen interacciones y conflictos del caso.

Objetivo Específico 2	Analizar situaciones de aula propias de la educación matemática, considerando la interrelación de las dimensiones matemáticas, didácticas y pedagógicas en contextos basados o inspirados en la realidad.
Aspectos evaluables	▪ Interdependencia entre contenidos matemáticos, estrategias de enseñanza y evaluación. ▪ Concepciones de matemática y de educación matemática implicadas.
Formas de evaluación	▪ Ítems de respuesta cerrada. ▪ Ítems de desarrollo con rúbrica de revisión.

Objetivo Específico 3	Desarrollar criterios y estrategias de actuación profesional ante situaciones conflictivas emergentes, propias del quehacer educativo en aula.
Aspectos evaluables	▪ Calidad de las propuestas de acción. ▪ Calidad de la argumentación de soporte a las decisiones y/o propuestas de superación de conflictos.
Formas de evaluación	▪ Ítems de desarrollo. ▪ Informes con propuestas.

Objetivo Específico 4	Experimentar la potencialidad del trabajo en equipo como estrategia de desarrollo profesional, en actividades de reflexión, análisis y construcción consensuada de propuestas de mejoramiento o superación de problemáticas de índole educativo en el ámbito de la educación matemática.
Aspectos evaluables	▪ Calidad de las intervenciones y de los aportes a la discusión. ▪ Actitud personal durante la discusión (tolerancia, escucha, participación, madurez).
Formas de evaluación	▪ Pauta de observación. ▪ Lista de chequeo. ▪ Escala Lickert. ▪ Rúbrica.

Objetivo Específico 5	Comprender, a partir del estudio de los casos planteados, la necesidad de profundizar e investigar acerca de los tópicos matemáticos, pedagógicos o de contexto escolar involucrados en cada caso, como una estrategia pertinente de profesionalización orientada a una práctica profesional reflexiva.
Aspectos evaluables	▪ Pertinencia de las referencias a marcos conceptuales aceptados. ▪ Uso adecuado del lenguaje profesional.
Formas de evaluación	▪ Informes con rúbrica asociada. ▪ Listas de cotejo.

Objetivo Específico 6	Desarrollar habilidades comunicacionales para expresar opiniones en forma oral y escrita, construir argumentaciones fundadas y enriquecer su visión personal a partir de la escucha y consideración de posiciones distintas de la propia.
Aspectos evaluables	▪ Claridad de las argumentaciones escritas y habladas. ▪ Estructuración adecuada de las argumentaciones empleadas.
Formas de evaluación	▪ Rúbricas. ▪ Listas de cotejo.

5.3 Facilitación de una sesión de un Taller de casos

Como hemos dicho, el facilitador del caso juega un papel crucial, ya que debe guiar la discusión para que se analicen los temas centrales del caso y no aspectos periféricos.

Las recomendaciones internacionales, y lo que nos ha dado resultado, es que los grupos no sean de más de 20 integrantes ni de menos de 10, para poder realizar una discusión donde todos puedan opinar, las opiniones sean fundadas y puedan ser revisadas nuevamente.

FIGURA 5.1. Grupo de estudiantes de Pedagogía en Matemática de la PUCV, sentados en círculo discutiendo un caso, con el profesor Jaime Mena como facilitador.

Es importante que la discusión se realice en un grupo dispuesto en círculos, donde el facilitador o facilitadora no ocupa uno de los asientos del círculo, sino que se mueve por dentro y, muy especialmente, por fuera del círculo. Esto es para que los y las estudiantes concentren las opiniones hacia sus compañeros. El facilitador debiera permitir que se produzca una conversación abierta, sin tener que intervenir luego de cada opinión, siempre y cuando se mantenga un ambiente de respeto y tolerancia.

Figura 5.2. Diagrama de la disposición del Taller de estudio de casos.

A continuación presentamos algunos aspectos importantes a considerar, en tanto la práctica nos ha señalado como cruciales en el conjunto:

Antes de la sesión:

1. Leer varias veces el caso y la guía.
2. Retener los nombres y detalles de la historia en la memoria.
3. Preguntarse a sí mismo: ¿Por qué esto aparece en el caso? ¿Es anecdótico o es importante?
4. Plantear metas específicas propias para la discusión del caso.
5. Recolectar información respecto de anteriores experiencias, de otros profesionales o propias, respecto a la implementación del caso.
6. Desarrollar preguntas de antemano, para hacer que los estudiantes noten algunos puntos críticos del caso, que podrían no ser evidentes.
7. En los casos en que aparecen estudiantes en las historias, desarrollar preguntas tendientes a ponerse en el lugar del estudiante de la escuela, y tratar de entender cuál es la dificultad que tiene.

8. Anticipar posibles dificultades. Por ejemplo, si la audiencia no advierte un error conceptual (matemático) del caso, ¿qué debo hacer para mostrar que efectivamente es un error?, ¿por qué ese error está tan difundido en las escuelas?
9. Imaginar que la discusión se atasca y planear formas de hacerla fluir.
10. Definir una estrategia para comenzar la discusión, incluyendo la distribución de las sillas, la lectura del caso (pedir a una o dos personas que hagan un breve resumen) y el inicio de la discusión en sí (tipo de preguntas).
11. Planear el término de la discusión, cuidando que se hayan comentado los asuntos cruciales.

Durante la sesión:

1. Estar atento a la reacción natural de los estudiantes al caso. Conocer qué aspecto del caso les llama más la atención puede denotar sus propias falencias, preferencias o fortalezas.
2. Mantener la discusión en un ambiente de respeto y tolerancia.
3. Animar a los estudiantes para que respondan a sus pares y no al facilitador.
4. Pedir que expliquen lo que dijo un compañero, de una forma distinta y propia.
5. Dar estímulos positivos a las respuestas, para crear un ambiente donde todos participen: ¡Qué buena observación! ¡Excelente!
6. Moverse dentro de la sala, para que la tensión de la sesión no se centre en el facilitador.
7. Acercarse a quien defienda una opinión que aparece más débil que las otras, para traspasarle el poder del facilitador.
8. Invitar al grupo a dar opiniones, cuando surge una respuesta muy equivocada.
9. Dejar muy claro que no existe una respuesta única, ni una sola manera adecuada de enseñar.
10. Cuando el caso incluye estudiantes secundarios, jugar su rol, diciendo frases como "su respuesta no me satisface", considerando a los futuros profesores en el papel del profesor del relato. Pedir que expliquen como si estuvieran frente a estudiantes.
11. Analizar la mayoría de los aspectos del caso, aunque no es necesario analizarlos todos.
12. Recordar siempre que la meta de la discusión es que cada estudiante tenga un acercamiento a la situación problemática y reflexione al respecto.
13. Recordar que las preguntas que aparecen en la Guía del facilitador, tienen como objetivo guiar la discusión, por si se estanca o desvía. El facilitador no entrega respuestas a las preguntas, sino que estimula la reflexión de los estudiantes sobre el problema, para que obtengan una respuesta propia.

Después de la sesión:

Para que la experiencia ganada en la conducción de cada caso sea enriquecedora y se acumule sesión a sesión, al finalizar la discusión de cada caso es muy importante que anoten en un cuaderno de ruta sus observaciones, lo que les gustaría recordar para éste o el siguiente caso. Por ejemplo, hacer anotaciones respecto a:

1. Conflictos del caso que no provocan gran controversia.
2. Estrategias que dan resultados y otras que no funcionan.
3. Aspectos que hacen participar a los integrantes o los inhiben.
4. Objetivos que no se alcanzan.
5. Conocimiento deficiente de los estudiantes de los tópicos matemáticos.

En general, ya hemos dicho que no hay una única manera de conducir un caso; en la Universidad de Concepción los estudiantes de pedagogía llegaban con el caso leído a la sesión; en otras, como en la Universidad Católica del Maule, se encuentran por primera vez con el caso en la sesión misma. En la mayoría de los lugares se pide a algunos estudiantes que hagan un resumen del caso; en otros, como en la PUC, se les pide que expliquen los conflictos del caso “puestos en los zapatos” de alguno de los personajes. En la UDEC se solicita que dramaticen un momento conflictivo del caso tomando roles.

Respecto al tiempo dedicado a un caso, como ya dijimos, la experiencia nos dice que 1,5 horas es muy poco tiempo para reconocer los conflictos importantes y desarrollar ideas claras que expresen las diferentes reflexiones, soluciones y posturas. En general, se sugieren dos sesiones de 1,5 horas, para lograr una maduración del tema. Sin embargo, tal vez en las primeras tres o cuatro sesiones, las de conocimiento del caso, se podría utilizar un caso por sesión.

Nos parece importante que la facilitación del curso esté a cargo de un equipo formado por al menos dos académicos, ojalá un matemático y un educador, para que ambos se vayan observando y retroalimentando a lo largo del Taller. Entendemos que esto implica un costo mayor, pero se pueden conformar equipos con estudiantes de postgrado en didáctica o en matemática, cuyos perfiles sean adecuados para el desarrollo de la tarea.

Capítulo 6: Casos para la formación de profesores de matemáticas de enseñanza media

En la elaboración de estos casos participaron los siguientes profesionales: Eduvina Villagrán, Laura Vega, Gustavo Labbé y Michael Neuburg, de la U de la Serena; Luisa Aburto, María Soledad Montoya, y Jaime Mena, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Jorge Soto, Lino Cubillos, Patricio Felmer, María Leonor Varas y Cristián Reyes de la Universidad de Chile; Soledad Ibaceta, Giovanna Ticchione y María Cecilia Tapia de Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación; Carlos Caamaño, María Aravena y Jorge González Lorca, de la Universidad Católica del Maule; Andrés Ortiz, Eugenio Chandía y César Flores, de la Universidad de Concepción.

El siguiente es el listado de los casos, con el tema que abordan y un título de "fantasía" que los hacen más cercanos a la realidad cotidiana en aulas escolares o universitarias.

Caso 1:
Acerca de la aproximación de raíces mediante números decimales finitos.
Título: "El principio de la tetera".

Caso 2:
Acerca de condiciones para que dos rectas en el plano sean perpendiculares.
Título: "¿Qué relación tienen los 90° con el -1?".

Caso 3:
Acerca de la evaluación de una prueba de semejanza resuelta mediante geometría analítica.
Título: "¿Justicia ciega?"

Caso 4:
Acerca de una situación metodológica sobre productos notables.
Título: "El cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble ¿del? producto".

Caso 5:
Acerca de la ambigüedad de decir fracciones equivalentes y usar el signo igual.
Título: “La matemática, un lenguaje raro”.

Caso 6:
Acerca de cómo motivar a estudiantes de secundaria al estudio de matemáticas.
Título: “¿Matemática para todos?”

Caso 7:
Acerca de la pertinencia del uso de una metáfora para la suma de fracciones.
Título: “Solo resulta en el postítulo”.

Caso 8:
Acerca de cómo influyen las creencias respecto el aprendizaje en la enseñanza.
Título: “La profecía de los tres tercios”.

Caso 9:
Acerca de los problemas matemáticos de solución no única.
Título: “El problema de un problema”.

Caso 10:
Acerca del dominio y recorrido de una función real.
Título: “¿Y con el puro gráfico no basta?”.

Caso 11:
Acerca de la pertinencia del uso de TIC en los tiempos actuales.
Título: “Una historia de encuentros y desencuentros”.

Caso 1: El Principio de la tetera

Bernardo es un profesor de mediana edad, lleva unos 15 años haciendo clases de matemática en varios colegios. Según él, siempre ha tenido buenos resultados. Cuenta con orgullo que cuando ya han pasado algunos semestres en la universidad, sus ex - alumnos lo vienen a visitar para agradecerle sus enseñanzas. Siempre fue un buen estudiante en la escuela de pedagogía. Se interesó en tomar cursos electivos de matemática en vez de cursos de formación pedagógica, como lo hacía la mayoría de sus compañeros. Mientras más aprendía, más se daba cuenta de que la matemática que le habían enseñado escondía asuntos teóricos profundos, que tal vez no podría transmitir a sus estudiantes. Además, se daba cuenta de que muchos tópicos no los había asimilado con la claridad suficiente, razón por la que, al comienzo de la práctica, su seguridad no era del todo sólida.

Sin embargo, después de varios años de profesión, se dio cuenta de que su preparación era mejor que la de muchos colegas, quienes ni siquiera se daban cuenta de la profundidad de los problemas. Además, tampoco ha pasado mayores zozobras con sus estudiantes. Por lo general, no hacen muchas preguntas y con lo que él les enseña, les basta para sentirse abrumados.

Este año da clases a terceros y cuartos medios. En general, no le gusta trabajar con los cuartos, porque están preocupados de otras cosas: giras de estudios, PSU, graduaciones, etc. No se hace mala sangre con ellos, pero sí pone todo su esfuerzo y profesionalismo en el tercero.

El colegio tiene programas propios que se han ido perfeccionando muy lentamente en el tiempo, pero que tienen orgulloso a todo el departamento de matemática. Los resultados en SIMCE y PSU hacen que ese orgullo sea justificado.

Según el programa del colegio, en tercero medio deben ver el tema de Comparación y estimación de raíces, que está inserto en la unidad de Álgebra y Funciones. Pese a que Bernardo participó en la confección del programa, le resulta complicado interesar a su curso en el cálculo de raíces, tarea que bien sabe podría realizarse fácilmente con una calculadora de bolsillo.

Además, él siempre ha sido partidario de privilegiar en sus clases el desarrollo de métodos de razonamiento, antes que simples cálculos. Las aproximaciones con uno, dos, tres o más decimales, van en contra de su sensibilidad y le producen un cierto rechazo, el cual no logra del todo evitar traspasar a sus alumnos, lo que aumenta la dificultad para enseñar el tema.

Bernardo plantea sus dudas a Claudia, una colega con quien ha tenido discusiones muy enriquecedoras.

Bernardo: *La estimación de raíces siempre me ha parecido un tema difícil de enseñar y, personalmente, lo encuentro bastante aburrido; preferiría dejar expresadas las respuestas con raíces.*

Claudia: *Yo no soy partidaria de dejar siempre cantidades expresadas. De hecho, eso te impide conectar el contenido con problemas reales. Así, si un terreno con forma de cuadrado de lado 1 kilómetro quiere dividirse en 2 partes iguales, con una cerca sobre la diagonal del cuadrado, no puedes decir a tus alumnos que deben comprar* $\sqrt{2}$ *kilómetros de alambrado, sino que debes aproximar* $\sqrt{2}$.

Bernardo: *Es verdad, pero la aproximación de* $\sqrt{2}$ *la hace la calculadora; es difícil convencer a los adolescentes actuales de la utilidad de hacer tal cosa a mano.*

Claudia: *Los alumnos deben desarrollar su propia capacidad de cálculo. Además, la aproximación de raíces requiere calcular "a mano" sólo algunas fundamentales, y las otras se pueden obtener mediante las propiedades formales de la función raíz cuadrada.*

(Claudia explica a Bernardo que, en su clase, ella solo aproxima por encajonamientos sucesivos los valores de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, para luego aproximar otras raíces usando esos valores).

Claudia: *Más aún, el mismo hecho de poder aproximar las raíces aplicando sus propiedades básicas, te permite enseñar de mejor manera las propiedades en sí mismas. Por ejemplo, una buena ilustración de que* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, *es calcular* $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, *usando luego la aproximación (ya conocida) de* $\sqrt{2}$ *para aproximar* $\sqrt{8}$.

(Bernardo entiende perfectamente el punto planteado por Claudia y queda muy entusiasmado al ver cómo puede utilizar el problema de aproximar raíces para aplicar las propiedades de la función raíz).

Manos a la obra

En su primera clase sobre el tema, introduce las raíces usando la misma situación problemática planteada en la programación del tema y realiza el trabajo "pesado" de obtener aproximaciones con 2 decimales para $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, usando encajonamientos sucesivos,

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \qquad \sqrt{3} \approx 1,73$$

Bernardo no deja de mencionar que se debe tener cuidado con las aproximaciones, pues dependiendo de la unidad de medida que se use, la cantidad de decimales a utilizar puede crecer. Así, un error de 0,01 puede ser significativo o no, dependiendo de la situación y de las unidades.

Su segunda sesión sobre el tema comienza con una mención introductoria a las propiedades básicas para manipular raíces, y luego propone al curso el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1. Calcular $\sqrt{8}$ con 2 decimales.

Bernardo observa cómo sus alumnos creen estar frente a otro tedioso cálculo como los de la clase anterior y comienzan con desgano a aproximar la raíz por "ensayo y error". Espera unos minutos y luego, triunfante, les cuenta la historia del Principio de la tetera[1]logrando sacar una tibia sonrisa de 3 de sus alumnos.

"Ya hemos hecho el trabajo duro, el resto es cosa de ingenio", les dice, y procede a mostrarles el cálculo:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Ahora podemos utilizar la aproximación que ya tenemos de $\sqrt{2}$

$$\sqrt{8} \approx 2 \cdot 1,41 = 2,82$$

Ejercicio 2. *Calcular* $\sqrt{0,5}$ *con 2 decimales.*

Bernardo utiliza el desarrollo:

$$\sqrt{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,41}{2} = 0,705 \approx 0,71$$

Luego de varios ejemplos del estilo, dedica su tiempo al estudio de las propiedades formales de las raíces.

Está contento de haber encontrado, por fin, la manera adecuada de enseñar raíces, incluyendo técnicas de racionalización, como se hizo en el ejemplo 2, y se lo agradece a Claudia.

Un problema especial

Bernardo continúa con sus clases (trabaja más el tema de raíces, y continúa con desigualdades); al finalizar una de ellas, Magdalena y Natalia le piden ayuda en el siguiente ejercicio, que apareció en el último torneo de matemáticas en el que participa Magdalena, una de las mejores alumnas del curso. Es el siguiente:

Ejercicio especial: *Encontrar el número entero más cercano a la cantidad*

$$87(15 - \sqrt{224})$$

Magdalena: *Yo lo resolví usando lo que vimos en clase. Para aproximar* $\sqrt{224}$*, tenemos*

$$\sqrt{224} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 7} = 4\sqrt{2}\sqrt{7}$$

Bernardo: (Contento, porque lo visto en clase le sirvió a Magdalena). *Sí, en clase también vimos la aproximación para* $\sqrt{7} \approx 2,65$

Magdalena: *¡Sí! Y haciendo los cálculos, obtenemos que* $\sqrt{224} \approx 14,95$*. Luego,*

$$87 \cdot (15 - \sqrt{224}) \approx 87 \cdot 0,05 = 4,35,$$

y la respuesta a la pregunta es 4*.*

Natalia, una alumna muy participativa, pero cuyas notas siempre rondan el cuatro, dice que ella llegó a una solución diferente por otro método:

Natalia: *Yo me di cuenta que* $15^2 = 225$*. Luego, el entero que más se aproxima a* $\sqrt{224}$ *es* 15*, por lo cual la diferencia es* 0 *y la respuesta a la pregunta es* 0*.*

Bernardo, luego de un hondo suspiro, percibe la mirada impaciente de Magdalena, trata de explicarle a Natalia que su aproximación para $\sqrt{224}$ fue muy descuidada y felicita a Magdalena, cuando esta lo interrumpe.

Magdalena: *El problema es que si usamos la calculadora, lo que resulta es* $2,9$*. Por lo tanto, el número entero más cercano es* 3*, ni* 4 *ni* 0*, ¿qué pasa? Suena la campana y Bernardo debe irse a clases.*
Bernardo: *Mañana seguimos conversando, ¿les parece?*

Bernardo piensa y piensa en el problema y no saca nada en limpio. Estudia los textos escolares y tampoco encuentra luces. Como último recurso, visita a su profesor de la universidad, el Dr. Tapia, que además es uno de los organizadores del torneo de matemática. Nunca le gustó recurrir al Dr. Tapia, que siempre tiene poco tiempo y, usualmente, cuando le pregunta algo, lo mira como pensando ¡Qué pregunta tan trivial! Nuevamente, el profesor lo observa como esperaba y por toda respuesta le dice: "Bernardo, los errores se acumulan, debes tener cuidado con eso... Eh ... ¡Perdón! Debo ir a una reunión. ¡Adiós!".

Bernardo recuerda el Principio de la tetera "...recurrir a alguien que tenga el problema ya resuelto... ¡Claudia!".

Claudia: *"Nunca me han gustado mucho esas competencias de matemática. No puedo planificar mis clases solo para unos pocos alumnos talentosos, ni voy a modificar mi metodología solo porque mis alumnos no pueden resolver problemas que, en general, ni yo misma puedo resolver".*

Bernardo: *"Pero yo no hablo de planificación ni de metodología, hablo de qué hacer en estos casos, cuando los estudiantes talentosos, que son pocos, pero hay, se dan cuenta que algo está fallando...".*

(Suena la campana, Claudia se encoge de hombros y mueve la cabeza de izquierda a derecha. Con el índice derecho apunta a su muñeca izquierda, como diciendo "me tengo que ir", se da media vuelta y se va).

(¿Estoy condenado a calcular siempre con 10 *ó* 20 *decimales para que los resultados estén correctos?, se pregunta Bernardo. ¿Cómo le explico a Magdalena y al resto del curso?).*

[1]Un matemático preguntó a un físico: "Ante usted hay una tetera vacía y un hornillo de gas apagado; ¿qué hacer para hervir el agua?". "Hay que llenar la tetera con agua, prender el gas y poner la tetera sobre el hornillo", contestó el físico. "Correcto", dijo el matemático. "Un segundo problema: Ante un hornillo encendido se halla una tetera llena. ¿Cómo hervir el agua?". "Esto es más sencillo: hay que poner la tetera sobre el hornillo". "¡De ninguna manera!" exclamó el matemático. "Hay que apagar el hornillo, vaciar la tetera, y llegamos así al primer problema, que ya sabemos resolver".

Guía para el facilitador

Introducción

Este caso propone como tema principal de discusión las aproximaciones numéricas. En el actual marco curricular, este tema aparece en varios niveles, en particular en enseñanza media. Por ejemplo, en Primero Medio, un contenido mínimo obligatorio dice “Estimaciones de cálculo, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.” También en Tercero Medio hay mención a aproximación: “Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador”. Sin embargo, en todo el marco no existe ninguna mención al error de la aproximación y cómo tratarlo; en especial, no hay mención a la propagación de errores al utilizar sumas, productos, potencias u otras funciones.

En nuestra experiencia, aquellos estudiantes de Pedagogía en Matemática que tuvieron cursos de física con sesiones de laboratorio, tenían claridad en cuanto a que se debía tener cuidado al manipular valores con errores, aunque no siempre podían decir exactamente qué se podía hacer en este caso particular.

Otro asunto que toca este caso, tiene relación con metodologías de enseñanza para estudiantes con distinto ritmo de aprendizaje. ¿Se puede estar atento a todos los y las estudiantes? ¿Qué hacer con quienes son talentosos?

Nos parece importante plantear este tema para la reflexión de nuestros futuros docentes, debido a la poca claridad que hemos observado respecto a las aproximaciones numéricas y su tratamiento en operaciones aritméticas.

Resumen

De acuerdo al relato del caso, Bernardo es un profesor que se destacó como buen estudiante, particularmente interesado en tener una formación fuerte en matemáticas. Durante su desarrollo profesional observó que su formación era superior a la de varios colegas respecto al dominio de los tópicos matemáticos y que con lo que sabe es más que suficiente para hacer clases en el liceo; en general, los estudiantes no son muy curiosos, y él se siente seguro de sus conocimientos.

En la situación del caso, debe enseñar a aproximar raíces, lo que no le agrada, (“para eso están las calculadoras”); prefiere desarrollar razonamiento matemático, entendiéndolo como argumentación de la veracidad de propiedades y utilización de esas propiedades.

Discute con su colega Claudia sobre la utilidad de aproximar raíces y respecto a posibles aproximaciones didácticas al tema. Como resultado de este diálogo, Bernardo logra unir la utilización de propiedades algebraicas de las raíces con aproximación numérica de raíces. Durante el transcurso de las clases de aproximación de raíces, dos alumnas le presentan un problema que apareció en una competencia local de matemáticas, donde se preguntaba por el entero más cercano a $87(15-\sqrt{224})$

Sus estudiantes responden con 0 y con 4, utilizando los métodos aprendidos en las clases de Bernardo. Él se alegra de que hayan usado lo que aprendieron con él para resolver un problema para estudiantes talentosos, pero lamentablemente el resultado no es 0 ni 4, sino que 3.

Bernardo no sabe qué responder a sus estudiantes, decide investigar y preguntar a Claudia y a su ex profesor de la universidad. Su colega le dice que ella no puede preocuparse de los estudiantes talentosos, ni mucho menos discutir problemas que ni ella puede resolver, y el profesor universitario no tiene tiempo para dedicarle a su pregunta. Con este dilema de Bernardo, sin tener respuesta a sus estudiantes, finaliza el caso.

Objetivo principal

Proponer la discusión sobre el tema de aproximación numérica, ya que nuestro marco curricular no se hace cargo de los errores en las mediciones y estimaciones. Preguntas como: "Si las mediciones lineales de un rectángulo tienen un error de medio centímetro, ¿cuál es el error en el área del rectángulo?" no están cubiertas en el marco curricular, pese a que están las herramientas necesarias para hacerlo.

Objetivos secundarios

Reflexionar respecto a la elaboración, análisis y selección de actividades, para estudiantes de diferentes ritmos de aprendizaje. Meditar acerca de una planificación de clases que incorpore las necesidades de distintos tipos de estudiantes: más o menos concretos, lúdicos, formales o avanzados que otros, etc.

El caso plantea otro aspecto, menos evidente quizás, que es la necesidad de contar con fuentes de información confiables para tópicos matemáticos de nivel escolar. En general, existen buenos textos para matemática de nivel universitario, incluso en castellano, pero la situación es diferente cuando se trata de aspectos profundos de la matemática que deben ser conocidos para enseñar en media. Hay libros muy buenos de cálculo numérico, de álgebra, de cálculo, de estadísticas, que tocan aspectos escolares, pero no de forma explícita, y para adecuarlos a la matemática de nivel escolar se requiere un ojo entrenado que, por lo general, no se encuentra en el alumnado de las escuelas de pedagogía.

Situación problemática principal

Esta situación problemática se presenta cuando las estudiantes de Bernardo resuelven el "problema especial" utilizando el método que conocieron en sus clases, pero sin dar con el resultado correcto. Entonces, eso quiere decir que la problemática de Bernardo es para aproximar números reales mediante números decimales finitos: ¿Cuántos decimales se debe usar para asegurar una buena aproximación? ¿Cómo depende esa cantidad de decimales de las operaciones utilizadas con esas aproximaciones?

Situaciones problemáticas secundarias

Hay varias situaciones problemáticas secundarias, entre otras:

a) Si las calculadoras básicas hacen buenas aproximaciones hasta 12 decimales, ¿para qué es necesario conocer algoritmos de aproximación de raíces cuadradas?
b) ¿Dónde se puede encontrar información confiable respecto a la profundidad de la matemática de nivel escolar, sin tener que adentrarse en libros muy técnicos que requieren un lector con fuertes conocimientos matemáticos?
c) ¿Es factible realizar actividades para estudiantes de diferentes ritmos de aprendizaje?

Recomendaciones para la conducción del caso

Se sugiere invitar a los estudiantes de pedagogía presentes en la discusión a solucionar el "Problema especial" por sus propios medios. Una solución sugerida es la siguiente:

$$87(15-\sqrt{224}) = \frac{87(15-\sqrt{224})(15+\sqrt{224})}{15+\sqrt{224}} = \frac{87}{15+\sqrt{224}}$$

Como $87 = 3 \cdot 29$ y como $29 < 15 + \sqrt{224} < 30$, se tiene que:

$$2,9 = \frac{3 \cdot 29}{30} < 87(15-\sqrt{224}) = \frac{87}{15+\sqrt{224}} < \frac{3 \cdot 29}{29} = 3$$

Nuestra experiencia nos dice que, en general, los estudiantes de pedagogía no resuelven el problema satisfactoriamente, sino que empiezan a aplicar algoritmos de aproximación de raíces con mayor precisión. Además, les toma bastante tiempo y, a pesar de eso, no pueden asegurar que su resultado sea correcto.

Una vez convencidos de que el resultado es efectivamente 3, se sugiere invitar al grupo a discutir por qué el razonamiento de las alumnas de Bernardo es errado. En este punto hay un peligro en la conducción del caso: que los estudiantes argumenten respecto al resultado y no sobre el método. Es decir, las razones esgrimidas para afirmar que el razonamiento de las estudiantes es incorrecto, radica en que "el resultado está malo", lo cual es cierto, pero la discusión se debe centrar en ¿qué está pensando la alumna?, ¿por qué este método a veces sirve, pero ahora no? En este punto es necesario guiar la discusión al tema de propagación de errores.

Otro asunto que surgió a veces, es que algunos estudiantes reconocían a $\sqrt{2}$ como un número real, pero con dos valores: el número positivo (su cuadrado es 2) y su inverso aditivo, lo que también fue necesario discutir a fondo. Si bien no es un punto crucial del caso, si aparece, amerita detenerse en esto el tiempo necesario para aclararlo.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Cuál es la definición de "aproximación"? Por ejemplo, ¿cuál es el significado preciso de escribir $\sqrt{2} = 1,41$?
2. Si a y b son iguales hasta el segundo decimal, ¿qué se puede decir de a^2 y b^2 ?, ¿es cierto que también son iguales hasta el segundo decimal?
3. ¿Cómo se explica el error de Magdalena? ¿Cómo hacerle ver tal error sin que pierda la confianza en los métodos aprendidos ni en la matemática?
4. ¿Queda resuelto el tema teniendo más cuidado con las aproximaciones y, por ejemplo, aproximando con más decimales?
5. ¿Tiene sentido la enseñanza de temas que requieren cálculo "a mano" en la actualidad? En particular, ¿cuál podría ser el objetivo principal de enseñar a aproximar y manipular expresiones con raíces?
6. ¿Dónde puede conseguir información confiable un profesor de matemática?

Caso 2: ¿ Qué relación tienen los 90° con el -1?

Romina es una profesora que integra el departamento de matemática de un liceo municipal que se adjudicó importantes recursos en infraestructura, equipamiento y software para la incorporación de TIC en las prácticas pedagógicas. Egresó hace 5 años de la universidad y lleva la misma cantidad de años trabajando en este liceo; ha participado en muchos cursos de perfeccionamiento y talleres centrados en informática educativa, tanto presencial como no presencial. El último curso que realizó fue en el uso de Cabri II. Ella piensa que sus colegas no tienen buenos resultados con los alumnos, porque sus clases no son motivadoras; en cambio, ella ha encontrado en los software de matemática una útil herramienta para mejorar la atención y los resultados. Piensa que lo importante es mostrar los aspectos matemáticos más importantes del concepto, a fin de que después los alumnos sean capaces de trabajar en guías de aprendizaje de ejercicios o problemas.

Visitas inesperadas. . .

El día miércoles, en reunión de departamento, se presentó el director del liceo para hacer un anuncio: el próximo viernes, las autoridades municipales, entre ellas el jefe técnico comunal y jefe de la Dirección de Administración de Educación Municipal (DAEM), junto con la supervisora provincial, vendrían al establecimiento. En su visita supervisarían, por un lado, cómo se están utilizando los recursos tecnológicos y, por otro, observarían una clase de matemática usando estas tecnologías.

Las reacciones de los docentes ante la noticia, a excepción de Romina, no fueron las mejores. Los colegas de matemáticas son renuentes a incorporar las TIC en sus clases por diferentes motivos, siendo uno de los principales el hecho de que no dominan ni conocen los software, lo que les provoca inseguridad frente a sus cursos. Por ello, siempre manifiestan no necesitar computadores para enseñar matemática.

Sin embargo, algunos colegas hicieron reparos de naturaleza más profunda, por ejemplo Carlos, cuando señaló: *"No es llegar y decidir ¡ah, hoy día haré clases en el laboratorio!, pues para ello se necesita diseñar la incorporación de dicho recurso en las planificaciones de las unidades; si bien es cierto que es un recurso importante, en sí mismo no produce aprendizajes".*

A lo anterior se sumó Claudio, colega con años de experiencia en muchos liceos, planteando: *"Colegas, esto no va a resultar, pues no podemos de la noche a la mañana convertirnos en "tecnológicos", cuando ni siquiera como departamento* *nos hemos puesto de acuerdo en el uso de la más primaria de las tecnologías,*

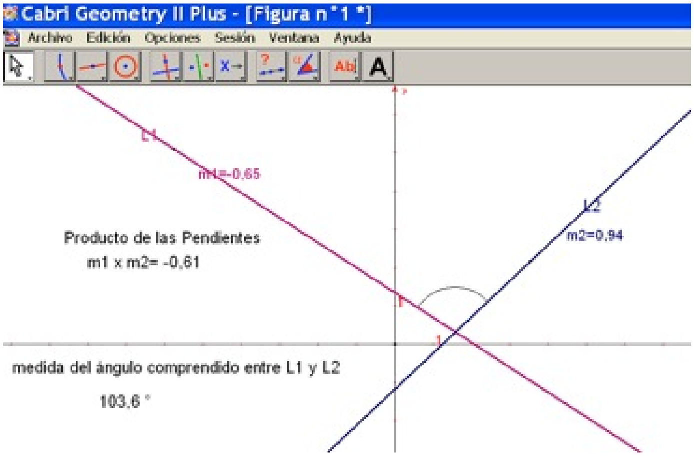
como es la utilización de calculadoras. Por otra parte, después de ese perfeccionamiento, Andrea y Romina señalaron que el software era muy lindo, pero, "¿de qué sirve si no se tienen las sugerencias metodológicas para utilizarlo con 40 alumnos en clases? Además, la configuración de nuestro laboratorio no es de las mejores".

El director se retiró de la reunión con el compromiso de Romina. Ella prepararía la clase aprovechando que está con Segundo Medio y debe enseñar las condiciones de perpendicularidad y paralelismo en rectas.

Preparación de la clase

Los colegas quedaron muy interesados en cómo Romina haría la clase, y le pidieron una demostración. Romina accedió sin problemas, diciendo que debían ir al laboratorio. Allí les mostró que con Cabri II se pueden trazar distintas rectas sobre el plano cartesiano y estudiar varios aspectos de ellas.

Momento de Inicio: Motivar a través de la visualización Romina plantea que, para activar el momento de inicio, preparará un archivo que presentará la siguiente imagen al abrirlo:



Aprovechando esa potencialidad del software, mostrará a los alumnos dos rectas, una estaría fija (L1) y otra giraría sobre el punto de intersección (L2), mostrando las pendientes de cada una de ellas (utilizando el comando de Cabri). Además, les mostró cómo el producto de las pendientes entre las rectas es distinto de -1; pero también visualizaron que cuando el ángulo comprendido entre ellas es cercano a 90º, el producto tiende a -1. Romina plantea a sus colegas que con esto logrará motivar a los estudiantes.

Todos quedaron maravillados con lo que se podía hacer con Cabri II; sin embargo, Claudio, a pesar de que reconocía lo poderoso de la herramienta, estaba preocupado. Sentía que las condiciones para hacer una clase que apunte al aprendizaje, no pasan solamente por lo linda que pueda parecer utilizando un software; pensaba que los niños no aprenden mirando a otro cómo se hace, pero en realidad ya había sido bastante incisivo con Romina en la reunión anterior por un tema matemático y no quería repetir lo mismo.

Momento de desarrollo

Romina, pareciendo adivinar lo que pensaba Claudio, plantea que la clase no termina ahí; ese es solo el inicio, pues después aplicará la Guía 8 que trabajarán en parejas en su cuaderno. También, señala que esta guía tiene tres hipervínculos direccionados a cuatro archivos Cabri II, en donde en cada uno de ellos hay un par de rectas cuyas ecuaciones están en la guía.

Guía Nº8

Presentación: *Con esta guía aprenderás las condiciones que deben tener dos rectas para que estas sean perpendiculares.*

Haz clic y responde las preguntas que se te harán

Haz CLIC AQUÍ	**Haz CLIC AQUÍ**	**Haz CLIC AQUÍ**	**Haz CLIC AQUÍ**
(a) $y = -\frac{x}{2} + 2$	(b) $y = 2x + 2$	(c) $y = -\frac{2x}{3} - 2$	(a) $y = \frac{x}{2} - 2$
(b) $y = 2x + 2$	(d) $y = -2x + 1$	(f) $y = -\frac{3x}{2} + 1$	(e) $y = -\frac{x}{2} + 2$

Determina el ángulo entre las rectas, utilizando Cabri II.

Gráficos	(a) y (b)	(b) y (d)	(c) y (f)	(a) y (e)
medida angular entre rectas				

¿Qué puedes observar con los ángulos de las rectas?

¿Cuáles son las rectas con ángulos más cercanos a 90º?

Completa la siguiente tabla multiplicando las pendientes de ellas.

Gráficos	(a) y (b)	(b) y (d)	(c) y (f)	(a) y (e)
$m_1 \times m_2$				

Puedes observar:
¿En cuáles rectas la multiplicación de sus pendientes resulta -1?

En las rectas que encontraste en la pregunta anterior, ¿cuál es su ángulo?

Entonces, ¿qué relación hay entre estas rectas?

Momento de Cierre

Romina señala que en esta parte sistematizará lo que se ha trabajado hasta ese momento, haciendo preguntas referidas a qué condición deben cumplir dos rectas para que sean perpendiculares.

Indica a sus colegas que, para terminar la clase, los alumnos completarán lo siguiente en la parte final de la guía N°8:

Dos rectas son perpendiculares cuando el __________ de sus __________ resulta _______.

y cuando eso suceda, formalizará escribiendo en la pizarra

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

En ese momento, Claudio le pregunta a Romina, por qué no pedir que la implicancia sea en el otro sentido, pues la actividad también serviría para ello, y en ese caso sería un 'si y solo si' y no un ´implica´ solamente. Ella le responde que el tiempo no da para eso; además, no le queda claro que es un ´si y solo si´. Se queda pensativa un rato y pasa a otro asunto. El tema no se vuelve a tocar.

Llegaron las visitas y se fueron... Mejor analicemos la clase

Romina empieza a contarles a sus colegas cómo había resultado la clase con las tres autoridades adentro. Ella plantea que finalizó su clase con sensaciones encontradas, pues si bien es cierto que resultó bien y las autoridades se fueron felices, podría haberles mostrado cualquier cosa, porque no entendían nada de matemática. Parecía ser que lo único importante para ellos era que en la clase se usara un computador.

Claudio la nota preocupada y por eso le dice *"Cuenta qué más pasó en tu clase que justifique esa cara tan larga".* El director acota que no fue nada, sólo que una alumna hizo una pregunta fuera de lo común, lo cual no permitió que la clase siguiera el ritmo normal para terminar con los ejercicios y problemas de aplicación.

Romina comenta que hubo cosas que no estaban planificadas y ante las cuales ella se sintió sin respuesta, situaciones que en una clase normal jamás hubiesen aparecido. Señala a los colegas que es bueno discutir los conceptos matemáticos entre pares de vez en cuando. Y agrega: *"En un momento de la clase sentí que todos los alumnos me seguían. Todos contestaban mis preguntas y muchos lograron darse cuenta de que cuando las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1. Por eso sentí que los alumnos estaban listos para que yo cerrara la clase estableciendo formalmente la condición de perpendicularidad escribiendo* $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ *sin embargo, una alumna me hizo la siguiente pregunta, "Profesora, ¿eso se cumple siempre?"y respondí que sí. Ella insistió en que descubrió con el computador un par de rectas perpendiculares, pero que el resultado no es -1. En ese momento me muestra un par de rectas perpendiculares, donde una de ellas es paralela al eje de las abscisas".*

Romina insiste en su preocupación; siempre había tenido esa inquietud, pero no había conseguido una respuesta, y por eso les propone discutir en la reunión de departamento acerca de la relación entre el -1 y los 90°.

Guía para el facilitador

Introducción

Los elementos más importantes del caso están centrados en dos aspectos principales. Por una parte, el paradigma metodológico en donde, primero que todo, el o la docente define un concepto o establece una propiedad y luego la ejemplifica con ejercicios o problemas que resuelve para que los alumnos vean cómo se hace y tengan un modelo; y así, posteriormente, les entrega un listado de problemas y ejercicios en donde se aplica la materia. Esa manera de entender la enseñanza de la matemática es la que se está poniendo en discusión en esta situación, con la creencia de que si se incorporan computadores y software en una gestión de clases, estamos en un paradigma distinto.

El segundo aspecto es de índole matemática y está referido al desconocimiento del siguiente problema: ¿Por qué si dos rectas son perpendiculares en el plano, entonces el producto de sus pendientes es menos 1? ¿Es una implicancia o una equivalencia? ¿Por qué no se cumple cuando una de las rectas es paralela al eje Y?

Resumen

Romina es una profesora de matemática que ha realizado varios perfeccionamientos centrados en informática educativa. Trabaja en un liceo municipal que se ha adjudicado recursos en infraestructura y tecnología para el aula. Las autoridades municipales, entre ellas el jefe técnico comunal, el jefe de DAEM y la supervisora provincial, quieren observar una clase en donde dichos recursos sean utilizados. Dado lo anterior, el director del liceo pidió a los profesores de matemática que prepararan una clase utilizando los recursos. Romina se ofreció para la experiencia, preparando una clase de geometría analítica respecto de la condición de perpendicularidad de dos rectas en el plano para un Segundo Medio. En primera instancia, dicha clase estaba preparada para ser aplicada a través de guías de aprendizaje, pero no utilizando software.

Ella diseñó su clase pensando en los tres momentos (Inicio, Desarrollo y Cierre). En el de Inicio planificó motivar a sus alumnos a través de la visualización, usando un programa computacional llamado Cabri II, a través del cual mostraría las pendientes y ángulo entre dos rectas, una fija y la otra secante. Todo lo anterior le permitiría abordar la relación entre el producto de las pendientes y el ángulo formado entre ellas, para poder establecer en los alumnos la condición de perpendicularidad en forma visual.

En el momento de Desarrollo, entregará una guía de aprendizaje, la cual permitirá que los alumnos trabajen el concepto en su cuaderno. Y en el momento de Cierre, sistematizará lo trabajado y así llegará a deducir, a través de preguntas, la condición de que si el producto de las pendientes de dos rectas es -1, entonces ellas son perpendiculares.

Al terminar la ejecución de la clase, todas las autoridades quedaron muy satisfechas con lo que había mostrado Romina, a excepción de ella. Una de sus alumnas, al estar experimentando con el software, se dio cuenta de que la condición que afirmaba respecto al producto de las pendientes, no se cumplía para dos rectas que ella había determinado con el movimiento del "mouse". Esto hizo dudar a la docente, ya que no supo cómo responder el fenómeno que se había producido.

Objetivo principal

El caso pretende que los alumnos observen y analicen la metodología usada por la profesora. Ella incorpora tecnología, pero con un modelo de enseñanza centrado en el profesor y en mostrar "cómo se hacen las cosas", pero no en el alumno, y en "cómo generar conocimiento". Además, se intenta abordar el concepto de perpendicularidad de dos rectas, sus condiciones y definición, tanto desde los planes y programas, como desde el punto de vista matemático.

Objetivos secundarios

- Discutir acerca de la veracidad del resultado y de su recíproco. Además, dar argumentos para asegurar dicha veracidad o dar contraejemplos para mostrar la falsedad.
- Discutir acerca de la diferencia entre conjeturar y argumentar.
- Discutir acerca del uso de software educativo para la enseñanza de la matemática, como una herramienta que facilita la elaboración de conjeturas.

Situación problemática principal

Romina realiza una clase centrada en lo que ella, como profesora, cree que debe enseñar y no en lo que los alumnos y alumnas deben aprender; no cuestiona el resultado matemático, sino que se centra en la utilización del software. En la puesta en escena de la clase surgió una pregunta que la hizo dudar del resultado. ¿Es cierto el resultado? ¿Falla en el único caso que mencionó la alumna?

Situaciones problemáticas secundarias

1) Romina realiza en clases una validación de la indagación experimental (casos particulares), pues a partir de ella establece una regla general. ¿Es esto correcto?
2) El resultado matemático presentado es un "implica" o un "si y solo si".
3) Diferencias en las reacciones de los docentes al verse expuestos a temas o tareas que no dominan. En este caso en particular se muestran dos hechos de

esta naturaleza: el primero, cuando se les pide a los profesores crear una clase utilizando tecnología y el segundo, cuando Romina no encuentra respuesta a la pregunta de su alumna.

4) Evaluación del sistema educativo a nivel macro y micro. Esto se presenta cuando el director, jefe técnico comunal y la supervisora provincial quieren ver la implementación de los recursos adjudicados.
5) Motivación de los alumnos para lograr los objetivos de la clase. Esto se hace evidente cuando Romina destaca que el uso de tecnología permite aumentar la atención de los alumnos. ¿Es esto cierto?
6) Conocimiento enseñado y conocimiento que hay que enseñar. Los profesores desconocen contenidos que deben ser tratados en clase, lo cual se hace patente cuando Romina no puede responder la interrogante de su alumna.
7) ¿Qué metodologías se deben usar para lograr aprendizajes significativos? Esto se observa cuando Romina expone su planificación y cree que con ella obtendrá aprendizajes en los estudiantes.

Recomendaciones para la conducción del caso

Este caso suele centrar a los alumnos en el tema matemático, lo cual permite una interesante discusión grupal. En general, no recuerdan los conocimientos de geometría analítica necesarios para dar respuesta a Romina, razón por la que se les propone que investiguen sobre el tema y puedan responder a la profesora.

Lo anterior deja de lado el tema de la utilización de TIC en las planificaciones de aula. Es por ello que se recomienda analizar y reflexionar respecto del modo en que la profesora preparó la clase para la conceptualización de perpendicularidad. El tema se puede enriquecer investigando la manera en que se expresa en los planes y programas el concepto de perpendicularidad y la relación con su definición, discutiendo el hecho de condicionalidad y suficiencia para que las rectas sean perpendiculares. Esto puede llevar también a la discusión sobre el cálculo de pendientes de rectas, lo cual vuelve a reafirmar la necesidad de investigación sobre el concepto desde los dos planos, matemático y curricular.

En el inicio del caso se recomienda su lectura y luego, una recopilación de los temas que son relevantes para los alumnos. Después, se aconseja clasificar cada uno de ellos en matemático o pedagógico-matemático y jerarquizarlos, para, finalmente, abordar aquellos que fueron considerados relevantes y también los poco relevantes, pues algunas veces estos son así considerados por no disponer de las herramientas de análisis necesarias para su discusión.

Por la experiencia recopilada en la implementación de la situación, se recomienda que el facilitador:

a) Medie para que los alumnos aborden el caso con la información de que disponen, y que no condicionen el análisis a supuestos -que podrían ser válidos- tales como:
   - en los liceos, los profesores de matemática no se juntan a hablar de educación matemática o es ficticio que ellos dejen observar sus clases o que las autoridades vayan a los liceos a supervisar.

b) Medie para que las TIC y su utilización no sea el tema principal, sino considerar que son herramientas que contribuyen de mejor manera a la enseñanza para el aprendizaje. Para ello, se debe tener un modelo distinto al tradicional para enseñar matemática: Definición-Ejemplo-Ejercicio.

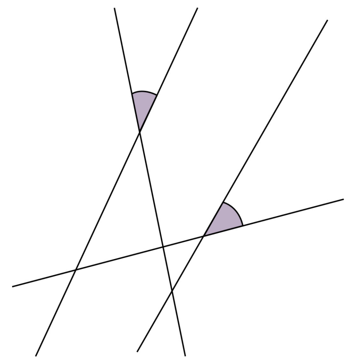
c) Medie para que ninguno de los dos focos quede desatendido, pues si son alumnos de últimos años de la carrera, -están en sus prácticas profesionales-, la experiencia señala que tienden a visualizar más el conflicto respecto a la enseñanza; en cambio, si son alumnos de medianía de la carrera tienden a centrarse más en el producto de las pendientes igual a menos 1 y, sobre todo, en por qué cuando se tienen rectas paralelas a los ejes, la condición no se cumple.

d) No se tiente a dar respuestas matemáticas cuando los alumnos se complican por no saber explicar o demostrar la condición de perpendicularidad, pero tenga preguntas que guíen la discusión de este tema, por ejemplo: ¿Cómo define la pendiente de una recta? ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje Y? ¿Está definida? ¿No existe?

e) Tenga preparado un par de apuntes referidos a los temas:
   - demostraciones respecto a la relación entre la perpendicularidad y el producto de las pendientes;
   - confusión entre implica y equivalencia en resultados matemáticos.

Los contenidos que hacen referencia a las rectas perpendiculares, tanto en los libros de geometría analítica, como en los planes y programas, regularmente no hacen mención a la necesidad y/o suficiencia para que dos rectas sean perpendiculares y, en particular, cuando se habla de alguna de ellas, solamente se hace referencia a la necesidad, lo cual conlleva un tipo de tratamiento metodológico para la enseñanza de la perpendicularidad. Una pregunta que dio muchos frutos pues se obtuvieron respuestas muy buenas fue: Dado un ángulo , cualquier par de rectas que forman ese ángulo fijo, ¿es cierto que el producto de las pendientes es constante?

Es decir, si el ángulo entre las rectas pintadas de rojo es el mismo que el ángulo entre las rectas pintadas de azul, entonces ¿es cierto que el producto de las pendientes es el mismo?



Una forma de argumentar es que si las rectas forman un ángulo agudo, sin restricción, podemos suponer que las rectas se intersectan en el origen, y si ambas rectas están totalmente comprendidas en el primer-tercer cuadrante, el producto de sus pendientes es positivo; en cambio, si las rectas están una en el primer-tercer cuadrante y la otra en el segundo-cuarto cuadrante, entonces el producto de las pendientes es negativo. La pregunta que surge es si su valor absoluto es constante. La respuesta también es negativa y la argumentación puede ir diciendo que si una de las rectas es el eje X, entonces el producto es cero; en cambio, no lo es en otro caso. Muchas otras preguntas al respecto se pueden seguir formulando; una de ellas es la última del listado de abajo.

Preguntas para guiar la discusión

1. Romina realiza una clase en donde, mediante una indagación experimental, establece una regla general. Parece no preocuparse de advertir a sus alumnos que este método no es lícito para establecer ningún resultado en matemática. ¿Cuál sería una forma de hacer esta advertencia?
2. La supuesta indagación promovida por Romina se reduce a una ilustración acotada del resultado que ella quiere presentar. La alumna que de verdad indaga, llega al caso que Romina no tenía contemplado, ante lo cual no sabe responder. ¿Qué respondería usted a esa alumna?
3. Los alumnos trabajaron una guía que cierra el trabajo con el siguiente recuadro:

   Dos rectas son perpendiculares cuando el __________ de sus __________ resulta _______.

   ¿Cómo interpretaría usted esta frase en términos de condiciones necesarias y/o suficientes y cuál es su validez?
4. ¿Cuál sería un enunciado correcto y una demostración del resultado que se pretende que los estudiantes conjeturen?

5. Por lo expuesto en el caso, Romina tiene una concepción de cómo se debe enseñar matemática. ¿Cuál es la caracterización de esa concepción? ¿Qué aspectos habría que agregar en la clase de Romina para que fuese coherente con las orientaciones didácticas del aprendizaje, presentes en el Marco Curricular?
6. ¿Cuál es el rol que debiesen cumplir las autoridades educacionales de una comuna y de un colegio?
7. ¿La clase de Romina explota alguna ventaja de las TIC para los fines de esa lección? ¿Cuáles ventajas piensa usted que no se aprovecharon desde el punto de vista de las TIC?
8. Dado un ángulo θ y un número real $\alpha \neq -1$ ¿existe un par de rectas cuyo ángulo entre ellas sea θ y el producto de las pendientes sea α?

Caso 3: ¿Justicia ciega?

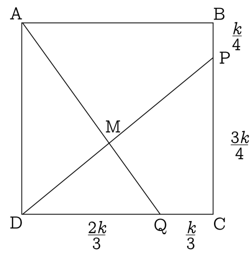
Los diez años de trabajo de Carolina Silva como profesora de matemática, han aumentado su seguridad de haber elegido bien su profesión. Desde niña le gustó la matemática; al enseñarla redescubre el placer y la sorpresa que ella misma experimentó y sigue sintiendo con este “lenguaje de la naturaleza”. No deja de asombrarse al ver que siempre hay algo nuevo, algo en lo que no había reparado, algo que aprender, incluso de sus estudiantes. Además, le gusta la energía y la libertad de pensamiento de los jóvenes. Así, no es raro que sea reconocida por sus colegas y alumnos como una buena profesora en todo sentido.

En el colegio donde trabaja, las evaluaciones globales o coeficiente dos se construyen en cada departamento y así todos los alumnos de un mismo nivel rinden el mismo examen. En cambio, las pruebas parciales son instrumentos de evaluación que cada docente construye según sus propias necesidades de monitoreo de los logros de aprendizaje de sus alumnos. Hace un par de semanas Carolina enfrentó y resolvió un problema surgido con la calificación de una de sus pruebas parciales. Curiosamente, le sigue molestando este caso, lo que le extraña, pues no es nada tan extraordinario y se había sentido muy conforme y segura cuando tomó la decisión de calificación definitiva y la comunicó a su curso.

Todo partió con la prueba que aplicó al Segundo Medio A para evaluar la Unidad de Semejanza. Es un buen curso y Carolina preparó su prueba cuidadosamente, como siempre. No fue grato, pero son cosas que pasan, descubrir que la gran mayoría no contestó el ejercicio 5, que unos pocos intentaron hacer algo sin terminarlo y solo dos alumnos lo resolvieron correctamente. Uno de ellos, Antonio, lo hizo empleando los contenidos de la Unidad de Semejanza, y el otro, Pablo, lo hizo utilizando los contenidos de la Unidad de Geometría Analítica, que se habían tratado unos meses antes.

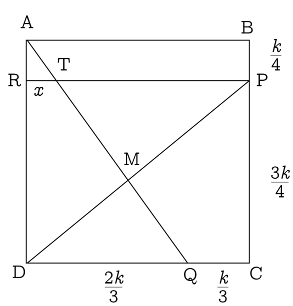
De los 20 alumnos que rindieron la prueba, 4 obtuvieron calificaciones inferiores a 4.0 y del 80 % restante, solo 2 alumnos obtuvieron nota 7. Como de costumbre, Carolina realizó la corrección de la prueba en la pizarra para que sus alumnos fueran comparando con sus resultados. Para al Ejercicio 5 escribió el desarrollo que ella había hecho al incorporar esta pregunta a la prueba y que esperaba que sus alumnos también realizaran:

Ejercicio 5: Dado el cuadrado $ABCD$ de lado k de la figura adjunta, donde M es punto de intersección de $\overline{DP}$ y $\overline{AQ}$, calcule el área del $\triangle DMQ$ en función de k. (Sugerencia: dibuja el punto R en $\overline{AD}$ tal que y el $trazo \overline{RP}$ tal que $\overline{RP} \parallel \overline{DC}$)



Solución:

a) Si $\overline{PR} \parallel \overline{DC}$, entonces $\triangle ART \sim \triangle ADQ$

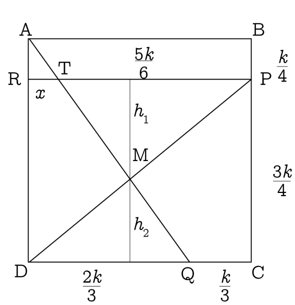


$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{2k}{3}} = \frac{\frac{k}{4}}{k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k}{6}$$

b) Luego: $\overline{TP} = \frac{5k}{6}$ entonces $\triangle TPM \sim \triangle QDM$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5k}{6}}{\frac{2k}{3}} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{h_1}{h_2} \ ; \ h_1 + h_2 = \frac{3k}{4}$$



$$\Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{h_1}{h_2} \ ; \ h_1 = \frac{3k}{4} - h_2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{3k - 4h_2}{4h_2} \Rightarrow 5h_2 = 3k - 4h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{k}{3}$$

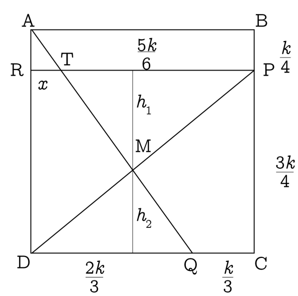
c) El área del $\triangle DMQ$ es

$$\frac{\frac{2k}{3}\cdot\frac{k}{3}}{2}=\frac{2k^2}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{k^2}{9}$$

A continuación, Carolina invitó a Antonio a presentar su desarrollo en la pizarra,. Antonio es un alumno destacado, con muy buenas calificaciones, muy metódico y ordenado, que siempre trata de justificar cada uno de los pasos que realiza en un ejercicio y que, por lo tanto, accedió con gusto y genuino orgullo. Explicó que él hizo esencialmente lo mismo, pero que para economizar escritura y confusiones, evitó k a lo largo del desarrollo o, equivalentemente, supuso que $k=1$, para reponerlo al final.

Solución de Antonio:

Supuesto: $k=1$, entonces



$$\Rightarrow \frac{2k}{3}=\frac{2}{3}\ ,\ \frac{k}{4}=\frac{1}{4}\ ,\ frack3=\frac{1}{3}\ ,\ \frac{3k}{4}=\frac{3}{4}$$

Si $\overline{PR}\parallel\overline{DC}\Rightarrow\triangle ART\sim\triangle ADQ$

$$\Rightarrow\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{1}\Rightarrow\frac{3x}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\overline{TP}=\tfrac{5}{6}\text{ y }\triangle TPM\sim\triangle DQM$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{h_1}{h_2}\ ;\ h_1+h_2=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{4}=\frac{h_1}{h_2}\ ;\ h_1=\frac{3}{4}-h_2$$

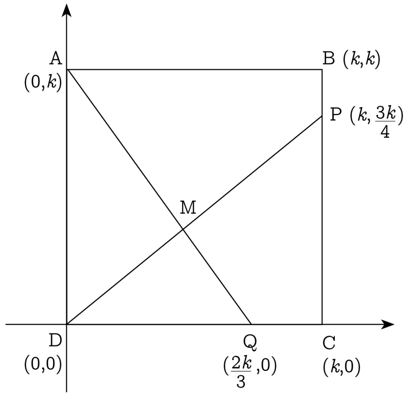
$$\Rightarrow\frac{5}{4}=\frac{3-4h_2}{4h_2}\quad\Rightarrow\quad 5h_2=3-4h_2\quad\Rightarrow\quad h_2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\text{ área }\triangle DMQ\text{ es }\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\frac{2}{3}k\cdot\frac{1}{3}k}{2}=\frac{\frac{2}{9}k}{2}=\frac{k^2}{9}$$

A continuación, Carolina invitó a Pablo a presentar su solución en la pizarra. Pablo es menos metódico y no siempre se explica con claridad, pero es rápido, creativo y expresivo en su gusto por la matemática, con lo que se gana la simpatía que su conducta inquieta pone a prueba. Pablo explicó que él intentó usar semejanzas, pero le pareció tedioso y probó con lo que habían aprendido a trabajar en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, lo que le resultó mucho más fácil.

Solución de Pablo:

"La coordenada y del punto M corresponde a la altura del $\triangle DMQ$, entonces basta que encuentre el valor de y en el punto M y, listo, tengo el área".



"Saqué la pendiente de $\overleftrightarrow{DP}$ y la de $\overleftrightarrow{AQ}$:"

$$m_{DP} = \frac{\frac{3k}{4}}{k} = \frac{3}{4} \quad , m_{AQ} = \frac{k}{\frac{2k}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\overleftrightarrow{DP} : y = \frac{3}{4}x$$

$$\overleftrightarrow{AQ} : y = -\frac{3}{2}(x - \frac{2k}{3}) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + k$$

"Reemplacé el primer valor de y en la segunda ecuación y me quedó:"

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &= -\frac{3}{2}x + k \\ x &= \frac{4}{9}k \end{aligned}$$

"Reemplacé el valor de x en $y = \frac{3}{4}x$ y me quedó: $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}k = \frac{1}{3}k$"

"Entonces $M = \left(\frac{4}{9}k, \frac{1}{3}k\right)$, por lo tanto el área del $\triangle DMQ$ es:

$$\frac{\frac{2}{3}k \cdot \frac{1}{3}k}{2} = \frac{k^2}{9}$$

Mientras Pablo exponía la respuesta que ella ya conocía, Carolina pensaba en lo horrible que hubiera sido si nadie hubiese respondido este ejercicio y se sintió contenta de que Antonio y Pablo fueran sus alumnos. Sin duda, algo de este sentimiento se manifestó cuando, frente al curso, felicitó a Pablo por su creatividad y clara exposición.

Camila -una buena alumna que tuvo solo parte del puntaje en este ejercicio, porque no logró llegar a un resultado- con profunda molestia y superando su timidez, manifestó su desazón por lo que consideraba una injusticia. El rubor de sus mejillas y cierto brillo de sus ojos no pasaron desapercibidos para Carolina, que se apuró en conocer sus razones sin exponerla demasiado. A pesar de su voz baja y de que habló desde su asiento, muchos alumnos escucharon claramente lo que Camila decía: *"...es que a mí también se me había ocurrido eso, poner ejes, pero no seguí, porque pensé que no se podía..."*.

Fue el grano de arena que desató la avalancha. El curso era competitivo y fueron muchos los que esperaban mejor nota. El coro de reclamos no tardó: *"pero profesora, usted no dijo nada"*, *"cómo íbamos a saber que se podía usar geometría analítica"*, *"usted dijo que la prueba era de semejanza"*, *"usted es injusta con los que seguimos sus instrucciones"*.

Carolina intentó exponer sus razones, pero su experiencia le aconsejó no seguir por ese camino bajo estas circunstancias y cerró el tema comunicando que ella jamás se quedaría tranquila pensando que había sido injusta -eso le duele- y que reflexionaría sobre el problema surgido y lo discutiría con sus colegas del departamento de matemática. Entonces, llevó el ejercicio y el problema completo, a la discusión del departamento de matemática. Los y las colegas se involucraron con interés, examinaron la variedad de documentos y pidieron antecedentes adicionales acerca del curso y de los métodos de Carolina:

"¿Tu esperabas que la mayoría de los alumnos hiciera ese desarrollo que tú planteas usando semejanzas?".

"¿Habían hecho en clases ejercicios similares?".

"¿Qué grado de dificultad tiene este ejercicio, en relación con los otros ejercicios de la prueba?".

"¿Y cómo anduvieron de tiempo? ¿Has considerado que pudo ser muy larga tu prueba?".

Carolina explicó con seguridad sus razones y los fundados argumentos en los que basó sus decisiones. Pero su inquietud era otra: el criterio de corrección de esa prueba, la valoración de los resultados producidos por los alumnos y la aceptación de ellos de su criterio.

Solo dos de sus colegas alcanzaron a opinar sobre este punto, y con posiciones antagónicas. Patricio -un profesor joven y cercano a los alumnos- coincidió con el criterio de corrección de Carolina, abundando en argumentos: *Tiene gran mérito el trabajo de Pablo, lo importante es que los alumnos adquieran esa habilidad de relacionar distintos tópicos y aplicar la herramienta más adecuada a cada problema, es difícil conseguirlo. Ayuda destacar tal acción y premiarla para que todos los alumnos lo intenten con mayor ahínco, sobre todo en ese curso, que es bastante competitivo.*

Iván, sin embargo, discrepó de plano, con una lacónica intervención: *"Si su objetivo, colega, era evaluar Semejanza y Pablo no aportó nada que demostrara su aprendizaje de tal materia, corresponde no darle mérito alguno, es decir, calificarlo con la nota mínima"*. Carolina enmudeció. No era fácil rebatir a Iván, un profesor ampliamente respetado por su larga e impecable trayectoria. Su severidad y distancia parecían aumentar ese halo de sabiduría.

Patricio reaccionó con energía, al borde de la provocación: *"Con ese criterio, colega, estaríamos siempre partiendo de cero. Tendríamos que prohibir el uso de las fracciones, porque eso era de básica, y así con todo. Se perdería el sentido de aprender cada tópico, si no se lo pudiera usar en el futuro y aplicar cada vez que sirva para facilitarnos la vida. Esa sería la mejor forma de olvidarlos rápidamente: por desuso. Realmente me cuesta entenderlo, profesor. Por otra parte* (volviéndose a Carolina), *si lo que te preocupa es la justicia, la situación es aún más sencilla. Como en ninguna parte de la prueba que entregaste por escrito, aparecía ninguna restricción respecto de un método a utilizar o materia a considerar, no podrías haber descartado las soluciones inesperadas. Eso sí que habría sido injusto"*.

La hora había pasado, casi todos estaban ya con sus abrigos puestos, la situación se había tornado algo tensa, y aunque era evidente que la polémica no continuaría por el lento avance del profesor Iván hacia la puerta, la mayoría aprovechó de despedirse, sin emitir opiniones ni tomar partido. Carolina lamentó en silencio el curso del debate, especialmente frustrada por no contar, en este tema, con la opinión de Ximena, la jefa del departamento de matemática. Ella había hecho muy buenas preguntas en la primera parte, cuando se discutió el ejercicio y la prueba; tal vez demasiadas -pensó Carolina- tratando de calcular el tiempo que se fue en ello. Sus cavilaciones fueron interrumpidas por Iván, que se acercó, pero no para despedirse. “Como a usted le preocupa la justicia con sus alumnos, considere también el mensaje que les ha trasmitido usted con su práctica, tanto en clases como en pruebas anteriores”. Carolina le agradeció confusamente. No tenía claro si Iván le había dado un consejo amistoso o una lección autoritaria o si seguía discutiendo con Patricio, a través de ella. De todo se aprende -pensó positiva- y agradeció en voz alta a los colegas que aún rondaban por allí.

Guía para el facilitador

Introducción

La importancia de incluir este caso radica en que el conflicto principal en el aspecto pedagógico se refiere a evaluación, un tema delicado tanto para estudiantes como para docentes. Evaluar para el aprendizaje y calificar se suelen confundir y es importante reflexionar sobre esto. ¿Cómo hacer para que el instrumento de medición mida exactamente lo que se propone? ¿Cómo calificar con justicia, considerando el nivel de competitividad que existe entre los estudiantes de secundaria? En el aspecto matemático se refiere a geometría, que es un tema muy importante en la formación intelectual de los alumnos y que los profesores postergan en beneficio de álgebra y números.

Resumen

Carolina, profesora de Segundo Medio, aplica una prueba para evaluar los contenidos tratados en la Unidad de Semejanza que está enseñando a sus alumnos. Al revisar las pruebas, se da cuenta de que uno de los ejercicios planteados presentó gran dificultad para la mayoría del curso, y que si bien las calificaciones obtenidas están distribuidas normalmente, solo dos alumnos contestaron correctamente esa pregunta y fueron los que obtuvieron nota 7. Sin embargo, solo uno de los dos alumnos resolvió el problema usando los contenidos de la Unidad de Semejanza, y el otro lo hizo utilizando los contenidos trabajados en una unidad previa, "Ecuación de la recta", pero Carolina asignó a ambos la misma calificación por tener toda la prueba correcta.

Esta situación generó conflictos con sus alumnos y, posteriormente, con sus colegas. En ambos grupos se presentaron adherentes y detractores a la medida tomada por Carolina. Unos estuvieron de acuerdo con premiar la creatividad del alumno que recurrió a otro contenido para resolver el problema y otros consideraron que al hacer esto, quedaba de manifiesto que este alumno no sabía los contenidos de semejanza necesarios para resolver dicho ejercicio.

Objetivo principal

Poner en el tapete el aspecto evaluativo del quehacer pedagógico, evidenciando la diferencia entre la evaluación y la calificación, así como la necesidad de tener criterios claros al momento de calificar. Por otra parte, mostrar los riesgos a los que se puede exponer el profesor, si al momento de construir un instrumento de evaluación no fija un marco de referencia para posibles respuestas.

Objetivos secundarios

- Provocar discusión respecto de si suponer $k = 1$en la solución del problema y por qué. ¿Cuáles serían las razones que justifican que esta no es una restricción? Por qué el resultado, en este caso, se amplifica por k^2 ¿Por qué no por k o por k^3 u otra cosa?
- Provocar reflexión respecto a la manera de solucionar el problema de Camila y de otros alumnos, considerando que la prueba ya está elaborada, aplicada y los resultados son los que son.

Situación problemática principal

El conflicto central radica en el criterio que empleó la profesora al momento de calificar a dos alumnos que resolvieron correctamente un mismo ejercicio, considerando que uno de ellos lo hizo empleando los contenidos evaluados por la prueba y el otro lo resolvió empleando otro contenido estudiado anteriormente.

Situaciones problemáticas secundarias

a) ¿Cuál es el argumento teórico que fundamenta la resolución del problema que hizo el alumno que consideró $k = 1$?
b) ¿Qué rol juega la creatividad al momento de resolver un problema matemático y qué valor le asignamos?
c) ¿Cuáles son los criterios que se plantean al momento de construir un instrumento de evaluación, como el aplicado en este caso?
d) ¿Se necesita incluir construcciones sofisticadas donde se apliquen los resultados de semejanza para evaluar su dominio o basta con preguntarla directamente?
e) ¿Cuál es el rol que juegan los pares a la hora de tratar de tomar una decisión respecto a lo que se debe hacer para ser justos?

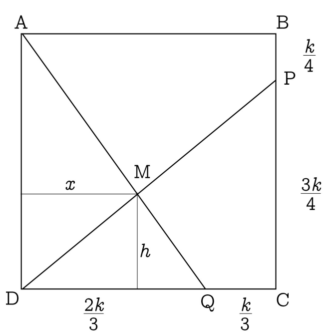
Recomendaciones para la conducción del caso

Si la discusión se centra solo en el hecho de que la prueba es de semejanza y que quienes contestaron utilizando otro contenido no merecen nada del puntaje, cabe preguntar a los alumnos: ¿Es deseable tener alumnos que sean capaces de integrar los contenidos? ¿Qué rol juega la creatividad en la formación de un alumno?

Si los alumnos se inclinan por la posición que dice relación con que todo método es bueno con tal de llegar al resultado, se sugiere preguntarles: ¿Qué ocurre si el alumno se acostumbra a resolver cada ejercicio por tanteo? ¿Cómo se debe construir una prueba para asegurarse de que todas las habilidades que se quieren medir, sean efectivamente medidas? ¿O tal cosa no se puede? ¿Siempre hay estudiantes que se escapan de los marcos?

Los tópicos matemáticos involucrados en este caso corresponden a dos unidades programáticas de Segundo Medio, como son Ecuación de la Recta y Semejanza. En el caso del alumno que resolvió el problema por semejanza, utilizó fundamentalmente los criterios de semejanza de triángulos y operatoria algebraica. En el otro caso, el alumno recurrió al plano cartesiano y representó gráficamente la figura dada en dicho plano, empleando la ecuación de la recta conocidos dos puntos de ella y la ecuación de la recta conocidos un punto y su pendiente, principalmente.

Es importante notar que la profesora mostró su solución, y luego invitó a los estudiantes que habían resuelto el problema a mostrar sus respectivas soluciones. Sin embargo, en ningún momento preguntó si ahora, después que se mostraron estas soluciones y que ya ha pasado tiempo desde la prueba, a alguien se le ocurre otra solución. Se sugiere invitar a los estudiantes a resolver el problema de otro modo, como se muestra a continuación:



$$\frac{1-h}{x} = \frac{k}{\frac{2k}{3}} = \frac{3}{2} \qquad \wedge \qquad \frac{h}{x} = \frac{\frac{3k}{4}}{k} = \frac{3}{4}$$

$$\text{De donde } 2-2h = 2x \quad \wedge \quad 3x = 4h \Rightarrow h = \frac{1}{3}$$

Es importante notar que al parecer h no involucra a k. ¿Qué pasó? En este caso el áreas sería $\dfrac{2k}{9}$. ¿Es esto correcto?

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Cómo estimas el nivel de dificultad del ejercicio 5?
2. ¿Reconoces errores o inexactitudes en las soluciones de Antonio y/o Pablo, que Carolina dejó pasar sin penalizarlas ni comentarlas?
3. ¿Se necesita incluir construcciones sofisticadas donde se apliquen los resultados de semejanza para evaluar su dominio o basta con preguntar directamente?
4. ¿Crees que Carolina tiene buenas prácticas en materia de evaluación?
5. ¿Recibe Carolina aportes de sus colegas? ¿Cuáles?
6. ¿Es tan difícil integrar distintos temas para abordar un problema? ¿Se puede enseñar a hacerlo? ¿Cómo?
7. ¿Qué resolución de Carolina podría satisfacer a Camila?
8. La solución de Antonio asume $k = 1$. ¿Cuán válida es esta suposición? ¿Puedes dar un problema donde tal suposición te lleve a un error en la solución o en la interpretación?
9. ¿Qué consecuencias tiene la buena resolución de este conflicto con sus alumnos en la tarea de Carolina de enseñar matemática?
10. Las sugerencias que se agregan a los problemas, pese a que son "sugerencias", ¿cree usted que fuerzan a que los estudiantes piensen en una forma de resolver el problema, que coincide con la manera en que la profesora pensó la solución?

Caso 4: El cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del producto

En una mañana otoñal, junto al calor de la estufa que mitiga en parte el frío maulino de la sala de profesores de un liceo municipal ubicado hacia el interior costero de la ciudad de Talca, Juan y Diego, esforzados profesores de matemática, conversan sobre lo que cada uno ha pensado respecto a cómo enseñar los productos notables.

Juan, el más joven, es entusiasta, creativo y tiene sus objetivos claros con relación a la enseñanza de la matemática, los que adquirió en su formación inicial en la universidad, la que terminó con éxito hace un par de años. Ahora está diseñando estrategias de enseñanza para que sus alumnos y alumnas se apropien del conocimiento de estos destacados productos algebraicos. Diego, en cambio, tiene en su vida laboral bastante *"camino recorrido"*, como él mismo dice. La mayor parte de sus años de docencia los ha ejercido en este liceo. También se encuentra Pedro, el tercer profesor de la asignatura: es algo introvertido, sabio por reconocimiento a la hora de dar algún consejo y que media los años de sus dialogantes colegas, a los que escucha con disimulo y prudencia:

Juan: *¿Puedo hacerle una preguntita don Diego, apelando a su experiencia digo yo? ¿Cómo va a enfrentar usted en su clase la unidad de los productos notables?*

Diego: *Bueno, Juan, no hay mucho que pensar... lo que siempre me ha resultado no más...*

Juan: *Pero... ¿cómo es eso?*

Diego: *Mira, Juan, la forma más fácil, es dar a los jóvenes el listado de las fórmulas; es cuestión de que lo memoricen y con un par de ejemplos por cada una, estamos al otro lado. La del cuadrado del binomio es la que se aprenden más rápido... hasta la recitan "el cuadrado del primero, más o menos el doble del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo".*

Juan: *¿Y eso le resulta, don Diego?*

Diego: *Bueno, recuerda cómo los aprendiste tú...*

Juan: *Bueno, puede ser, pero, ¿qué hay de las sugerencias que se entregan en el programa, don Diego? Allí se plantean algunas actividades que los relacionan con la geometría, que a mí me parecen muy interesantes.*

Diego: *Mira, Juan, el diablo sabe más por viejo que por diablo, iniciativas y buenas intenciones yo he visto muchas, sobre todo en educación, pero al final volvemos a lo mismo; si no los memorizan, no se los saben, punto. De esta forma nos demoraremos mucho y no podremos pasar toda la materia.*

Juan: *Oiga, don Diego, es cierto que tienen que memorizarlos, pero a veces los memorizan sin comprender lo que hacen... Yo trataría que entendieran primero el significado y que todo les sea más natural, más en contexto. Usted sabe que nuestros alumnos entienden perfectamente el cálculo de áreas de terrenos agrícolas y saben que* a^2 *corresponde al área de un cuadrado de lado* a.

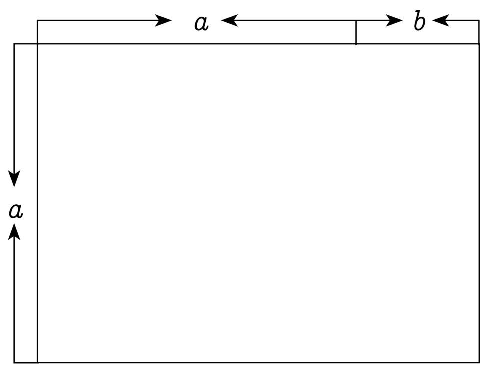
Diego: *Noooo…, Juan. No me convence, y ¿qué hay de la abstracción? … A eso debemos apuntar cuando enseñamos Matemática… a lo mejor no se consigue de inmediato, pero… a medida que vamos avanzando y los jóvenes van entendiendo mejor, podemos ir profundizando y llegar a lo que tú quieres lograr desde la partida.*

Pedro: *Disculpen que los interrumpa… Ustedes saben que este año yo me quedé sin primero, pero si me permiten… los he estado escuchando con atención y quiero decirles que estoy convencido de que en esto no hay una sola verdad. Fórmula y significado deben ir de la mano, son imprescindibles. Lo que yo hago, para no darles solo las fórmulas, es plantearles que realicen los productos para comprobarlas y después aplicarlas en varios ejemplos. Mire don Diego, deberíamos darle oportunidad a Juan para que explique su propuesta, a lo mejor nos ayuda a los dos.*

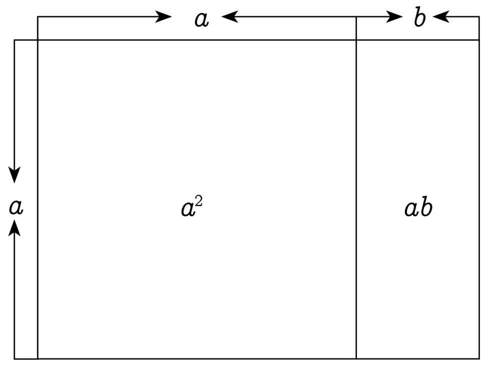
Diego: *Bueno, no crean que yo soy cerrado y no quiero saber de otras formas de enfrentar esta situación. A mí también me interesa que mis alumnos y alumnas aprendan.*

Juan: *Gracias. Miren, vamos a contextualizar lo del cuadrado del binomio. Pero primero les quiero mostrar lo que ocurre con la distributividad en el producto:* $a(a+b)$.

Dibujemos un rectángulo de lados “a” y “$a+b$”, cuya área es precisamente: $a(a+b)$.



Juan: (continúa) *Ahora, tracemos la división interior producida por la magnitud "a" en el lado "$a+b$" y anotemos las áreas del cuadrado y del rectángulo que se forman:*

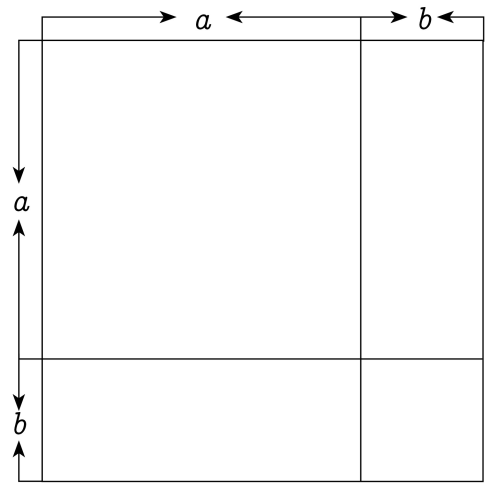


Como ven, tenemos que el área del rectángulo que construimos es igual a la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo que se forman en su interior. Es decir: $a(a+b) = a^2 + ab$

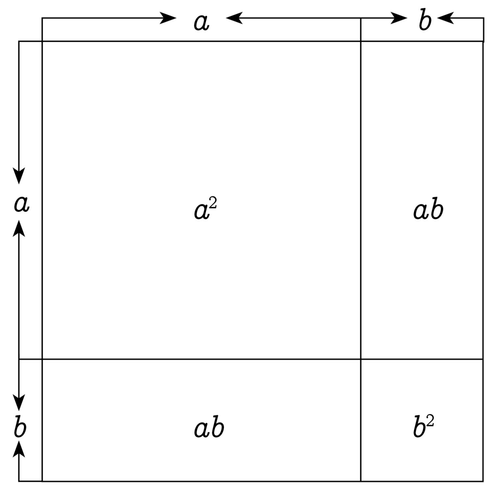
Pedro: *¡Hombre! … Lo explicaste muy bien. Alguna vez intenté poner en práctica esa idea, pero no me resultó.*

Diego: *Mmm…*

Juan (inspirado): *Ya… Pasemos ahora al cuadrado del binomio. Primero dibujemos un cuadrado de lado "$a+b$", que como los jóvenes saben, su área es $(a+b)^2$. Y hagamos de inmediato las divisiones interiores de la misma forma que en el caso del rectángulo anterior:*



Juan: *Ahora, anotemos el área de cada uno de los respectivos cuadrados y rectángulos interiores:*



Juan: (muy contento): *Luego tenemos que la suma de todas las áreas interiores es igual al área del cuadrado original, es decir, tu cuadrado de binomio:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. *Como se darán cuenta, esta representación geométrica del cuadrado del binomio puede ayudar a comprender mejor su significado.*

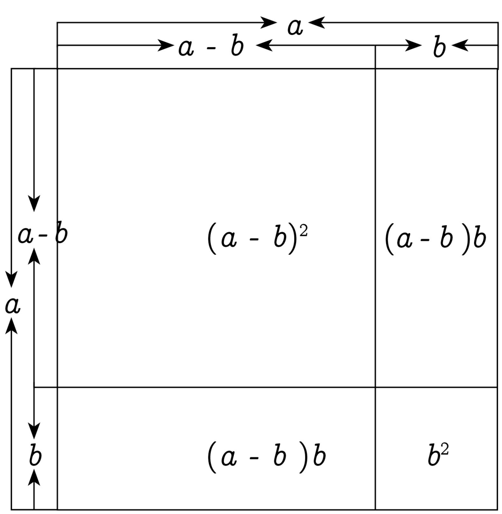
Diego: *De acuerdo, pero ocuparé mucho más tiempo y yo creo que a mis alumnos esto no los va a ayudar, los va a complicar más. Además, esto no sirve si los números son negativos.*

Juan: *Espere don Diego... con todo respeto... claro que me faltó decir que si los números se representan con magnitudes, tienen que ser positivos. Usted tiene toda la razón, esto mismo no se puede hacer si los dos números son negativos. Pero, a partir de esto, después se puede verificar algebraicamente que para los negativos también resulta. Además, tampoco he dicho que todos los productos notables puedan representarse de la misma forma, ya que en el caso de aquellos de grado tres, se necesita construir o graficar modelos tridimensionales, que no estoy seguro si nuestros estudiantes están en condiciones de entender, pero el razonamiento es el mismo. Ahora, para terminar y responder en parte a lo que plantea don Diego, si me dan un par de minutos más, podríamos ver lo que pasa con* $(a–b)^2$*, por supuesto, si "a" es mayor que "b".*

Pedro: *De acuerdo.*

Diego: *Mmm...*

Juan: *Bueno, ahora hagámoslo más directamente. Así que, tomando ahora un segmento "a" mayor que el segmento "b", obtenemos el segmento "*$a - b$*" y construimos la siguiente representación, anotando de inmediato las respectivas áreas interiores:*



Claramente, aquí no se ve tan rápido como en el de $(a+b)^2$, porque es de un nivel de dificultad mayor, pero usando lo que vimos antes, tenemos que: el área del cuadrado de lado "$a-b$" es igual al área del cuadrado de lado "a" menos el área del cuadrado de lado "b" y menos las áreas de los dos rectángulos de lados "$a-b$" y "b"; lo que algebraicamente queda como: $(a-b)^2 = a^2 – b^2 – 2(a-b)b$, es decir: $(a-b)^2 = a^2 – b^2 – 2ab + 2b^2$
Luego: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Pedro: *Esta me gustó más Juan, pero creo que hay otras formas, por ejemplo... ¿tú has visto la posibilidad de hacer estas representaciones recortando papel?*

Juan: *Sí, pero es más limitada y creo que serviría solo para los dos primeros casos.*

Diego: *Bueno, no me vengan también con esa idea rara de andar recortando papelitos con alumnos de Media... Mira Juan, ahora te quiero decir que, aunque lo que acabas de mostrar tiene algo de Álgebra, yo seguiré haciéndolo como siempre y que tú eres libre de hacer lo que quieras, sin necesidad de andarme preguntando mi opinión o de tratar de convencerme de algo que ni siquiera tú has probado que puede resultar.*

Juan: *Pero don Diego, yo...*

Diego (interrumpiendo): *No, no, no,... ahora nada de peros, mis treinta años de experiencia no se dejan de lado así no más. Durante todo este tiempo, mis alumnos han aprendido siempre de la misma forma y, cuando hacen todos los ejercicios que les doy de tarea, generalmente después no se equivocan y quedan muy contentos. Por lo tanto, no vas a venir tú, que estás recién empezando, a decirme a mí lo que tengo que hacer. ¿Ahora me puedes explicar quién ha demostrado que lo que tú propones tiene que ser mejor? ¿Dónde están los resultados de estas mal llamadas "nuevas metodologías"?*

(Juan se queda pensando y decide no responderle a Diego, convencido de que no será posible hacerlo cambiar de idea y, además, a pesar de todo, no lo hace tan mal y es querido por sus alumnos y alumnas, aunque ellos no sepan que podrían aprender mejor).

Pedro (intentando conciliar): *Bueno... yo no tengo tantos años de experiencia como usted, don Diego, pero entiendo el entusiasmo de Juan de intentar hacer algo nuevo. Así es que les propongo que lo analicemos con más calma, porque creo que podemos llegar a algo interesante con todo esto.*

Diego: *Disculpen, no me vengan con cuentos. Yo escuché atentamente a Juan y quiero que les quede muy claro que esta es mi decisión, porque estoy convencido de que la forma en que he trabajado todo este tiempo, es la que me ha permitido llegar a los mejores resultados y es exactamente lo que se nos pide. Por alguna razón es la más usada por la mayoría de los colegas, así es que para mí no hay nada más que analizar. Bueno, ahora me tengo que ir a clase. Hasta luego.* (Se retira con aire triunfante de la sala de profesores, muy orgulloso de todo lo que acaba de decir a sus colegas).

Guía para el facilitador

Introducción

Este caso presenta una situación metodológica muy particular. Se centra en el análisis y la discusión que se produce en un grupo de profesores, al comentar los enfoques que caracterizan sus prácticas docentes o lo que ellos consideran más adecuado al planificar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de “los productos notables” en Primero Medio.

Esta situación involucra a tres profesores de un liceo municipal de un sector rural de la zona central; dos de ellos tienen marcadas diferencias sobre la conveniencia de utilizar determinadas estrategias, que son analizadas y fundamentadas por cada uno, contando con la intervención conciliadora del tercer componente de este grupo.

En general, no creemos que la situación esté resuelta. ¿Cuáles son los estudios experimentales que permiten asegurar que una estrategia funciona mejor ante otra? Si bien la representación funciona para los sumandos positivos, pero la relación $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ es cierta para cualesquiera a y b números reales. ¿Cómo pasamos de la representación geométrica al caso general?

Por otra parte, hay una pregunta anterior que es importante responder: ¿por qué es importante para un ciudadano común conocer esta relación? Este caso propone un tema tan arraigado en la matemática de nivel escolar, que casi se da por descontado que es necesario conocer este resultado, sin hacer una reflexión al respecto.

Resumen

Tres profesores de un liceo rural de la séptima región, Juan, Diego y Pedro, discuten respecto a la mejor forma de introducir los productos notables. Por un lado está Juan, un profesor joven, que pretende introducir este tema mediante representaciones gráficas, particularmente utilizando el área de rectángulos.

Diego, un profesor con treinta años de experiencia, dice que lo hará como siempre lo ha hecho: escribiendo las fórmulas, mostrando unos ejemplos para que luego memoricen y resuelvan ejercicios. En primera instancia, se resiste a conocer las ideas de Juan, pero con la mediación de Pedro, Juan logra ser escuchado por Diego.

Los argumentos de Diego son: que el tiempo no da para hacer todo eso, no cubre todos los casos posibles, no llega a la abstracción matemática y que a él siempre le ha dado buenos resultados.

A la sugerencia de Pedro de hacer lo mismo que la representación geométrica, pero mediante recortes de papeles, Diego deja entender que los estudiantes de media ya están grandes para ese tipo de actividades. Los argumentos de Juan avanzan por el riel de la comprensión: los estudiantes memorizan estas fórmulas, pero no las comprenden y, además, están en las orientaciones del MINEDUC, desde hace bastante tiempo.

Al final, cada cual hará lo que le parece más acertado, sin lograr un consenso.

Objetivo principal

Analizar, desde distintos enfoques metodológicos que se producen actualmente, la enseñanza y aprendizaje de "los productos notables" en Primero Medio.

Objetivos secundarios

a) Discutir acerca de la pertinencia de las representaciones geométricas para estudiantes de primero medio.
b) Discutir acerca de la pertinencia de las actividades con material concreto, como recortes con papel lustre, para estudiantes de Primero Medio.
c) Discutir respecto al modo de pasar de la representación geométrica a la generalización.
d) Discutir acerca de la necesidad de que un ciudadano común conozca los productos notables.
e) Discutir acerca de la necesidad de que el equipo de profesores de matemáticas de una escuela o liceo tenga una misma propuesta didáctica.

Situación problemática principal

En este caso se presenta la clásica situación que suele existir entre docentes de distintas generaciones y, probablemente, distinto tipo de formación inicial. Sus respectivas prácticas pedagógicas se encasillan usualmente como "innovadoras" y "tradicionales". El primero, Juan, está iniciando su desempeño docente; es joven, entusiasta y creativo. Su propuesta está basada en la utilización de representaciones geométricas de algunos productos notables para su "mejor comprensión". Su colega Diego, con bastante más trayectoria y con un enfoque "más práctico", está convencido de que lo mejor es que los estudiantes "logren memorizar" los productos notables.

Situaciones problemáticas secundarias

Una situación problemática dentro del contexto general, es que Diego no cree que las actividades de recorte con papel lustre sean pertinentes para un Primero Medio. Este es un tema a discutir también. La misma duda cabe para las representaciones geométricas.

Al final del caso, cada cual mantiene sus propias creencias y maneras de conducir este conocimiento específico en sus alumnos. Es importante discutir esta situación, para ver de qué manera esta disparidad de criterios tan extrema en un mismo establecimiento educacional, afecta el aprendizaje de los alumnos. ¿Será necesario buscar acuerdos en, al menos, cosas fundamentales como esta? ¿O cada docente es dueño de conducir su clase como honestamente crea que es lo más adecuado?

Recomendaciones para conducir el caso

Hemos observado la tendencia de que los estudiantes analicen más profundamente el caso desde la perspectiva del "objeto metodológico" y descuiden o no consideren el "objeto matemático". Esto es, que se centren más en el análisis del diseño de la relación entre Álgebra y Geometría, y si esta idea es correcta o no (obstáculos epistemológicos) o bien, de qué forma uno de los profesores convence al otro de que su propuesta es mejor.

Tal situación podría evitarse planteando la conveniencia de analizar con detalle: a) la relación algebraico-geométrica involucrada; b) la conceptualización (visualización y contextualización) como etapa previa para el algoritmo (fórmulas); c) la necesidad de la abstracción y; d) el estudio de las fórmulas y su significado.

En este caso es muy fácil que los estudiantes tomen partido rápidamente por la posición de Juan, el profesor más joven, incluso porque Diego aparece como un personaje antipático. Por esto es conveniente tener una batería de argumentos basados en este personaje, para hacer la discusión más balanceada. Algunas ideas que han dado resultado, son, por ejemplo: apoyarse en la opinión de Diego, respecto a que no hay tiempo para hacer este desarrollo de conceptos para todos los tópicos del currículum nacional, que en cada nivel puede ser bastante extenso; entonces, habrá que seleccionar algunos: ¿Por qué éste es uno a seleccionar? ¿Creen ustedes que alcanza el tiempo para hacer este desarrollo en cada tópico?

Otra idea es preguntarles a los estudiantes, si no creen que personajes como Diego aparecerán en su carrera, sobre todo al comienzo. ¿Qué harán para convencerlos de que su forma de desarrollar las ideas matemáticas es mejor que la de Diego? ¿Solo porque lo dijo el profesor de didáctica de la universidad?

Finalmente, no hay que descuidar el análisis que deben realizar los estudiantes respecto del "componente evaluativo", como elemento regulador de los aprendizajes producidos en el aula, y la concepción que subyace en los docentes al tratar tanto el objeto matemático como el metodológico. Es decir, ¿como se medirán las habilidades y conocimientos adquiridos por el estudiante a medida vaya avanzando la unidad de álgebra?

Es importante notar que aquel profesor que "enseña" el cuadrado del binomio como una poesía, es decir, que los estudiantes reciten "el cuadrado del primero más el doble producto del cuadrado por el segundo más el cuadrado del segundo", poco o nada hace de matemática. Distinto es que el profesor muestre el desarrollo del binomio usando la ley distributiva. Tal vez la propuesta sea más balanceada en este caso.

Es importante notar que la representación geométrica no contempla el caso en que los valores de **a** o de **b** sean negativos. Se sugiere poner a los estudiantes en esta situación: "¿Qué pasaría si un estudiante de media los increpa y dice *"profesor entendí su dibujo, pero usted afirma que la igualdad es cierta para todos los valores reales de* **a** *y de* **b***, pero solo analizamos el caso positivo?"*.

Sería muy importante que los estudiantes de pedagogía intentaran responder la pregunta: ¿Cómo pasamos -en este caso- de lo concreto o lo pictórico a lo abstracto?

Otro asunto interesante es plantearse qué pasa en más dimensiones. Con un cubo se puede hacer el mismo análisis, pero hasta ahí llegamos; en dimensión cuatro la cosa se vuelve imposible gráficamente, sin embargo, el abordaje algebraico sigue funcionando.

En el caso de un estudiante que no entiende la metáfora geométrica y la ley distributiva lo agobia, otra pregunta a responder es: ¿se conoce o se tiene a mano otra representación del desarrollo del cuadrado del binomio? Sabemos que a mayores potencias aparecen los coeficientes binomiales: ¿cuál es la relación entre las potencias del binomio y la combinatoria?

Preguntas para guiar la discusión (del grupo que estudia este caso)

1. ¿Cuál es la forma en la que Diego cree que un alumno aprende matemática?
2. ¿Qué opinión le merece que el estudiante aprenda solo las fórmulas?
3. ¿Qué diferencia tienen ambas propuestas metodológicas, respecto de la comprensión de los conceptos y los procesos involucrados en los productos notables?
4. ¿Qué importancia le otorgan ambos profesores a la visualización?
5. ¿Qué tipo de registros ocupan ambos en sus respectivas propuestas?
6. Si Juan realiza su propuesta, ¿cuál es el paso siguiente en el desarrollo de la clase?
7. ¿Cómo se evaluaría el aprendizaje en cada una de las clases?
8. ¿Qué de innovador hay en la propuesta de la representación geométrica, si ha estado presente en nuestros programas de estudios por largos años, y si todos los textos de estudios hacen esta representación?
9. ¿Qué de matemática hay en la propuesta de Diego?

10. Si al final de la unidad se hace una prueba a todos los primeros medios del liceo, y se hacen pruebas para medir las habilidades que se intentó desarrollar en los estudiantes de ese nivel, ¿es claro que los alumnos de Juan obtendrán mejores resultados?
11. ¿Es claro que los alumnos de Diego tendrán peor resultado en SIMCE de Segundo Medio en los ítems relativos a productos notables?
12. Si llegas a un liceo donde todos los profesores de matemática que han tenido tus alumnos son como Diego, ¿los alumnos aceptarán tus representaciones gráficas? O te dirán ¿Profe, por qué no escribe la fórmula y listo? ¿Qué les dirás tú? ¿Les dirás "es que ahí no hay comprensión", ahora comprenderán lo que pasa? ¿Efectivamente comprenderán?

Caso 5: La matemática, un lenguaje raro

Carmen Luz es una profesora de matemática que ha trabajado durante poco más de veinte años en colegios municipales y privados; además, ha realizado algunos postítulos en educación matemática, lo que le ha dado cierta confianza en su trabajo.

Actualmente trabaja en un prestigioso colegio particular de Santiago. El departamento de matemática lleva bastante tiempo estable en cuanto a miembros e ideas. En el Primero Medio que le correspondió este año decide seguir el orden temático que sugiere el programa propio del colegio, que parte con la Unidad 1: Números Racionales y Números Irracionales, coincidentemente con el programa del MINEDUC. A ella le parece que es la forma natural de establecer el vínculo entre este curso y educación básica. Carmen Luz hace un diagnóstico para medir lo que sus estudiantes saben respecto a fracciones. El resultado es que, en general, hay buen dominio de la operatoria con fracciones, las comparan bastante bien, y reconocen cuando dos de ellas son equivalentes. Los errores típicos al respecto aparecieron, pero en poca medida; por ejemplo, en la suma de fracciones hay algunos estudiantes que aún suman numeradores y denominadores por separado.

En la clase siguiente al diagnóstico, revisan el test y repasan algunos tópicos. Carmen Luz, a modo de cierre, para comenzar con materia nueva, dice al curso *¿Alguien tiene alguna pregunta al respecto? ¿Hay algo que todavía está confuso?* Nadie respondía, pero Andrea, una estudiante de buenas notas en general, la mejor en lenguaje y perteneciente al taller de teatro, tenía cara de afligida.

Andrea es la alumna que, en otras ocasiones, ha manifestado que: "Las matemáticas es un lenguaje muy raro. Nadie dice *"sea Luis mi hermano"*, uno dice *"este es mi hermano Luis"*. Nadie dice *"existe un huevo y solo un huevo en el refrigerador"*, sino *"queda un huevo en el refri"* y nadie va a entender que queda más de uno. Y así, siempre se anda quejando del lenguaje matemático, y dice aún más: *"Eso es toda la matemática, un lenguaje, y hay que aprenderlo así, y todos los profesores asumen que debes aprenderlo sola"*.

Carmen Luz, con la mejor de las actitudes, invita a Andrea a compartir su inquietud. Pese al lamento de los demás estudiantes, ella hace su pregunta.

La pregunta

Andrea: *Señorita, yo entendí que* 1/2 *es equivalente a* 2/4, *porque si un entero lo dividimos en cuartos, dos de esos cuartos* **es** *la mitad del entero.*

Carmen Luz: *¿Y qué es lo que no entiendes, Andrea?*

Andrea: *Es que antes, cuando yo decía* **es**, *poníamos un signo igual. Si yo decía cuatro menos* 3 *es* 1, *escribía cuatro-menos-tres-igual-1 (mueve la mano como escribiendo en una pizarra invisible).*

Carmen Luz: *Eso está perfecto, pero ¿cuál es tu duda?*

Andrea: *Mi duda es que si dos cuartos* **es** *un medio, y escribo uno-partido-dos-***igual***-dos-partido-cuatro- ahora moviendo la mano y remarcando el igual, casi subrayándolo en la pizarra imaginaria- ¿por qué decimos* **equivalentes***?, ¿por qué el signo igual, en este caso, se lee como equivalente?, ¿por qué no decimos igual?*

Carmen Luz: *Es que es cierto que son el mismo número, un medio y dos cuartos, pero como fracciones son distintas.*

Andrea: *Eso no lo entiendo. Como fracción un medio es distinto de dos cuartos, pero como número son el mismo. ¿Es decir, la fracción un medio no es lo mismo que el número un medio?*

Carmen Luz: *Exacto. El número un medio y la fracción un medio, son cosas distintas. Por eso decimos que las fracciones son equivalentes y que los números son iguales.*

Andrea: *Entonces, cuando escribimos uno-partido-dos-igual-dos-partido-cuatro, estamos pensando las fracciones como números, pero de todos modos decimos equivalentes. Es raro, ¿no? Entonces, si yo no digo en qué estoy pensando, si en números o en fracciones, es correcto decir un medio es igual a dos cuartos.*

Carmen Luz: *Eso es* (ya cansada y viendo las caras de aburridos del resto del curso) *remata. Si te queda alguna duda, me puedes buscar en la sala de profesores de matemáticas.*

Andrea: *Gracias señorita, pero antes que se me vaya la idea, ¿la fracción un-medio es distinta de la fracción dos-cuartos, porque están compuestas de números distintos?*

Carmen Luz: *Así es.*

Andrea: *Pero, cuatro menos tres es igual a tres menos dos, pues son iguales a 1, pero nadie dice que cuatro menos tres es equivalente a tres menos dos, todos decimos "iguales", pese a que se escriben distinto.*

Carmen Luz: *A ver, Andrea, ¿a dónde quieres llegar?*

Andrea: *A lo mismo de siempre, que la matemática es un lenguaje incomprensible que se dice basado en la lógica, pero no tiene nada de lógico. ¿Por qué no hacemos matemática en castellano? El castellano funciona bien y es claro.*

Carmen Luz: *No seas tan soberbia Andrea, si te pones en ese plano, la única perjudicada eres tú, te cierras y jamás estarás dispuesta a aprender matemática. La matemática tiene sus reglas y hay que respetarlas.*

Andrea: *Pero, ¿cuáles reglas, señorita? Dos medios es uno y tres tercios es uno también, entonces tres tercios es igual a dos medios, pues ambos son iguales a uno, esa es una regla, pero ahora usted me dice que esa regla no es válida para el caso de las fracciones, y que en este caso particular, decimos dos medios es equivalente a tres tercios, porque se escriben distintos. Del mismo modo, podríamos decir que dos elevado a cero no es uno, sino que es equivalente a* 1*, pues no se escriben iguales.... No es nada personal señorita, pero no entiendo que la regla a veces funciona y otras no, por eso la matemática me parece muy difícil de entender. Quisiera comprenderla, pero a cada rato me encuentro con contradicciones como esta.*

Carmen Luz: *Tranquila Andrea, anda al departamento de matemáticas y conversamos con más calma. Te prometo que trataré de responder tus preguntas. Pasemos a otro tema para seguir con la clase. ¿Quién recuerda la relación entre porcentajes y fracciones? Por ejemplo, ¿a qué fracción es igual el* $10\,\%$*?*

Todo el curso, excepto una alumna, responde que $10\,\% = 1/10$. En ese momento suena la campana y se van a recreo, con la sensación de que, gracias a Andrea, de nuevo perdieron el tiempo. "Por lo menos la profesora no pasó tanta materia, comentaban.

La discusión

Carmen Luz decide investigar sobre el tema para estar preparada cuando venga Andrea y así poder explicarle en forma clara su punto. En el Marco Curricular, en los CMO de NB2 lee: "Familias de fracciones **de igual valor** con apoyo de material concreto". En los CMO de NB3 lee: "Encontrar familias de **fracciones equivalentes**". En los CMO de NB4 lee: "Transformación de fracciones decimales a números decimales y viceversa".

Carmen Luz nota que no hay un lenguaje coincidente en el Marco Curricular: a veces dice **fracciones de igual valor** y a veces dice **equivalentes**. Su sorpresa es mayor cuando en el Mapa de Progreso de Números en los indicadores del nivel 3 lee "Encuentra **fracciones iguales** a una fracción dada, mediante amplificación o simplificación". En ese momento se le comienza a mover el piso, y decide hacer una investigación más seria para aclararse a sí misma.

Mayor fue su confusión cuando en un documento TIMSS lee:

"Recognize mathematical entities that are mathematically equivalent (e.g., **equivalent familiar fractions***, decimals and percents; different orientations of simple geometric figures)."*[2]

Honestamente, trata de entender por qué usan el término **equivalentes**, para el caso de las fracciones y no **semejantes** o **congruentes** u otro término. Recuerda, a lo lejos en su memoria, las relaciones de equivalencia y la construcción de $\mathbb{Q}$ vía clases de equivalencias de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times}$. No recuerda mucho la construcción, pero revisa un libro que solía utilizar en la época universitaria.

Con el libro logra aclarar que en la construcción vía clases de equivalencia, se considera al par (x, y) **equivalente** al par (a, b) siempre y cuando $xb = ya$, en cambio la clase completa denotada por x/y es **igual** a a/b.

Ahora entiende por qué se ha heredado el lenguaje de **equivalentes**.

¡Uf! -exclama Carmen Luz- entonces 1/2 y 2/4 son iguales, y yo todos estos años he dicho que son equivalentes. ¿Qué le diré a Andrea? ¿Por qué todos mis colegas, textos, CMO, confunden equivalentes con iguales? ¿Habrá que hacer matemáticas en castellano?

Sale del departamento y encuentra a sus colegas en la cafetería. Les expone sus hallazgos y entre todos reconocen que no hay una uniformidad de criterios, incluso, entre ellos mismos no se ponen de acuerdo. Si bien todos decían *"equivalentes"*, hay algunos que, en vista de los argumentos de Carmen Luz, notan que es correcto decir *"iguales"*, y también hay quienes aún sostienen que es mejor llamarles equivalentes. Incluso, hay quienes pese a que creen correcto llamar *"fracciones iguales"* e incorrecto llamar *"fracciones equivalentes"*, prefieren usar esta última nomenclatura para no causar confusión entre los estudiantes.

Como en el colegio tienen programas propios y los miembros del departamento de matemática llevan tanto tiempo juntos, deciden como acuerdo escribir sus programas, planificaciones, apuntes y todos los documentos oficiales, usando un solo nombre (o bien siempre *"equivalentes"* o bien siempre *"iguales"*).

La decisión se postergó para la siguiente reunión de departamento, la cual ocurriría dentro de dos semanas. Ambas posturas se presentarían y se decidiría cuál es la mejor.

La reunión se realizó con muchos momentos de tensión y la discusión acerca de las fracciones fue, como se esperaba, la que ocupó el mayor tiempo. Al final del día, no todos estaban convencidos de que una forma de nombrar era correcta y la otra incorrecta. Aunque todos estaban dispuestos a ceder su posición a cambio de un lenguaje al menos consecuente, tampoco hallaban en la literatura un lenguaje que fuese unificador.

Un argumento que cobraba fuerza, a favor de *"iguales"*, era usar la metáfora de la recta numérica: *"Si dos números coinciden en un mismo punto de la recta numérica entonces son el mismo número"*.

Como el $1/2$ y el $2/4$ están en el mismo punto de la recta numérica, entonces son el mismo número, entonces $1/2 = 2/4$. Sin embargo, las respuestas no se hacían esperar:

"Eso está bien en el ámbito de los números, y estamos de acuerdo que el número racional $1/2$ *y el número racional* $2/4$ *son iguales, o si quieres, las fracciones* $1/2$ *y* $2/4$ *representan el mismo número, pero como fracciones son distintas"*.

Y venían las respuestas de nuevo: *"Eso no lo entiendo, ¿qué objeto matemático son las fracciones, si no son números?, ¿son operadores Es decir, ¿*$1/2$ *denota al operador "la mitad de"? En ese caso, el operador multiplicar por un medio es igual también al operador* $2/4$*. En definitiva, ¿qué son las fracciones?"*.

Así estuvieron bastante rato, hasta que al final acordaron, solo por acordar algo, que utilizarían el lenguaje de fracciones equivalentes, considerando que en todas partes del mundo se utiliza. Una opinión del director del departamento fue importante para tomar una decisión:

"La verdad colegas, ¿importa tanto como lo llamamos? Todos crecimos, estudiamos y enseñamos sin tener esto zanjado, y esto no nos limitó para hacer y entender matemática. A final de cuentas, estas cosas de nombres, ¿círculo, disco, bola o circunferencia?, ¿área del triángulo o área de la región triangular?, ¿fracciones iguales o equivalentes? no están en el corazón de la matemática, están bien en la periferia, basta que nos pongamos de acuerdo entre nosotros qué vamos a entender por cada palabra y punto".

Carmen Luz, satisfecha aunque no del todo contenta, sale al patio y ve a Andrea conversando animadamente con el profesor de Lenguaje y Comunicación, sonriendo y disfrutando. Se acerca Carmen Luz y, mirando al profesor, dice: Disculpe, profesor. (mirando a Andrea) Andrea, ¿hablemos acerca de las fracciones?

Andrea: *No, profe, ya entendí lo que pasa, no se preocupe. Ya tengo todo claro.*

Carmen Luz sabe que no hay nada claro, pero prefiere no insistir. Va a preparar su próxima clase, escribe en la primera línea $10\,\% = 1/10$

Se queda mirando el techo por un rato, baja la mirada al papel y exclama ¿será posible que $10\,\%$ sea igual al número $1/10$?, ¿o equivalente?, ¿puedo ubicar el $10\,\%$ en la recta numérica?, ¿el $10\,\%$ de qué? ¡Ay, Señor, parece que hay que repensar todo!

[2] Reconoce entidades matemáticas que son matemáticamente equivalentes. (e.g fracciones equivalentes; decimales y porcentajes; diferentes orientaciones de figuras geométricas simples)

Guía para el facilitador

Introducción

Este caso pretende poner en la discusión el lenguaje impreciso y la falta de acuerdo que existe en la comunidad referente a fracciones. ¿Debemos decir que $1/2$ es igual o equivalente a $2/4$? Nuestro actual Marco Curricular no es claro al respecto; en ocasiones dice “fracciones equivalentes” y en otras “fracciones de igual valor”. Y si decimos “equivalentes” ¿por qué usamos el signo igual (=)? Si el $1/2$ y el $2/4$ ocupan el mismo lugar en la recta numérica, ¿por qué decimos que no son iguales?, ¿solo porque se escriben distinto?

También pretende promover la reflexión respecto a qué entendemos por fracciones. ¿Qué queremos expresar cuando decimos “como fracciones son distintas, pero como números son iguales”? ¿Cuál es la estructura algebraica donde viven las fracciones? ¿Son números?

En forma tangencial, el caso promueve la discusión respecto el lenguaje usado en matemática, el cual puede ser muy poco natural, agregando una dificultad ficticia a su enseñanza.

Resumen

Una profesora de matemática de Educación Media (Carmen Luz), en las clases referidas a números racionales, descubre un problema al tratar de explicar a una estudiante (Andrea) la denominación de fracciones equivalentes.

Andrea es una buena estudiante, sobre todo en Lenguaje y Comunicación, y siempre le ha parecido que las matemáticas es solo un “lenguaje raro” y que los profesores creen que se debe aprender por sí solo. Ella argumenta que típicos enunciados matemáticos como “Sea ABC un triángulo...” no son habituales en castellano, en general decimos “Consideremos el triángulo...”.

En esta clase en particular, ella no comprende por qué decimos $1/2$ es equivalente a $2/4$ pero escribimos “iguales” ($1/2 = 2/4$).

La profesora se sumerge en la discusión, y aparecen argumentos del tipo “$1/2$ es equivalente a $2/4$” como fracciones, pero como números son iguales. También argumentos del tipo “el número $1/2$ y la fracción $1/2$ son cosas distintas”. También “si se escriben distinto, entonces no pueden ser iguales”. Investiga en programas nacionales e internacionales y no existe un consenso al respecto; busca en literatura matemática especializada y llega a la convicción de que lo correcto es decir “iguales” en vez de equivalentes.

Ella propone la discusión en reunión de departamento, y entre sus colegas tampoco hay consenso; incluso, pese a que algunos le encuentran la razón, prefieren utilizar el lenguaje de "equivalentes" solo para ser consecuentes con la tradición y literatura escolar.

A modo de epílogo, ella nota que también hay cierta incompatibilidad en la igualdad $10\,\% = 1/10$ y cree que es necesario volver a analizar todo lo que debe enseñar.

Objetivo principal

Provocar discusión y reflexión respecto a si lo correcto es decir "fracciones equivalentes" o "fracciones iguales".

Objetivos secundarios

1. Provocar discusión y reflexión respecto a qué objeto matemático es la fracción. ¿Es un número? ¿Es sólo un número?
2. Provocar discusión y reflexión respecto a si la discusión acerca del lenguaje correcto en el caso de fracciones, es una discusión importante o es totalmente periférica dentro de la matemática.
3. Provocar discusión y reflexión acerca de si en pos de la tradición y la literatura, conviene usar un lenguaje impreciso.
4. Provocar discusión y reflexión respecto a si el equipo de profesores de matemática de un establecimiento, necesita fijar posiciones, como en el tema que se discute en el caso.

Situación problemática principal

Carmen Luz y Andrea discuten en clases respecto al lenguaje de la matemática, en particular lo ambiguo que resulta escribir el signo igual entre fracciones y decir equivalentes en vez de fracciones iguales. Esta discusión trasciende la sala de clases y llega al departamento de matemática del colegio, incluso, revisan la literatura y aún así no llegan a una respuesta.

Situaciones problemáticas secundarias

Hay otros aspectos del mismo tema que se pueden catalogar como situaciones secundarias, por ejemplo:

a) Las fracciones, si no son números, ¿qué objeto matemático son?, ¿cuál estructura las contiene?, ¿cuáles reglas las gobiernan?
b) ¿Es qué a veces se puede decir $1/2$ es igual a $2/4$ y otras no?
c) ¿Siempre se tiene que decir fracciones equivalentes?

Respecto a otro punto, se produce una nueva situación problemática en el equipo docente. ¿Qué se hace cuando no hay consenso respecto a la definición de un objeto matemático? ¿Es necesario llegar a un consenso? ¿O cada uno puede ir por su carril?

Otra situación importante a destacar es la discusión de Carmen Luz con Andrea, la cual puede ocupar mucho tiempo y solo las involucra a ambas. ¿Hay que hacer participar a todo el curso? Si a nadie más le interesa el tema, ¿es mejor discutirlo con la alumna a solas?

Finalmente, el director de departamento le baja el perfil a la discusión y dice que no es un tema importante, pero a Carmen Luz le ha quitado el sueño y ha llevado al departamento completo a una buena discusión. ¿Es o no un tema importante? ¿Esta discusión es de la misma categoría que diferenciar círculo o disco?

Recomendaciones para la conducción del caso

1. En experiencias piloto, muy pequeñas y controladas, se ha observado que si los estudiantes han tenido un curso donde se estudia la construcción de $\mathbb{Q}$ vía clases de equivalencias de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times}$, surgen confusiones profundas, por ejemplo, si bien definen la clase de $(1, 2)$ como el número racional $1/2$ y la clase del $(2, 4)$ como el número racional $2/4$, le siguen llamando equivalentes al $1/2$ y a $2/4$, pese a que como clases son iguales.

   Se puede aprovechar esta discusión para entender por qué se hereda la denominación de "equivalentes" para las fracciones y no otro nombre. Es importante aclarar que, en este contexto, tiene sentido decir que $(1, 2)$ es equivalente a $(2, 4)$; pero, $1/2$ es igual a $2/4$. Otro asunto que apareció en una de estas sesiones es que el ? tiene categoría de número racional; en cambio, $2/4$ no es un número racional para varios de los estudiantes participantes. En general, esta visión produce gran confusión, y hay muchos errores en las ideas que se tiene.
2. Cuando hay estudiantes que no han tenido cursos donde la construcción de estructuras cuocientes hayan sido estudiadas, la discusión se puede llevar a usar representaciones geométricas de la recta numérica. Si todos aceptamos que si a está a la izquierda de b en la recta numérica, entonces $a < b$, y si dos números ocupan la misma posición en la recta entonces son el mismo, podemos entender que $1/2 = 2/4$.
3. Puede ocurrir también que se entiendan las fracciones como operadores: "1/2 es la mitad de algo". Si se entiende como operadores, entonces la discusión se puede llevar en ese ámbito, es decir, considerar los operadores $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1/2)x$ y el operador $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (2/4)x$ y notar que en ese ámbito también son iguales.

Preguntas para guiar la discusión

1. Después del estudio realizado por Carmen Luz, ¿tiene razón al afirmar que 1/2 es igual a 2/4 o le faltan puntos que considerar?
2. Pensar los números como puntos de la recta lleva intrínsicamente la idea de que si un número está en un punto y otro está a la izquierda del primero, entonces el segundo es menor que el primero. Y si dos números están en el mismo punto, entonces esos números son iguales. En ese sentido, ¿dónde ubicas el 1/2 y dónde ubicas el 2/4?, ¿son o no son el mismo?
3. ¿Son las fracciones un único objeto matemático con varios usos? ¿Es una misma representación para diferentes objetos matemáticos?
4. ¿Son importantes los nombres en matemática?
5. ¿Cuán importantes son los acuerdos en matemática a nivel profesional, a nivel académico, a nivel de instituciones locales?
6. ¿Qué es lo que está en el "corazón de las matemáticas", según dice el director de departamento?
7. ¿La discusión "se dice área del triángulo o área de la región triangular" es de la misma categoría que la discusión "fracciones equivalentes versus fracciones iguales"?
8. ¿Hizo bien Carmen Luz al no insistir con Andrea en discutir respecto a fracciones iguales?
9. ¿10 % es un operador o es un número? ¿O es ambos?
10. ¿Es cierto que el número 1/10 es igual a 10 %?
11. ¿Cómo explicar a estudiantes de enseñanza media que $1/2 = 2/4$ sin entrar en temas como clases de equivalencia?
12. ¿En qué otro contexto, fuera de las matemáticas decimos: Sea $XXXXXX$ un $YYYYYYY$? ¿Por qué no decir: "Consideremos el triángulo ABC" en lugar de "Sea ABC un triángulo"?

Caso 6: ¿Matemática para todos?

Primera parte

Camilo terminó hace cuatro años su carrera de Pedagogía en Matemática. Proveniente de una familia de clase media, siempre tuvo una alta conciencia social y eligió la carrera de profesor por su vocación de servicio. Siempre ha pensado que la mejor manera de ayudar a surgir a los jóvenes es mediante una mejor educación, y nada mejor que ser profesor de matemática, la más útil de todas las asignaturas según su parecer.

Después de trabajar en algunos reemplazos y puestos temporales, Camilo es contratado como profesor de matemática en el liceo politécnico de una ciudad ubicada al interior de la provincia de Ñuble. Por fin podía "hacer patria" en un lugar del que la mayoría de la gente no sabe siquiera de su existencia, ayudando a los jóvenes a salir de la pobreza mediante una educación de calidad. Camilo trabaja hace ya tres años en este liceo y, a pesar de encontrarse con un alumnado con "pésima base", no ha cedido en su empeño de revisar todos los contenidos y no bajar el nivel de la enseñanza. Por esa razón ha debido enfrentar muchos roces con los demás docentes y con los propios alumnos del colegio.

Actualmente, encontramos a Camilo haciendo una clase en un Tercero Medio, sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado. Un aspecto que le genera más cuestionamientos, es la falta de interés de los propios alumnos en la clase. *"¿Cómo pretenden salir adelante si no se esfuerzan?"* piensa, mientras escribe en la pizarra. Se pregunta si vale la pena todo el esfuerzo que realiza y todos los problemas por los que ha debido atravesar para tratar de enseñar a estos alumnos, que ni siquiera valoran su dedicación y no ponen nada de su parte.

Y ahora, en medio de su clase, nadie le presta atención nuevamente. Camilo se siente inútil e incomprendido. *"Esto no da para más"*, piensa. Ve a Jorge, un joven muy inteligente, conversando con un grupo de compañeros, riéndose y "echando la talla", sin ningún interés por atender a la clase.

"Jorge, pasa adelante a resolver este ejercicio, por favor", le dice Camilo. En medio de las risas de sus compañeros, Jorge camina hacia el pizarrón, donde está escrito:

Resolver la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Jorge no ha puesto atención a la clase ni ha estudiado la materia. Mira a sus compañeros, que se ríen de él, y mira al profesor Camilo, que lo observa enojado.

"¡$x = 2$!" (le sopla Natalia, sentada en la primera fila. Y Jorge escribe en la pizarra eso: $x = 2$.

Observa al profesor para ver si está bien, pero nota que este se enoja cada vez más.

"¡$x = 3$!" (le sopla Roberto, de otro rincón).

Entonces, Jorge borra lo anterior y escribe: $x = 3$

"*Ojala esté bien, para que el profe no me rete*" piensa para sí. Observa a Camilo, que parece aún más enojado... Jorge se rinde, ante la mirada burlona de sus compañeros, que también observan cómo el profesor se enoja más y más. "*Esto se va poner bueno*"(le dice Patricio a Jaime).

Camilo: Jorge, ¿eso es todo lo que puedes hacer?

Jorge: *Sí, profesor,* $x = 3$... *eh, ah..., a ver, verifiquemos si realmente es solución. (¡Verdad que el profesor dice que al final hay que verificar la solución! recuerda Jorge, esperanzado). Efectivamente,* $x = 3$, *dice con mayor seguridad.*

Camilo: *¿Y cómo encontraste esa solución?*

Jorge: *¡Pero, profe! Está bien, si reemplazo el valor en la ecuación, resulta la igualdad.*

Camilo: *¿Y cómo sabes que no hay más soluciones?*

Jorge: ... *Eh, ¿más soluciones?*

Camilo: (Ya no puedo más, piensa). *Jorge, tú eres un muchacho inteligente, puedes rendir mucho más. ¡Qué pena que no te esfuerces y no pongas atención!*

Jorge: *Pero, profe, no se enoje, además que está bien la solución.*

Camilo: (Se dirige al curso). *No sé cómo quieren ser alguien en la vida con esta actitud, se lo pasan conversando y no ponen atención. Después se quejan de que no tienen las mismas oportunidades, pero no ponen nada de su parte.*

(Natalia, presidenta del curso, hace tiempo que ha notado que el profesor Camilo los sermonea constantemente. Ya le está molestando la actitud del profesor).

Natalia: *Profesor, yo no entiendo por qué es tan importante, como dice usted, saber usar fórmulas enredadas a las que no vemos asunto.*

Camilo: *En el mundo de hoy la matemática es imprescindible, y el que no la domina queda al margen de la sociedad del conocimiento.* (El curso lo observa como si sus palabras no tuvieran sentido).

Natalia: ... *eso lo ha dicho mil veces, profesor, pero nadie de aquí va a ser ingeniero ni científico. Yo por mi parte, aspiro a ser enfermera, como mi tía Gloria, que vive en Chillán. Y ella me dice que nunca en su vida ha resuelto una ecuación.*

Camilo: *El que es flojo, siempre encontrará excusas para no trabajar.*

Natalia: (enojada) *Profesor, yo no soy ninguna floja. Es usted el que no puede aceptar que no le ponemos atención, porque lo que usted nos enseña no nos interesa.*

Camilo: (observa con preocupación que la mayoría de los alumnos aprueba las palabras de Natalia). *No todo lo que deben aprender tiene que ser entretenido, hay que tener disciplina para estudiar cosas aparentemente inservibles. Si no saben resolver ecuaciones de segundo grado, nunca podrán conocer temas más avanzados.*

Natalia: *Pero eso es lo mismo que nos dijo el año pasado, que esto es lo básico para lo que viene después, pero parece que nunca veremos nada que sirva de verdad, a menos que seamos ingenieros, y nadie de acá sueña siquiera con eso, pero no por eso nos sentimos menos que usted.*

(Camilo se siente decepcionado y confuso. No encuentra manera de motivar a sus alumnos, que prefieren saber de biología, electricidad y se pasan conversando de mecánica automotriz o de fútbol, en lugar de escucharlo).

Segunda parte

Hace algún tiempo, Camilo trató de mostrar mediante ejemplos y trabajos en grupo que la matemática "también sirve para biología y electricidad." Además, organizó algunas actividades de indagación para relacionar problemas de mecánica automotriz e, incluso, de planificación de campeonatos de fútbol con la asignatura, pero, en general, los alumnos se decepcionaron con sus propuestas y siguieron displicentes hacia los contenidos del ramo. El caso de mecánica automotriz fue agravado por el hecho que los jóvenes saben que Camilo es uno de los pocos hombres que viven en su pueblo, que no sabe ni siquiera cambiar los neumáticos de su auto.

En esto, Valeria, una compañera de Camilo en la universidad, lo llama para contarle que en su colegio, un colegio particular pagado muy prestigioso de Concepción, uno de los que tiene mejor promedio PSU de la región, hay una vacante y que ella lo puede recomendar.

Camilo lo piensa y, finalmente, postula al puesto.

Hace 3 años que Camilo trabaja en el colegio particular de Concepción. Le han asignado un Tercero Medio y está haciendo una clase sobre la ecuación cuadrática. Todos los alumnos le prestan atención, y entre tantos ejercicios que han resuelto, propone el siguiente:

Resolver la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Muchos levantan la mano para resolverlo adelante. “A ver, Francisco Javier, pasa tú adelante”, pide Camilo.

Francisco Javier resuelve la ecuación usando la fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática.

“Muy bien, Pancho”, le dice Camilo. “Miren, esta ecuación también podía resolverse factorizando”, y muestra a los alumnos cómo hacerlo de esta forma; ellos lo observan no muy interesados.

“A ver, y el siguiente problema”:

Resolver la ecuación $x^4 + 11x^2 + 24 = 0$

Javier, su alumno estrella, medalla de oro en el campeonato de matemática, resuelve rápidamente el problema. Los otros alumnos esperan que Javier termine. Sebastián piensa “Ya se puso el profe Camilo a poner problemas para el Javier”.

Camilo: *¿Puedes pasar a resolver el problema, Sebastián?*

Sebastián: (mira angustiado a Javier) *Eee.... Pero, profe, si no hemos visto cómo resolver ecuaciones de grado 4, ¿por qué no hace pasar al Javier mejor?*

Camilo: *Pero si es muy fácil.*
(Sebastián pasa a la pizarra, alcanza a escuchar que Javier le dice "No hay soluciones" y escribe)

Resolver $x^4+11x^2+24=0$

Solución

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{2}$$
$$=\frac{-11\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-11\pm 5}{2}$$
$$x=\frac{-16}{2}=-8$$
$$x=\frac{-6}{2}=-3$$
$$\boxed{x=-3,\ x=-8}$$

Comprobación:

$x=-3$

$$-3^4+11\times-3^2+24=0$$
$$81+99+24=0$$
$$194=0 \quad X$$

$x=-8$

$$-8^4+11\times-8^2+24=0$$
$$4096+704+24=0$$
$$4824=0 \quad X$$

$\therefore$ No hay soluciones

Camilo: *Sebastián, tienes que esforzarte un poco más, no se trata solo de aplicar las fórmulas como robot, sin pensar.*

Sebastián: (se siente un poco pasado a llevar por el profesor) *Yo no soy un robot profesor, y sé pensar, solo que no soy bueno en matemática y con lo que sé me basta y me sobra para lo que quiero estudiar. Javier es el que goza con esto.*

Camilo: *Pero no importa lo que estudies, siempre la matemática te servirá.*

Sebastián: *Mis viejos son abogados, mis dos abuelos son abogados y yo también quiero serlo. Sinceramente profesor, me importa muy poco saber o no saber resolver ecuaciones, ellos me han contado que nunca en su vida les ha aparecido una. Con lo que sé y lo que me ejercito, ya estoy sacando más de 700 puntos en la PSU, que es lo único que me importa.*

Camilo queda un poco descolocado con la respuesta de Javier. Recordó sus tiempos en provincia. La discusión parecía ser la misma. "*No puedo negar que estoy un poco de acuerdo con Sebastián*". *¿Cómo puedo interesar a todos mis alumnos en esto?*

Guía para el facilitador

Introducción

Este caso propone la discusión respecto de enseñar matemática a estudiantes que no tienen ninguna motivación para aprender este tema, ya sea porque no tienen ninguna intención de seguir estudios superiores, o porque su área de futuro profesional no se relaciona con la asignatura. ¿Cómo hacer para motivarlos? ¿Será cierto que si realizan actividades relacionadas con los tópicos de interés de los alumnos, se logrará motivar al curso o es solo un mito? ¿Cómo hacer para motivar a los estudiantes que no sienten interés por las matemáticas a realizar demostraciones, considerando que la argumentación es una parte importante de la matemática? ¿Cómo hacer para motivar a estudiantes que no sienten interés por la matemática, ni por ningún tipo de conocimiento relacionado con las asignaturas escolares?

Resumen

Este caso trata sobre dos vivencias de Camilo, un joven profesor de matemática que se encuentra en los primeros años de ejercicio de su profesión. Ambas vivencias apuntan al tema de la motivación de los estudiantes para con la asignatura y, específicamente, para la resolución de ecuaciones de segundo grado.

En la primera parte, Camilo trabaja en un liceo rural y sufre un choque frontal con un alumnado altamente desmotivado, pero que quiere entender por qué es importante "saber usar fórmulas enredadas a las que no vemos asunto". Las respuestas de Camilo no satisfacen al curso y no está claro que lo satisfagan a él.

En la segunda parte, Camilo ha cambiado de lugar de trabajo y ahora se desempeña en un establecimiento "de excelencia". Sin embargo, pronto descubre que la aparente motivación de los alumnos para con la matemática es puramente circunstancial ("... me importa muy poco saber o no saber resolver ecuaciones... ya estoy sacando más de 700 puntos en la PSU, que es lo único que me importa").

Objetivo principal

El objetivo de este caso es provocar una discusión y reflexión por parte de los estudiantes de pedagogía en cuanto a la pertinencia de los contenidos que enseñan y a la necesidad de motivar a los alumnos con ellos.

Objetivos secundarios

1. Provocar una discusión y reflexión acerca del problema de la motivación, algo que no es trivial, y que será distinta según los intereses de cada uno.
2. Provocar discusión y reflexión acerca de cuál es la importancia de estudiar matemática de nivel escolar. ¿Es para resolver problemas de la vida cotidiana o de otras áreas del conocimiento? ¿Es para entender la información que aparece en los medios? Son razones puramente utilitarias.
3. Provocar discusión y reflexión acerca de cómo evitar la mecanización y automatización, que parece intrínseca a ciertos contenidos.

Situación problemática principal

La situación problemática principal está centrada en Camilo y en su dilema personal, que se ve reflejado en el último párrafo del relato "¿cómo puedo interesar a todos mis alumnos en esto?". Esta problemática se evidencia tanto en el liceo politécnico de provincia como en el liceo particular pagado de la ciudad.

Situaciones problemáticas secundarias

Hay algunas otras situaciones problemáticas, por ejemplo, Camilo elaboró actividades que involucran matemática y tópicos del gusto de los estudiantes, como electricidad, mecánica y fútbol, pero tampoco obtuvo resultado. ¿Será que la única forma de motivar es aplicando la matemática?

También es una situación problemática, cuando Camilo intenta lograr interés de sus alumnos, diciendo que lo que ven ahora es la base para conocer cosas más avanzadas. ¿Tiene sentido justificar la necesidad del conocimiento de hoy con el conocimiento del próximo curso? ¿Qué se le dirá a un alumno en Cuarto Medio que no seguirá estudios superiores?

Recomendaciones para la conducción del caso

Este caso consta de dos partes. Durante una sesión de hora y media, se sugiere dedicar los primeros 45 minutos al análisis de la primera parte. Cuando este ha concluido se sugiere entregar la segunda parte a los alumnos y recomenzar la discusión.

En este caso en particular, se sugiere invitar a los estudiantes a dramatizar el caso, porque es adecuado enfrentar los argumentos para convencer a Natalia, ante una Natalia de verdad; lo mismo con Sebastián.

En general, en un principio los alumnos darán argumentos más bien políticamente correctos, pero que no convencerían a un estudiante de secundaria. Es probable que surjan frases del tipo "*la matemática también sirve para enfermería, por ejemplo,* *puedes calcular...*" en circunstancias que Natalia sabe por su tía que, muy probablemente, nunca necesitará nada de matemáticas, salvo quizás aritmética básica.

Paulatinamente, los estudiantes van asumiendo que la motivación no es un tema trivial. Que no es cierto que toda la matemática se puede aplicar a todas las áreas. Que no es cierto que si un alumno ve la matemática aplicada en un campo de su agrado, entonces le empezará a gustar la matemática. Sin embargo, sería interesante que reconocieran en la motivación un punto central de su futura práctica.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Puedes responder a los cuestionamientos de Natalia?
2. ¿Qué actividades propondrías para relacionar las ecuaciones de segundo grado con electricidad? (Luego, insistir si es necesario), ¿con biología?, ¿con mecánica automotriz?, ¿con el fútbol?
3. ¿Puedes complementar la frase de Camilo "En el mundo de hoy la matemática es imprescindible y el que no las domina queda al margen de la sociedad del conocimiento" para hacerla más convincente? ¿Piensas que esta frase puede convencer a una alumna o alumno desmotivado?
4. ¿Piensas que es verdadera la frase de Camilo "En el mundo de hoy la matemática es imprescindible y el que no las domina queda al margen de la sociedad del conocimiento"?
5. ¿Qué opinas de la frase de Camilo "No todo lo que deben aprender tiene que ser entretenido, hay que tener disciplina para estudiar cosas aparentemente inservibles"?
6. ¿Por qué ningún alumno del curso se dio cuenta de que la ecuación de cuarto orden no tiene soluciones, pues simplemente para cualquier se obtiene algo positivo al lado izquierdo?
7. ¿Qué piensas tú, como futuro profesor o profesora de matemática, sobre la enseñanza de la fórmula para resolver la ecuación cuadrática?
8. ¿De qué manera puede enfrentarse específicamente la enseñanza de "resolución de ecuaciones de grado 2"?
9. ¿Es cierto que un buen profesor o profesora de matemática debe tener como una característica principal motivar a sus alumnos hacia la matemática?
10. ¿Cómo hacer para motivar a estudiantes que no sienten interés por la matemática ni por ningún tipo de conocimiento relacionado con las asignaturas escolares?
11. ¿Se puede enseñar a ser motivador?
12. ¿Qué opina sobre la afirmación siguiente: "La matemática que se debe enseñar no es para todos la misma, por ejemplo, a un ingeniero se le debe enseñar de una forma distinta que a un médico"?
13. En una misma sala de clases, ¿habrá una matemática distinta para distintos grupos de alumnos? Si es así, ¿cómo gestionar la clase y sus contenidos?, ¿que

haya distinta matemática para distintas personas, significa que una es más fácil que otra?

14. ¿La matemática es como una caja de herramientas que resuelve problemas de la vida cotidiana o de otras ciencias y solo eso? Si no es solo eso, ¿qué otra cosa es?
15. ¿La matemática de nivel escolar le servirá a alguien que no realizará estudios superiores? ¿Cómo, por qué?

Caso 7: Solo resulta en el postítulo

Primera parte

Carmen Gloria terminó hace poco, y de manera muy exitosa, un postítulo universitario para profesores de matemática de enseñanza media. De las cosas que aprendió, la que más le impactó fue la importancia de las visualizaciones y representaciones en matemática. Desde entonces, ha utilizado visualizaciones y representaciones en varios tópicos del currículo: para números racionales ha empleado frecuencias relativas y probabilidades; y para otras, metáforas clásicas, como la de máquinas transformadoras para las funciones.

También ha utilizado la idea de transformar un problema en otro más manejable. Por ejemplo, en probabilidades todo lo presenta de manera lúdica a través de juegos de urnas, naipes, dados o monedas, con excelentes resultados; tanto así, que sus estudiantes ya hacen las transformaciones de manera autónoma, sin que ella esté "picaneando" para que esto ocurra.

Sus colegas están sorprendidos de que Carmen Gloria haya tomado esta bandera con tanta pasión, más aún al recordar que solía despreciar el aspecto "didáctico" de la enseñanza por considerarlo un adorno innecesario, argumentando que un dominio cabal de los contenidos por parte del docente era suficiente para que los estudiantes aprendieran. Ahora anda todo el día pensando en metáforas, representaciones, "mapeos conceptuales" como les llama ella, que le permitan hacer surgir la matemática del "*fondo de la oscuridad*". *¡Qué bicho le picó!* comentan extrañados sus colegas.

Cuando le tocó repasar fracciones de números enteros, para el tópico de números racionales de Primero Medio, se preocupó de mostrar a los alumnos varias representaciones de las fracciones, además de las tradicionales pizzas. Entre ellas, aquella de las fracciones como parte o porción de un conjunto de individuos u objetos:

En un curso mixto hay 25 niñas y 20 niños. ¿Qué fracción del curso corresponde a mujeres?

Los estudiantes más talentosos estaban bastante aburridos con los ejemplos de Carmen Gloria, algunos se sentían casi ofendidos por los ejemplos triviales que proponía. *"Ni en Sexto Básico nos enseñaron con ejemplos tan fomes", "A mí me habían dicho que la profesora Carmen Gloria era más dura, pero parece que tener buen promedio en el curso va a ser papaya".*

A Carmen Gloria no le preocupaban los comentarios, pues estaba segura de que esos estudiantes eran a "prueba de profesores" y que sin importar quién les hiciera clase, ellos iban a rendir bien de todos modos. No obstante, sentía que estaba llegando a estudiantes que antes no la tomaban en cuenta, porque iba muy rápido en sus explicaciones, dando definiciones, ejemplos y aplicaciones, sin detenerse en los tiempos específicos de cada alumno y alumna.

Una semana después, propuso al curso un ejercicio de aplicación de sumas de fracciones de distintos denominadores. Grande fue su sorpresa al comprobar que varios estudiantes, al sumar

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

lo hacían sumando numeradores y denominadores por separado:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

Carmen Gloria se horroriza y les dice: *"¡Así no se hace! Fíjense bien, son fracciones de distinto denominador, lo que deben hacer es ponerlas en común denominador, en este caso, por ejemplo* 6.
Así queda...

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Los alumnos asintieron, pero no parecían muy convencidos, especialmente Matías.

Matías: *Yo entiendo lo que usted calculó, pero no entiendo por qué no me da el mismo resultado cuando las represento como usted nos dijo antes".*

Carmen Gloria: *¿Cómo así?*

Matías: *Pero acuérdese, profe, usted misma nos dijo que era bueno representar y visualizar antes de calcular. Y a mí eso me ayudó harto. Entonces ahora yo pensé:*
1/2 *lo represento por una caja en que hay una bolita roja y una blanca. Las rojas son la mitad del total.*
1/3 *lo represento por una caja en que hay una bolita roja contra 2 blancas. Ahora las rojas son un tercio del total.*

Ahora me acuerdo que sumar es juntar, así que yo junto no más las dos cajas. Echo todas las bolitas en una caja más grande. Y ahí tengo ahora 2 rojas y 3 blancas. O sea, las rojas son $2/5$ *del total.*

Carmen Gloria: (perpleja) *Pero, fíjate que ese resultado* $2/5$ *no es posible, porque es menor que* $1/2$*, y al sumarle algo a* $1/2$*, no puede dar un resultado más chico que* $1/2$.

Matías: *Eso lo entiendo, profe, pero igual no entiendo por qué al juntar las cajas que representan las fracciones, no me da lo mismo.*

(En ese momento sonó la campana y Carmen Gloria, con un suspiro de alivio, le dijo a Matías "*Lo seguimos viendo en la próxima clase, ¿te parece?*".

Segunda parte

Carmen Gloria está comenzando a pasar probabilidades en ¿Primero? ¿Segundo? Medio. Sensatamente, quiere motivar las probabilidades a partir de las frecuencias relativas. Da ejemplos del tipo éxito-fracaso en un experimento en que uno mide "el grado de éxito" o la "eficacia" mediante la frecuencia relativa del éxito: número de éxitos o aciertos, dividido por número total de intentos.

Pero de nuevo, en el curso de un ejercicio, se encuentra con un alumno, José, que suma

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{9}$$

Carmen Gloria se horroriza de nuevo y trata de explicarle por qué su resultado es absurdo, pero el alumno se defiende:

José: *Es que yo me acordé de cuando usted nos enseñó a hacer la fracción aciertos divididos por intentos. Así que yo me imaginé que ese* $2/5$ *y* $3/4$ *salieron de un juego en que uno trata de embocar pelotas en un cesto: Pedrito acertó* 2 *lanzamientos de* 5 *y María acertó* 3 *de* 4*. Entonces, los dos juntos acertaron* 5 *de* 9*. Y cuando queremos medir la destreza de un jugador o equipo, dividimos su número de aciertos por su número de intentos. Así es que el equipo Pedro - María tiene una destreza de* $5/9$*, de nueve lanzamientos aciertan* 5*. Es decir, la suma de las destrezas individuales es la destreza del equipo, entonces…*

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{9}$$

Carmen Gloria ya no da más, le parece que su nueva bandera de lucha la ha llevado por caminos sinuosos. Un poco decepcionada del modo en que los estudiantes han utilizado sus ideas, reconsidera la implementación del método didáctico que está realizando. Piensa que, tal vez, el asunto es similar a lo que le ocurría cuando era estudiante de pedagogía: ella seguía las clases de matemática sin ningún problema, pero una vez que comenzaba a resolver las guías y los problemas de los libros, no sabía por dónde empezar, no avanzaba y no obtenía resultados; solo en ese momento se daba cuenta de que no había entendido todo lo que ella suponía. Ahora le pasaba lo mismo, todo se ve muy bonito en el postítulo, pero al parecer el profesor de la universidad es tan capo, que puede llevar a cabo esta metodología a la perfección; pero como *yo no tengo todo su conocimiento didáctico, ni mucho menos matemático, no tengo las herramientas para salir de estas encrucijadas. Otra cosa es con guitarra*, piensa.

Guía para el facilitador

Introducción

Los estudiantes de educación media suelen tener especiales dificultades con el concepto de fracción (también los de básica). Generalmente, en educación básica han visto razones, proporciones, porcentajes, pero para la mayoría, una fracción es un símbolo *"esotérico"* con el que se calcula mecánicamente y en forma descontextualizada y sin mayor justificación. En el mejor de los casos, representa un proceso, pero no la conciben aún como un número.

Por otra parte, la estadística es un tópico tratado someramente en la formación inicial de los profesores, con un fuerte déficit de buena base experimental y de situaciones didácticas relevantes. Las frecuencias relativas aparecen como fracciones, pero la relación entre las manipulaciones estadísticas y el cálculo de fracciones permanece confusa.

Este caso pretende abordar estos dos temas con la problemática común: ¿qué significa a/b? Al no tener claro el significado de a/b, los alumnos alumnas operan con las fracciones imitando la forma en que sabían operar con enteros, obteniendo por ejemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$$

Habitualmente, los docentes se limitan a corregir este procedimiento, sin consagrar mayor atención a las posibles causas de este error.

Resumen

Carmen Gloria es una profesora de matemática que después de participar en un postítulo, quedó convencida de la importancia de las metáforas y de las representaciones en matemática. Así, ella cambió su forma de ver la enseñanza de la matemática y su postura respecto a esta.

Ahora ocupa bastante tiempo en utilizar metáforas para la enseñanza de todos los temas, lo cual la tiene muy contenta, pues siente que estaba llegando a alumnos que antes no la seguían, porque se dedicaba a presentar la matemática de manera muy formal.

Sin embargo, se da cuenta de que sus alumnos de dos niveles diferentes, realizan en forma errada la suma de fracciones, debido a que la metáfora utilizada en ambos casos podía confundirlos a la hora de hacer cálculos, sobre todo porque se utilizaban dos metáforas, que no necesariamente dialogan bien. Por un lado, se utiliza la representación de una fracción como una distribución de bolitas de colores de una urna, y por otro, la metáfora de *"sumar"* como *" juntar"*. En el segundo caso se utiliza la representación de fracción como "*aciertos sobre todos los intentos*" y *"sumar"* como *"juntar"*. En ambos casos las metáforas entran en conflicto.

Al final, Carmen Gloria, un poco decepcionada, no se cree capaz de llevar a cabo estas ideas con sus alumnos, pues no tiene los mismos conocimientos del profesor del postítulo.

Objetivo principal

Provocar discusión y reflexión acerca de que esta manera de calcular (sumar numeradores y denominadores) puede provenir de causas más profundas que una simple extensión abusiva de reglas de cálculo familiares en el ámbito de los enteros. Puede provenir, por ejemplo, de un conflicto de metáforas:

"1/2 *es una caja con una bolita roja y una bolita blanca": "La proporción de bolitas rojas es un medio"*, diría el hombre de la calle.

Por otra parte, *"*1/3 *es una caja con una bolita roja y dos bolitas blancas". "La proporción de rojas es ahora un tercio"*, diría el hombre de la calle.

Enseguida, *"sumar es juntar o reunir"*. Entonces el niño, junta el contenido de las dos cajas en una sola caja y obtiene... ¡5 bolitas de las cuales 2 son rojas! Esto es, 2/5. Procede de esta manera, porque la profesora lo ha estimulado a apoyarse en metáforas del tipo:

- *"Una fracción es una proporción en una población".*
- *"Una fracción es una porción".*
- *"Sumar es juntar".*
- *"Restar es quitar".*

Objetivos secundarios

1. Provocar discusión y reflexión respecto a utilizar versus no utilizar representaciones, metáforas y representaciones en y entre diferentes áreas de la matemática.
2. Provocar discusión y reflexión respecto a utilizar metodologías nuevas una vez que se está muy seguro de ellas, versus utilizar metodologías nuevas exponiéndose a errores, "arreglando la carga en el camino".
3. Provocar discusión respecto a si las fracciones son números, partes del todo, distribución de una mezcla, probabilidades, frecuencias relativas o todo eso.

Situación problemática principal

En este caso son dos las situaciones conflictivas principales, una en cada capítulo. La profesora del caso no parece estar preparada para "administrar" conflictos entre metáforas, como el que emerge espontáneamente en la primera y segunda parte.

Situación problemática secundaria

En el primer capítulo, particularmente, el niño dice explícitamente que él entiende que su solución es errónea, pero lo que no entiende es por qué su método no funciona en este caso, si la metáfora de fracciones como distribución de una mezcla le ha servido para entender las fracciones. Esta es otra situación problemática, es decir, no basta decir “tu resultado es incorrecto”, ni tampoco basta que el niño entienda que el resultado es incorrecto, sino que es necesario ponerse en los zapatos del niño y entender cuál es realmente el problema de Matías.

Recomendaciones para la conducción del caso

Es importante invitar a los participantes en el Taller a acompañar al niño en su razonamiento y tratar de rescatarlo, en lugar de decirle simplemente que su razonamiento es incorrecto y que no debe proceder así. Procediendo de esta manera podrían experimentar la diferencia entre la matemática “sabida” y la matemática a ser enseñada. Generalmente, saben lo que es correcto, pero no saben cómo ayudar a un estudiante a “verlo” o interiorizarlo, sin recurrir a fundamentación teórica ajena al nivel del educando.

Una manera de “rescatar” el uso de la metáfora que dice que las fracciones son proporciones de poblaciones, es tomar una caja de huevos para 6 unidades y depositar en sus huecos, bolitas de colores que representen las fracciones 1/2 y 1/3. Se podría depositar 6 bolitas blancas en los 6 huecos de la caja y el niño podría representar primero 1/2 reemplazando 3 bolitas blancas por 3 bolitas rojas en la caja, para luego representar 1/3 reemplazando 2 bolitas blancas por 2 bolitas rojas en la caja. Obtiene así 5 bolitas rojas y una blanca en los 6huecos.

Otra manera de hacer reflexionar al niño productivamente es darle (o sugerirle que imagine) dos porciones de plasticina del mismo tamaño, para que fabrique las dos bolitas de la primera caja con la primera, y con la segunda las tres bolitas de la segunda caja.

El segundo niño se apoya en la metáfora que dice: “Una fracción es un coeficiente de destreza: número de aciertos dividido por número de intentos”.

Hace notar, justificadamente, que si Pedro y María forman equipo y lanzan pelotas, para determinar la destreza o la *performance* del equipo hay que sumar el total de aciertos y dividirlo por el total de intentos. Como Pedro acertó 2 de 5 y María acertó 3 de 4, entonces el equipo acertó 5 de 9. En este contexto, es natural “sumar fracciones”, dice José, y no entiende por qué es ilegítimo hacerlo.

La profesora no discierne bien que sumar aciertos e intentos es legítimo en una situación como la descrita, pero que hacer esto no es simplemente "sumar fracciones" de otra manera. José parece creer que si conoce las destrezas de Pedro y María podrá pronosticar la destreza del equipo, con ayuda de su suma de fracciones.

La profesora podría ayudarlo a ver que la destreza o performance del equipo depende no solo de las destrezas individuales, sino también de cuántas pelotas lance cada integrante: si Pedro lanza 5 y María lanza 8, de las que acertará 6, la performance del equipo mejora. Sin embargo, la fracción 3/4 es la misma que la fracción 6/8.

José podría descubrir por sí mismo que si fuera el entrenador del equipo formado por Pedro y María, podría derrotar a otros equipos, como aquel formado por Luis y Carmen, aunque Luis sea más diestro que Pedro y Carmen sea más diestra que María, siempre que le asigne tirar muchas pelotas a María y pocas a Pedro, si es que el otro entrenador, torpemente, le da a tirar muchas pelotas a Luis y pocas a Carmen, que es más hábil que Luis. José puede descubrir por sí mismo que la performance del equipo no depende solo de las fracciones que dan las performances o destrezas de sus integrantes, sino que del número de pelotas que lance cada uno. En otros términos, no depende únicamente de las fracciones involucradas, sino también de "cómo estén vestidas".

La conclusión matemática que suele escapar a los estudiantes y profesores, es que el intento de definir una "suma estadística de fracciones", que corresponda a lo que uno hace en la práctica en situaciones como la descrita, es un intento fallido, porque se trata de una suma mal definida: no depende solo de las fracciones implicadas, sino de su escritura; no da lo mismo aplicarla a

$$\frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{3} \text{ que a } \frac{100}{200} \text{ y } \frac{1}{3}.$$

El principal riesgo que se debe evitar, en este caso, es que los participantes se limiten a corregir la manera de calcular de Matías y José, sin acompañarlos en su manera de calcular y ayudarlos a ver por sí mismos qué es legítimo y qué es ilegítimo (por estar "mal definido").

No es ilegítimo sumar aciertos con aciertos e intentos con intentos, pero sí lo es pretender que, de esa manera, se define una suma de fracciones, ya que ocurre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

y

$$\frac{10}{20} + \frac{1}{3} = \frac{11}{23}$$

y

$$\frac{1}{2} + \frac{10}{30} = \frac{11}{32}.$$

En este caso puede emergen la idea de probabilidad: ¿Cuán probable es que María acierte cuando lanza una pelota al cesto? ¿Cuán probable es que una pelota lanzada por el equipo formado por María y Pedro caiga en el cesto? Puede ser recomendable alentar a los estudiantes a explorar en esta dirección, si la idea aparece.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Cómo podría explicarle Carmen Gloria a Matías por qué su manera de calcular fracciones es incorrecta?
2. ¿Debiera Carmen Gloria renunciar a esta metodología, si se corre el riesgo de provocar errores conceptuales profundos en los estudiantes?
3. ¿Es ilegítimo lo que hace Matías? ¿Todo su procedimiento, o solo una parte de él?
4. ¿Es incorrecto representar fracciones por bolitas en urnas? ¿Dónde radica el problema?
5. ¿Cómo proceder de manera didácticamente fecunda y no puramente represiva?
6. ¿Qué posibles caminos abre este error? ¿Cuánto ‘partido” le podríamos sacar?
7. ¿Los errores de Matías y de José son del mismo estilo u obedecen a diferentes concepciones erradas?

Caso 8: La profecía de los tres tercios

Marcelo es un joven profesor de matemática que ejerce desde hace 4 años en el liceo Roberto Bravo Chacón. Esta institución es ampliamente reconocida en la comuna, por ser un establecimiento que muestra altos estándares de desempeño en PSU y SIMCE , aunque, también es cierto, que a él sólo ingresan alumnos con buen promedio general. Marcelo se siente muy contento con la asignación para este año, el Primero Medio C, curso de 45 alumnos, todos varones. Lo considera un desafío, pues él siempre había hecho clases en cursos diferenciados de Tercero y Cuarto Medio, y le gusta mucho trabajar con ellos. Piensa que bajar a Primero Medio le permitirá mejorar el nivel de los alumnos que llegan a los cursos diferenciados, en los que ha encontrado algunas falencias. Además, piensa que podrá interesar aún a más jóvenes a estudiar matemática con el énfasis que a él le gusta.

Conoce muy bien la materia que debe enseñar, tiene claras las secuencias de contenidos y los contextos de ellos, y es claro para explicar. Para él, la clave está en tener buenas definiciones de los conceptos matemáticos, de las propiedades y teoremas subyacentes, y que los estudiantes se comprometan con el estudio. Después de sus 4 años de ejercicio en el liceo, este profesor es reconocido por sus habilidades pedagógicas: tiene dotes de líder y logra mantener la atención de sus alumnos en clase. Tiene buena fama entre los estudiantes de cursos superiores, porque lo reconocen como alguien que sabe matemática y resuelve rápidamente los problemas de PSU que ellos traen desde el preuniversitario. De hecho, Marcelo cree que esa característica es una de las claves del respeto que le tiene el alumnado.

Era miércoles en la mañana, después del recreo de las 10, cuando Marcelo entró a la sala para comenzar su clase de matemática en el Primero Medio C. Estaban todos instalados, comenzó la clase, pero a los 10 minutos fue interrumpido por Rigoberto, que llegaba atrasado.

Rigo, como le decían sus amigos, era un muchacho moreno, con rulos y a sus catorce años, bastante desarrollado. Lo único que le interesaba realmente era el fútbol, participaba de la selección intermedia del liceo y, como tal, tuvo que viajar con sus compañeros del equipo a Puerto Montt, donde salieron campeones nacionales del torneo inter-liceos.

Marcelo estaba repasando la caracterización del conjunto de los números racionales y explicaba cómo algunos números decimales eran racionales y otros definitivamente no. Ya había establecido en la pizarra que el conjunto de los números racionales se podía representar como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \ \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

y ahora estaba diciéndoles que muchos números decimales son números racionales, en cambio otros como raíz cuadrada 2, raíz cuadrada de 3 y π no son números racionales, son irracionales.

Les contaba a sus alumnos que un número como $0,1011011101111011111101111\ldots$ no es un número racional tampoco. Cuando Rigo entra, Marcelo estaba volviendo sobre los números racionales y escribía en la pizarra

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = 0,333333 \cdots = \frac{24}{72}$$

Pidió al curso que dieran otros números iguales a $1/3$, a lo que rápidamente una alumna en la primera fila respondió $-1/-3$ y luego otro alumno dijo $-3/-9$ y $3/9$. Esta pronta respuesta por parte de los alumnos lo llenaba de satisfacción.

Entonces Rigoberto levantó la mano preguntando:

Rigoberto: *No entiendo para qué los números se escriben de tantas maneras distintas, a quién le interesa que* $1/3$ *es* $0,333333$... *o que* $256/1000$ *es cero coma dos cinco seis.*
Marcelo: (le corrige) *Doscientas cincuenta y seis milésimas, querrás decir.*

Rigoberto: *Pero, profesor, ¿por qué pasar de decimal a fracción y de fracción a decimal? Si los números se escribieran siempre de la misma forma y sin tantas igualdades, las cosas serían mucho más fáciles para nosotros...*

Todo el curso rió y Marcelo no supo bien cómo responder y manejar la situación que lo pillaba un poco de sorpresa, porque los alumnos del curso diferenciado nunca habrían preguntado algo así. Por esto se puso muy serio y continuó la clase ignorando los comentarios de Rigoberto, pero no pudo dejar de pensar que este alumno tenía un buen promedio general (de la escuela de donde provenía) y que, por lo tanto, se suponía que era un buen estudiante.

Media proporcional

En una clase posterior, Marcelo enseñaba el tema de proporciones y quería explicarles a los alumnos el concepto de media proporcional entre dos números. Les da la definición de media proporcional y la ejemplifica adecuadamente. Pero, además, piensa que tiene que relacionar este concepto con geometría, pues esta aporta una mirada distinta y enriquece el significado. Además, quiere insistir en este concepto, pues piensa que le permitirá repasar raíces. Entonces plantea el Teorema de la Altura en un triángulo rectángulo, aún cuando el contenido aparece posteriormente en el programa, y hace cuidadosamente una demostración de este, utilizando el Teorema de Pitágoras. Luego, les dice que esta demostración la van a discutir nuevamente en cursos posteriores y se concentra en el enunciado del teorema y sus consecuencias.

Después de ver algunos ejemplos, Marcelo preguntó si sería posible obtener una forma de aproximar la raíz cuadrada de un número usando el Teorema de la Altura. Les pidió que elaboraran una respuesta en grupo para calcular $\sqrt{78}$. Los grupos trabajaron y, finalmente, cada grupo le entregó su respuesta en una hoja. Con esto terminó la primera hora, momento en que les dio 10 minutos de recreo, para aprovechar de revisar las respuestas. Muy rápido pudo ver que 8 grupos estaban bien, pero 2 grupos no lograron el resultado, porque no se les ocurrió factorizar 78.

A vuelta del recreo, Marcelo explicó con detalle el método usado por los grupos exitosos, aprovechando de discutir las diferentes factorizaciones posibles de 78 y llamó a los alumnos a pensar distintas formas de hacerlo. El ideal era que estas distintas maneras no fuesen obvias, para llenar la pizarra de factorizaciones de 78, sin repeticiones. Esperó diez minutos y pudo ver cómo cumplieron rápidamente con lo pedido.

Al ver la pizarra llena de números, descubriendo solo un error, pensó secretamente: *"También en Primero Medio, y con materia de Tercero, estoy logrando que alumnos apliquen y razonen matemáticamente, soy un muy buen profesor"*.

Cinco minutos antes que sonara el timbre de recreo, Marcelo vio que Rigo estaba pensativo en su asiento. Marcelo se acercó y le preguntó:

Marcelo: *¿Cómo estuvo la clase, Rigo? ¿Entendiste la materia?*

Rigoberto: *Sí, profesor* (se queda pensando). *En realidad no estoy seguro* (sigue pensativo y ante el asombro de Marcelo, pregunta) *¿Qué significa factorizar?*

Rápidamente, Marcelo le muestra algunos ejemplos simples, le recuerda la materia de clases anteriores y le pregunta si entendió.

Rigoberto: (piensa un instante, mira hacia la puerta de la sala, donde un amigo lo llama apurado) *¡Ah, sí! Ahora entendí.*

Marcelo está contento de haber logrado hacer entender a Rigo.

La prueba coeficiente dos

Y llegó el día de la primera prueba coeficiente dos para evaluar las dos primeras unidades tratadas en clase: números y proporciones. Llegaron todos los jóvenes a dar la prueba, trabajaron muy concentrados durante una hora. Luego, Marcelo les dio una lectura sobre la sección áurea, para darse tiempo para corregir. Este es el resultado que obtuvo:

$1,0 \leq N \leq 3,5$	14 alumnos
$3,6 \leq N \leq 5,0$	17 alumnos
$5,1 \leq N \leq 7,0$	14 alumnos

Al ver el resultado se quedó muy preocupado, pues las preguntas que había puesto eran muy razonables, pensaba. Había un grupo de aproximadamente un tercio de los alumnos, que había obtenido un resultado muy insatisfactorio. En dicho grupo se encontraba Rigo. Marcelo percibió que en ese grupo, los jóvenes cometieron esencialmente los mismos errores o dejaron preguntas en blanco, denotando, según su apreciación, falta de conocimientos previos, poca dedicación al ramo y falta de concentración y perseverancia. Sonó la campana, juntó sus cosas y despidiéndose de los alumnos salió rápidamente. Tenía la tarde libre y se iría a Talca a ver a su familia, aprovechando el fin de semana largo, pues el día lunes era feriado.

Mientras esperaba el bus en el terminal, seguía preocupado por los resultados de la prueba coeficiente dos y en eso se acordó de las palabras del señor Manríquez, un profesor de matemática que conoció durante su práctica profesional y a quien nunca le tuvo aprecio. Un día el profesor Manríquez se acercó y le dijo:

"Todos ustedes jovencitos vienen con muchos ideales, pero la realidad es otra. Aquí se da la vieja teoría de los tres tercios: El primer tercio está constituido por los buenos alumnos, interesados, hábiles e inteligentes. El segundo tercio entiende un poco, se esfuerza aunque le cuesta. Y el tercer tercio... el tercer tercio, allí no se puede lograr nada, ni aunque lo intentes, siempre te vas a encontrar con que no entienden nada, con ellos no hay nada que hacer".

En dicha oportunidad a Marcelo le molestó este profesor tan negativo, pero hoy, al recordar sus palabras pensaba: *"¿No será cierta dicha teoría?"*... En ese momento lo llamaron a abordar el bus.

Guía para el facilitador

Introducción

El caso muestra una creencia que existe entre algunos docentes, que consiste en que hay estudiantes que nunca aprenderán matemática, por más esfuerzos que se hagan. Esta creencia influye en la manera en que el profesor o profesora gestiona su clase, y la manera en que se relaciona con los estudiantes. Esto ha sido observado por los investigadores del proyecto en varias instancias; por ejemplo, en los cursos de perfeccionamiento se suelen escuchar frases del tipo: "yo hago la clase para los avanzados, y el resto que se suba a la micro como pueda", "yo hago la clase para el estudiante promedio, porque el de arriba no me necesita, y con el de abajo ya no hay nada que hacer". Este caso presenta este conflicto, es decir, propone la discusión entre los profesores que creen que hay estudiantes que nunca aprenderán matemática, versus los profesores que creen que todos pueden aprender, pero de diferentes formas, aproximaciones, metáforas, etc.

Resumen

Marcelo es un profesor que tiene experiencia en enseñar en un curso diferenciado de Tercero y Cuarto Medio, curso que por naturaleza lo conforman alumnos con interés especial por la matemática. Él se considera un buen profesor. En su incursión a Primero Medio cree estar haciéndolo muy bien en su labor pedagógica, pero sus errores quedan en evidencia al ver los resultados del primer control coeficiente 2, que muestra que casi un tercio del curso no ha entendido nada. Un representante de este tercio es Rigoberto, un joven inteligente, que solo se interesa por el fútbol, alumno que personifica un tercio que es ignorado por el profesor hasta este momento.

Objetivo principal

El objetivo principal es provocar discusión y reflexión acerca de si la profecía de los tres tercios es cierta. ¿Será acaso cierto que existen alumnos que nunca podrán desarrollar habilidades matemáticas, independiente del profesor, del contexto, de las metodología, etc.? También, respecto a cómo estas creencias de los docentes afectan en la manera en que ellos gestionan su clase y el aprendizaje.

Objetivos secundarios

1. Provocar discusión y reflexión acerca de la práctica docente del profesor del caso, de su evaluación y de lo que entiende él por 'importante' a la hora de conducir el aprendizaje. ¿Cómo no se dio cuenta antes de la prueba coeficiente dos que había un grupo grande de estudiantes que no estaba entendiendo nada?

2. Provocar discusión respecto a los contenidos tratados por el profesor en Primero Medio. ¿Cuál es el interés y la importancia de tratar temas de Tercero en un Primero Medio? ¿Cuándo hacerlo? ¿Para qué?

Situación problemática principal

La problemática principal está centrada en el conflicto interior de Marcelo; por un lado está la posición "En cada curso existe un grupo que no es capaz de aprender matemática" versus "Todos los alumnos tienen capacidad para aprender, pero tienen una forma propia de aproximarse a la matemática". El profesor toma en cuenta el punto de vista de los estudiantes, busca entender el origen de sus inquietudes versus ese profesor que ignora a los alumnos que no entienden y se queda contento con respuestas superficiales como: *ya entendí.*

Marcelo se encuentra en la disyuntiva de aceptar que un tercio de los alumnos no tiene posibilidades de aprender matemática, y seguir los consejos del señor Manríquez, o buscar la forma de incorporar a esos alumnos, escucharlos y entender cómo piensan para buscar estrategias que le permitan desarrollar habilidades matemáticas en todos sus estudiantes.

Situaciones problemáticas secundarias

El profesor atribuye a los alumnos los malos resultados. Según él, carecen de conocimientos previos, no se dedican al ramo y les falta concentración y perseverancia. Sin embargo, no cuestiona su estrategia para aproximarse a los alumnos que no siguen su manera de conducir la clase.

Además, utiliza contenidos de otros cursos, de acuerdo al programa oficial de Ministerio de Educación, para conectarlos con la materia que está en discusión, según lo que él considera más adecuado.

Recomendaciones para la conducción del caso

Se sugiere invitar a los futuros profesores a recordar a sus propios maestros, no necesariamente de matemática, siendo muy probable que aparezcan experiencias satisfactorias.

Una dificultad que puede aparecer, es que los futuros profesores se abanderen rápidamente con una posición de apoyo a la idea de que "todos pueden aprender matemática", pero que no tengan ninguna idea de cómo llevarlo a la práctica. Aquí pueden surgir ideas un tanto "poéticas" de hacer participar a todos.

Se sugiere presentar un tópico matemático, por ejemplo, invitar a responder la pregunta: ¿por qué la raíz de 2 es irracional?, e invitar a dar varias explicaciones a diferentes estudiantes. Estas explicaciones deben ser esencialmente distintas, pensando en diferentes estudiantes. Una buena idea es hacer una dramatización de un profesor demostrando la irracionalidad de raíz de 2 y un alumno que no entiende la demostración; en este caso en particular, la reducción al absurdo es difícil de entender para estudiantes secundarios.

La idea es que si un estudiante no entendió la primera explicación, se le pueda dar otra, usando diferentes representaciones de la primera. Esto hará ver que el problema es muy difícil de solucionar, y es posible que algunos futuros profesores, honestamente, tiendan a argumentar a favor de hacer una clase estándar y el que no entendió, tendrá que arreglárselas como pueda, y así hacer surgir una discusión más profunda.

Otra idea a abordar es acerca del sentido de contar como dato anecdótico que ciertos números son irracionales, por ejemplo , si a este nivel no se puede dar una demostración de ese hecho. Lo mismo con $0,1011011101111011111\ldots$ Es importante discutir de cómo ellos, los estudiantes de pedagogía, demuestran esos resultados o que es irracional, o que la raíz de un entero positivo no cuadrado es un número irracional.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Marcelo se hace cargo de los malos resultados de los estudiantes?
2. Las expectativas que tienen los profesores de matemática respecto a sus alumnos, ¿afectan los procesos de enseñanza y aprendizaje?
3. Desde la perspectiva del profesor Manríquez, ¿es posible que un alumno sea dedicado, responsable, ponga atención en clase y así y todo no le vaya bien en matemáticas?
4. ¿Por qué cree usted que el profesor Manríquez delega toda la responsabilidad de los malos resultados en los alumnos? ¿Por qué Marcelo creía que lo estaba haciendo bien?
5. ¿Por qué Marcelo ahora duda respecto a las percepciones del profesor Manríquez?
6. ¿Cómo motivar a los alumnos que hasta ahora no han obtenido buenos resultados en matemáticas y se sienten frustrados con la asignatura? ¿Cómo se motiva a Rigoberto?
7. ¿Cómo contestar a la pregunta de Rigoberto sobre las distintas representaciones de los números?
8. ¿Considera acertado introducir el Teorema de la Altura para ilustrar la media proporcional?
9. ¿Por qué cree usted que los dos grupos fallaron en dar una respuesta a la pregunta del profesor?

10. ¿Le parece posible que los estudiantes de Primero Medio inventen una demostración del Teorema de la Altura?
11. ¿Es posible que los estudiantes de Primero Medio entiendan una demostración del Teorema de la Altura?

Caso 9: El problema de un problema

Ana Cecilia, la profesora de matemática del Segundo A del liceo de hombres de nuestra ciudad, es muy responsable y suele preparar sus clases, aunque las haya hecho varias veces antes. Por eso, es poco dada a aceptar los pocos errores que ella comete y a tolerar los ajenos. Más de algún problema con sus colegas le ha traído esta actitud, pero al final del día, todos aprecian los materiales didácticos o guías que prepara con meticulosa dedicación. Esta semana se acaba de estrenar una nueva guía de sistemas de ecuaciones que se utilizará en los tres segundos medios y en la que Ana Cecilia incluyó interesantes problemas contextualizados, de su propia creación.

Ana Cecilia empezó con su tercera clase como cualquier día, para luego seguir con un breve repaso de la clase anterior; mientras lo hacía, reforzó los contenidos referidos a métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, extendiéndose un poco en las aplicaciones y la relevancia que este tema matemático tenía. Señaló que el propósito de la clase sería resolver problemas de aplicación y desarrolló en la pizarra un problema muy parecido al problema 1 de la guía, que resolvió ordenadamente para que los alumnos tuviesen un modelo de resolución.

Habiéndose asegurado que todos entendieron su desarrollo, repartió la guía y les pidió que trabajaran en el primer problema:

Un curso ha reunido $ 37.500 para comprar las bebidas que llevarán en la próxima salida a terreno que harán en clase de biología. Hay dos tipos de bebidas del gusto de los estudiantes: jugos de ? litro a $750 c/u y gaseosas de 1/3 litro a $500 c/u. Si se acordó que solo se llevarán 25 litros en total entre jugos y bebidas, ¿cuántas bebidas y cuántos jugos deberá comprar la Directiva del Microcentro?

El problema de la clase... crece y crece

Mientras los alumnos trabajaban y discutían en grupo, ella paseaba por los bancos asesorándolos y controlando la disciplina. No había transcurrido mucho tiempo, cuando se hizo evidente que había mucha bulla producto de la discusión entre los alumnos. Su alarma inicial creció cuando empezaron a dirigirle preguntas tales como: *"Profesora,¿está bueno el problema? Profesora, el problema tiene algo raro. Profesora, ¿es obligación resolverlo por sistema de ecuaciones?* Esta última pregunta terminó por exasperarla, pues de qué otra forma lo resolverían, era obvio que ella no consideraba poner más que buenos problemas en una guía.

Tardó en aceptar que había una dificultad no presupuestada en el problema. Incluso los buenos alumnos reclamaban, pues parecía no haber solución. Ana Cecilia, molesta y desconcentrada, los sermoneaba diciendo que debían leer comprensivamente y no solo mirar los enunciados, recordándoles que al inicio les dijo claramente que una de las mayores dificultades que tenía la resolución de problemas, era que no leían bien y por eso ella les había leído detenidamente el problema. Sin embargo, no lograba descubrir el origen de la confusión, pues ese problema ya lo había hecho antes y recordaba muy bien la solución; pero no la había llevado escrita a la sala ese día, y era tan simple, con $x = y = ...$ El desorden seguía en la sala debido a que varios alumnos habían obtenido distintas soluciones y argumentaban su validez. Luis, un alumno generalmente altanero, respondió, a sus insistentes consejos de que leyeran bien, que mejor sería que ella escribiera bien los problemas. Consecuencia, Luis es anotado y mandado al inspector de piso.

Mario y José, alumnos que según la profesora eran del montón, discutían apasionadamente en la pizarra, pues habían probado con dos alternativas distintas que parecían resolver el problema, lo que no convencía a los alumnos más ordenados y con buenos promedios en matemática que, mayoritariamente, seguían insistiendo en que el problema estaba mal redactado.

Andrés: (uno de los mejores alumnos) *Bien raro su problema señorita, pues las soluciones de Mario y José están correctas, y eso no puede ocurrir en matemáticas, usted misma nos dice siempre que la matemática es una ciencia exacta".*

Según Mario, con 40 de las bebidas de $750 y 15 de las de $500 se gastaba justo la plata y ocupaban justo los 25 litros. Según José en cambio, esto mismo se conseguía con 30 de cada tipo. Ninguno de los dos mostraba más argumentos que el de hacer los cálculos con estos números y comprobar que todo cuadraba, y ni asomo de sistemas de ecuaciones. Ana Cecilia recordó que su solución era precisamente la de José y por lo tanto pidió a Mario que explicara cómo había llegado a esos números. Con todo desparpajo Mario respondió que fue probando cantidades, exactamente como hubiera hecho de haber estado a cargo de realizar la compra. Para peor, José se apresuró a contestar lo mismo, sin que nadie se lo preguntara. La profesora insistió, con un dejo de sorna : ¿Y así, del cielo te cayeron exactamente esos dos números?

Mario: (muy seguro) *Como prefiero los jugos y además sé que son más caros, quise asegurarme que compraran hartos jugos y pensé ¿alcanzará para comprar 40 jugos sin gastarse toda la plata? Multipliqué 40 por los $750 y me dio $30.000,* *por lo que sobraban $7.500, que alcanza justo para 15 bebidas de $500."*

Ana Cecilia: (lo interrumpe, convencida de haber encontrado el error al que llevaba ese razonamiento tan silvestre y alejado de sus enseñanzas) *Pero Mario, el problema tiene dos restricciones: el dinero y los litros. Tú claramente olvidaste considerar la segunda condición, lo que no es de extrañar si no utilizas ningún método para enfrentar el problema".*

Mario: *Mire profesora, parece que tuve suerte, pero el caso es que cuando José trató de convencerme con su solución, probamos la mía también para los litros y fíjese que* $1/2$ *por* $40 + 1/3$ *por* 15 *da justo los* 25 *litros que dice el problema. Pura suerte, pero la suerte también es importante ¿no?".*

Hasta aplausos recibió Mario de un curso que solidarizaba con él, tanto como rechazaban la actitud de la profesora, que parecía haber estado buscando que Mario se equivocara.

Ana Cecilia no podía sentirse peor y más confundida. Sabía que la respuesta que ella calculó era 30 bebidas y 30 jugos; sus alumnos, que utilizaban los métodos que ella les enseñó, no habían llegado a ninguna solución; los que obtenían soluciones lo hacían sin ningún método y, además, estas soluciones eran diversas.

La profesora había visto que Andrés había seguido trabajando mientras Mario explicaba, y le preguntó si tenía algo que aportar.

Andrés: *Muchas más soluciones (fue la increíble respuesta de Andrés). Mire profesora, con 50 bebidas de $500 y ningún jugo resulta todo igual de bien que con 48 bebidas de $500 y 3 jugos o con 46 bebidas de 500 y 6 jugo... podría hacer una tabla de soluciones alternativas".*

Ana Cecilia: (tratando de no perder el aplomo) *¿Pero por qué con tablas y no con ecuaciones?*

Andrés: *Es que con las ecuaciones pasaba algo raro que no supe manejar, confesó Andrés.*

Perpleja, Ana Cecilia, decidió que mejor siguieran con otra parte de la guía, solo de resolución de sistemas, sin ningún contexto, lo que de hecho muchos alumnos ya estaban haciendo.

Cuando finalmente sonó el timbre, Andrés se acercó a contarle su método para generar soluciones y a plantearle su confusión respecto del sistema de ecuaciones y la reducción. La profesora no quería discutir este tema, hasta no ver su propia resolución del problema, por lo que respondió amablemente a Andrés asegurándole que la próxima clase se despejarían todas las dudas.

El problema de la profesora

Tan pronto tuvo una hora libre se dirigió a su casillero, donde de inmediato encontró sus cálculos con el sistema:

$$750x + 500y = 37{,}500$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 25$$

cuya solución es $x = y = 30$ (como decía José) y de ningún modo lo argumentado por Mario.

No tardó mucho en descubrir que en la trascripción que hizo para sus alumnos había confundido los volúmenes (los jugos eran de 1/3 litro y no las gaseosas). Pero el alivio que sintió al encontrar esta explicación, no le duró casi nada. En ese instante se acercó una colega de matemática que inmediatamente identificó el problema, diciéndole que el problema estaba mal redactado, "en el Segundo B tuvimos que modificarle los datos para que no se eliminaran las incógnitas, y con eso quedamos listos, aunque los resultados los dieron totalmente fuera de contexto".

Ana Cecilia reaccionó molesta y sorprendida: "¿Por qué no me dijiste nada? Tú sabes cuánto me preocupo de poner buenos problemas." Sin mostrar preocupación, la colega se defiende: "¿Estás consciente de cómo reaccionas tú cuando hacemos un comentario respecto a tu material? Acuérdate de la guía anterior. No puedes pedirme que pase de nuevo por eso".

Ana Cecilia estaba realmente desanimada, pensando que definitivamente este era su día de mala suerte. En una breve mañana había pasado cuanta cosa mala se podía uno imaginar: se equivocó con el problema de entrada de la guía, el curso se manifestaba en su contra, no tenía explicación para la multiplicidad de soluciones que aparecían ni en la relación de estas con el contexto, ni de este hecho con el hecho de que se eliminaran incógnitas, no sabía qué sentido darle a la "modelación" con sistemas de ecuaciones que ella fomentaba y, finalmente, una colega la acusaba de intratable...

Absorta en estos pensamientos no escuchó el timbre del recreo ni vio entrar a Susana, su colega del Segundo C, quien se le acerca feliz, diciendo: “Excelente el primer problema de tu guía Anita, pues me permitió hacer una excelente clase a partir de las diferentes respuestas y procedimientos utilizados por ellos, fue genial, aunque un poco de ruido y bulla al principio, pero después se dedicaron a trabajar con diferentes estrategias y valoraron la formalización como sistema de ecuaciones”. Tímidamente, Ana Cecilia pregunta si no cambió los datos, aprovechando la presencia de la colega que había hecho tal cosa. A lo que Susana respondió: “Para qué, si estaba perfecto para mostrar sistemas de ecuaciones con soluciones múltiples, que es lo que nunca hacemos, a pesar de que en la vida esa es una situación frecuente y que también podemos modelar”.

Anita no pudo dejar de pensar que eso sí que era pura suerte y que Mario tenía razón al valorar su importancia. Conversaría con Susana para preparar la segunda clase sobre el mismo problema, pero ahora con el método de ella.

Guía para el facilitador

Introducción

Con este caso se abordan dos problemas importantes y frecuentes de la enseñanza de la matemática. Por una parte, se cuestiona cierta tendencia a presentar problemas contextualizados con el único propósito de que los alumnos apliquen métodos aprendidos, desperdiciando la oportunidad de que ellos modelen y ensayen métodos alternativos de representación, de resolución y de análisis. Así, se expone a los estudiantes solo a problemas "prototípicos", que limitan sus posibilidades de adquirir destrezas propias de la resolución de problemas.

Por otra parte, se enfrenta la costumbre de proponer y resolver solo problemas de solución única, reduciendo el análisis y la búsqueda de soluciones al simple cálculo de "la solución". Esto es particularmente evidente en el caso de sistemas lineales donde, de manera muy natural, el conjunto solución puede ser vacío o contener multiplicidad de soluciones. El análisis de tales posibilidades es completamente infrecuente en la práctica escolar, reduciendo la matemática a procedimientos de cálculos rutinarios y ausencia de análisis.

La reducción de conceptos matemáticos a presentaciones "prototípicas" es un problema frecuente en varias ramas de la matemática escolar (por ejemplo, en el caso de figuras geométricas), lo que limita la comprensión de la generalidad abarcada por un concepto.

Resumen

La profesora Ana Cecilia Rojas propone una guía de problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2 x 2 a sus alumnos, en la que ha incorporado problemas contextualizados, para desarrollar en ellos la capacidad de modelar matemáticamente.

El primero de esos problemas tiene un error de trascripción:

En lugar de:	se imprimió:
1) $\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + fy &= e \end{aligned}$	2) $\begin{aligned} ax + by &= c \\ fx + dy &= e \end{aligned}$

Las constantes son tales, que el sistema 1) tiene solución única, mientras que el sistema que los alumnos recibieron tiene multiplicidad de soluciones (infinitas, si no fuera por el contexto que reduce los casos con sentido). Como la profesora no está preparada para esta alternativa, es sorprendida por el razonamiento de los alumnos. La profesora había ideado una contextualización forzada, apropiada a su interés de practicar los métodos de resolución de sistemas lineales enseñados por ella. Por el contrario, el error de trascripción permitió la aparición de un problema que podía enfrentarse a través de distintas estrategias, y que los alumnos podían desarrollar por sí mismos.

Objetivo principal

Exponer a los estudiantes de pedagogía a la necesidad de discutir y reflexionar todas las alternativas de solución de un sistema lineal (solución única, sin solución, multiplicidad de soluciones), evitando la reducción a un problema prototípico que limita la generalidad abarcada por el modelo de sistema lineal y reduce la matemática a cálculos rutinarios, en desmedro del análisis.

Objetivos secundarios

1. Discutir y reflexionar acerca del real valor de las "contextualizaciones".
2. Comparar el valor pedagógico de realizar cálculos rutinarios aplicados a situaciones construidas con ese fin, motivar la búsqueda de estrategias, el análisis y la discusión de soluciones.

Situación problemática principal

La situación problemática principal se produce por la dificultad de la profesora para encauzar una actividad matemática de sus alumnos, justamente cuando esta tiene un mayor potencial en la enseñanza.

Este problema se produce por dos causas visibles. Por una parte, hay un problema en la planificación y preparación de la clase. Esto no solo se observa por el problema de trascripción y falta de prolijidad, sino por la presentación de un problema con contextualización forzada, con una finalidad reducida a la simple aplicación de un único método de cálculo que en realidad permitía variadas estrategias de solución, no previstas por la profesora.

Por otra parte, las dificultades de la profesora para abordar el problema del sistema lineal con multiplicidad de soluciones, sugiere una debilidad de ella en el ámbito de la matemática involucrada. Esta debilidad corresponde al tipo de ignorancia por desuso: con toda seguridad, esta profesora aprendió a analizar soluciones de sistemas lineales durante su formación inicial; como sucede con frecuencia, una práctica de aula limitada a casos prototípicos y la falta de vinculación de la matemática universitaria con la matemática escolar, la ha llevado a olvidar algunos aspectos fundamentales.

Situaciones problemáticas secundarias

Otra situación problemática que aparece es que, por una parte, los alumnos están tan acostumbrados a resolver problemas de solución única, que cuando aparece uno distinto, sospechan que el problema está mal planteado. Sin embargo, pese a esta costumbre, hay alumnos que avanzan a solucionar el problema con sus propias herramientas.

Otra situación problemática aparece cuando la profesora, al no reconocer entre las respuestas de los alumnos la que ella tenía preestablecida, en vez de ponerse en los zapatos de los alumnos y tratar de entender sus estrategias y soluciones, se empecina en tratar de encontrar errores y sermonearlos.

Recomendaciones para la conducción del caso

Es necesario pedir a los estudiantes que consideren la situación planteada en la clase. Se requiere dar respuesta a las inquietudes concretas manifestadas por los alumnos y llevarlos a analizar a partir de las soluciones que obtuvieron. Para ello se recomienda pedir respuestas y propuestas concretas en situaciones específicas de la clase. Por ejemplo: ¿Cómo le responderías a Mario que, sin método y por medio de la suerte, encontró una solución? ¿Cómo lo convencerías de la necesidad de algún método? ¿Qué le dirías a Andrés respecto de su método?

Otro tipo de preguntas se relaciona con la metodología apropiada para trabajar este problema en el colegio: ¿Es mejor permitirles discutir en grupo o pedir un trabajo individual? ¿En algún momento les mostrarías que las dos ecuaciones dicen lo mismo y que, por lo tanto, una sobra pues no agrega nada? Si decides no decirlo tú, ¿cómo los ayudarías a descubrirlo? ¿Crees que es mejor evitar las contextualizaciones en esta materia, para evitar perder el tiempo en explicaciones excesivas como las que enfrentará la profesora? ¿Se pierde el foco?

Los objetivos de este caso se alcanzarán si se lleva a los estudiantes de pedagogía a proponer intervenciones de la profesora (matemáticamente relevantes) para conducir el análisis matemático de los alumnos que están trabajando y descubriendo soluciones. Para incentivarlos en este camino se les puede pedir que recuerden lo que ellos saben de sus cursos universitarios respecto de sistemas lineales: conjunto solución de un sistema lineal, distintas representaciones para sistemas de 2×2, representaciones gráficas de las soluciones de sistemas de 2×2. Es importante pedirles que propongan cómo la profesora puede utilizar el método de cálculo para enfrentar la posibilidad de aparición de casos como el presentado, vinculando fórmulas y procesos automáticos con el análisis de posibles alternativas para el conjunto solución.

Otra contribución en este sentido, es pedirles que propongan estrategias de solución distintas a las de resolver un sistema lineal, para resolver el problema original, como era antes del error de trascripción.

Para hacer reflexionar sobre el riesgo de limitar los conceptos a presentaciones “prototípicas”, se puede pedir explicar por qué los niños de enseñanza básica confunden un cuadrado de lados no paralelos a los bordes de la pizarra con un rombo, no reconociéndolo como cuadrado. Pedirles vincular ese problema de la enseñanza de la matemática con el problema de reducir la presentación de los sistemas lineales a aquellos de solución única.

Dependiendo de la distancia a la que estén los alumnos de pedagogía de un curso de Álgebra Lineal, puede estar totalmente olvidada la matemática involucrada, lo que puede complicar la discusión, ya sea por ausencia o pobreza de argumentos, o porque el repaso de la matemática ocupe todo el tiempo destinado a la discusión.

Otro posible riesgo es criticar el proceder de la profesora solo desde el punto de vista metodológico (sus errores son evidentes), sin vincular este aspecto con el dominio del contenido.

También, podría ocurrir que el debate se centrara en torno al problema del clima del aula, la disciplina, la autoridad de la profesora, sin considerar el problema de la enseñanza y su contenido. Este tema está presentado en el caso como un conflicto importante de abordar, pero su riqueza mayor se alcanza vinculando el dominio de la situación de aula, que se produce con una buena planificación previa, y con un buen respaldo de dominio del contenido disciplinar involucrado.

Finalmente, se hace ver el riesgo de trivializar un conflicto secundario relacionado con las relaciones entre colegas. Es evidente que la profesora no ha manejado bien ese tema, pero las relaciones entre docentes de matemática suelen ser competitivas y la colaboración es complicada cuando interfiere diversos dominios de los contenidos disciplinares. Se sugiere evitar profundizar en este aspecto, como sería proponer posibles modos alternativos de actuar de la profesora. Es preferible concentrarse en los problemas de la enseñanza y del contenido y dejar este tema solo a nivel de enunciado o constatación.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Actuó bien Ana Cecilia al imponer la disciplina y postergar la discusión del problema para la siguiente clase? ¿Qué otras alternativas tenía? ¿De qué depende la existencia de tales alternativas?
2. Con mayor cuidado y mejor preparación de la clase, ¿puedes asegurarte de que nunca te pase una situación como la que enfrentó Ana Cecilia? ¿Puedes

explicitar esa “buena preparación” y cuánto abarca? ¿Se logra en corto plazo? ¿Cómo?

3. ¿Cómo le responderías a Mario que, sin método y por medio de la suerte, encontró una solución? ¿Cómo lo convencerías de la necesidad de algún método? ¿Qué le dirías a Andrés respecto de su método?
4. ¿En algún momento les mostrarías que las dos ecuaciones

$$750x + 500y = 37{,}500 \qquad \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 25$$

dicen lo mismo y que, por lo tanto, una sobra pues no agrega nada? Si decides no decirlo tú, ¿cómo los ayudarías a descubrirlo?
5. ¿Crees que es mejor evitar las contextualizaciones en esta materia, para evitar perder el tiempo en explicaciones excesivas, como las que enfrentará la profesora? ¿Se pierde el foco?

Caso 10: ¿Y con el puro gráfico no basta?

Patricia es una profesora de matemática de un colegio particular, en el que ha echado raíces después de 20 de trabajo duro. Si bien hay muchas cosas que no le agradan, la tarea de educar la realiza con mucho cariño, y pareciera que el resto de las actividades escolares no existieran cuando ella está enseñando, compartiendo o discutiendo con sus alumnos.

Ella siempre dice que está formando personas íntegras, que antes que profesora de matemática es profesora, así a secas, y la llena de orgullo que sus ex alumnos la recuerden, la visiten y la saluden con cariño cuando se la encuentran en el barrio.

Si bien no es muy partidaria de la reforma curricular, no la niega por completo, y siempre que encuentra algo positivo en ella, lo lleva a cabo. Por lo general, siempre está abierta a las nuevas propuestas, y si le hacen sentido intenta implementarlas. Para ella saber cómo enseñar es más importante que el qué enseñar, por eso siempre está leyendo e investigando acerca de nuevas metodologías y nuevas herramientas de enseñanza, más que de los conocimientos propios de su asignatura: *"La matemática escolar es la misma desde hace un montón de años, ¿qué de nuevo debo aprender?"*, suele ser su argumento.

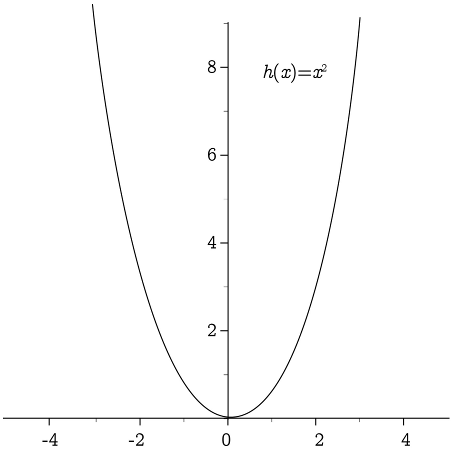
En este año se encuentra tratando uno de los temas que siempre le ha intrigado, desde que era estudiante: las funciones. A ella siempre le ha parecido un tema complicado y ha utilizado varias maneras de abordarlas: verlas como máquinas transformadoras, como fórmulas algebraicas, como relaciones del producto cartesiano (a la Bourbaki), como tablas de doble entrada, con software para obtener gráficos, etc. Lo ha probado todo y motiva a los estudiantes a que utilicen el formato que más les acomode personalmente. Su experiencia de todos estos años le ha mostrado que la determinación del dominio de una función, permite enlazar habilidades algebraicas, numéricas y gráficas.

Para el curso de Tercero Medio en que se encuentra en este momento, diseñó su unidad de funciones reales con mucho cuidado, incorporando ejercicios elementales, de tal manera que los alumnos comprendan realmente este concepto, lo que hasta ahora le está dando muy buenos resultados.

El trabajo previo

Antes de comenzar con el estudio de la función raíz cuadrada, ella recordó algunos resultados de la función cuadrática.

Recordó que la función real, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^2$, tiene un gráfico, como el que se muestra abajo.



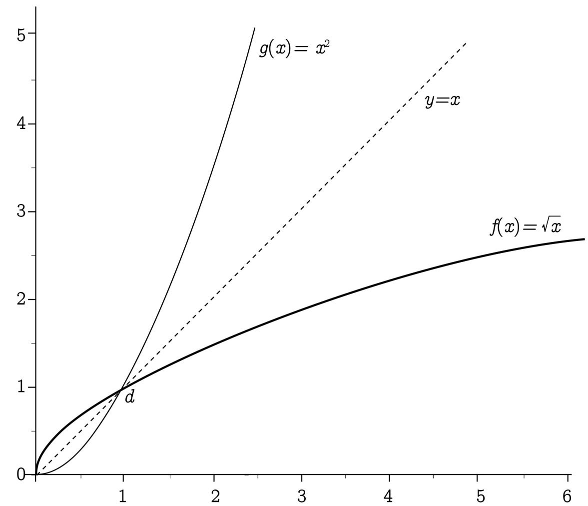
Los estudiantes, guiados por las actividades de Patricia, descubrieron que esta función no puede tener inversa, pues todo elemento de la imagen, salvo el cero, tiene dos pre imágenes. Esto se evidenció cuando construyeron una tabla con algunos valores de x y los $y = h(x)$ correspondientes:

x	0	1	-1	2	-2	3	3
y	0	1	1	4	4	9	9

También descubrieron que restringiendo el conjunto de salida y el conjunto de llegada, se puede tener una inversa, por ejemplo: $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $g(x) = x^2$, sí tiene inversa.

Mediante un trabajo lento, muy guiado, con apoyo de software y mediante muchos ejemplos que Patricia preparó, los estudiantes descubrieron que el gráfico de la función inversa g^{-1} , resulta de reflejar el brazo derecho de la parábola de arriba, respecto a la diagonal $\{(x, y) \ / \ y = x\}$. Una de las actividades que dio muy buenos resultados fue la siguiente: una vez graficado el brazo derecho de la parábola $y = x^2$, doblar la hoja de papel sobre la diagonal, y luego calcar la parábola en la otra mitad de la hoja, para así obtener el gráfico de la inversa.

Por lo tanto, el gráfico de la función raíz cuadrada $f = g^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, (definida por $f(x) = \sqrt{x}$ si y solo si $g(\sqrt{x}) = x$) es:



La profesora logra que los estudiantes descubran que el menor valor de x, produce el menor valor de $f(x)$. Para asegurar los aprendizajes, posteriomente, la profesora trabaja con los alumnos: $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, y les pide encontrar D máximo, que permite que f sea función. Los alumnos responden bastante bien a las exigencias de Patricia, y para aquel D los estudiantes también encuentran el recorrido de f.

Con estas condiciones, Patricia piensa que está todo dado para profundizar los conceptos de dominio y recorrido y espera llegar más lejos en la próxima clase

La clase

Patricia llega a clases muy entusiasmada por el excelente trabajo que los alumnos habían realizado anteriormente. Como ya había definido la función raíz cuadrada, quiere aprovechar la ocasión para desarrollar habilidades algebraicas en los estudiantes, trabajando actividades relacionadas con encontrar dominios de funciones.

Patricia les pide que trabajen en grupo, para encontrar el dominio y recorrido de:

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+1} \tag{1}$$

Luego, llega el momento en que cada uno de los grupos debe exponer su trabajo para ser analizado en la clase, estrategia metodológica que Patricia está utilizando con éxito desde hace algún tiempo.

El grupo de Fernando, quien siempre se ha caracterizado por ser un alumno muy ordenado y destacado en el trabajo algebraico, se ofrece para ser el primero en exponer.

Fernando: (iniciando la presentación) *Bueno, compañeros, lo primero que hicimos fue calcular el dominio. Como lo que está en la raíz debe ser positivo, entonces:*

$$x + 1 \leq 0$$

y nos queda que:

$$x \leq -1$$

Entonces, el dominio son todos los números reales desde el "menos uno en adelante" (moviendo la mano derecha desde un punto fijo hacia la derecha), lo que escribimos como:

$$[-1, +\infty[$$

Ahora, para determinar el recorrido, denotamos $f(x) = y$ luego, reemplazamos en (1) y despejamos la raíz:

$$y - 2 = \sqrt{x + 1} \tag{2}$$

Después, elevamos al cuadrado en ambos lados, y nos quedó:

$$(y - 2)^2 = x + 1$$

Desarrollando el cuadrado del binomio nos da:

$$y^2 - 4y + 4 = x + 1$$

y despejando la "x", queda:

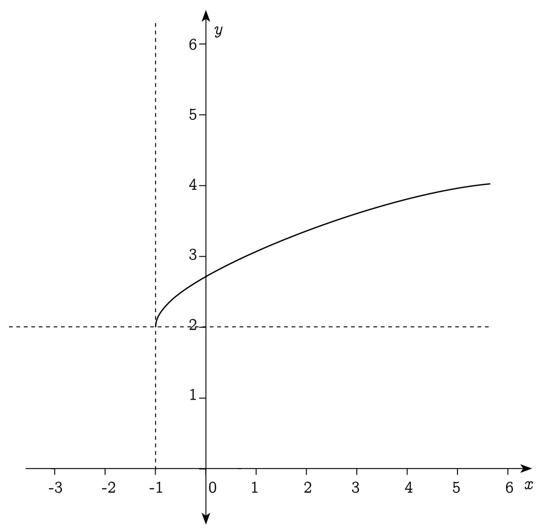
$$x = y^2 - 4y + 3$$

Y, como ustedes pueden ver, no hay restricciones para la "y ", entonces, nuestro recorrido sería el conjunto de todos los reales.

Patricia felicita a Fernando y su grupo, aunque no da ninguna muestra de estar de acuerdo o no con el trabajo expuesto. Pide a los otros grupos que muestren su trabajo, en el caso que sea distinto al de Fernando.

Toma la palabra Arturo, reconocido por su profesora como muy creativo y que está muy motivado por el trabajo que están haciendo.

Arturo: *Profesora, nosotros llegamos a ese mismo dominio pero nos da otro resultado en el recorrido,* (tras una venia de la profesora, Arturo continúa) *nosotros lo vimos haciendo la gráfica de la función. Para eso nosotros, recordamos el gráfico de la función raíz de* x *, luego la trasladamos una unidad hacia la izquierda y obtuvimos la gráfica de raíz de* x *más* 1*. Para finalizar trasladamos la gráfica anterior, 2 unidades hacia arriba, para obtener la gráfica de* f*.*



Por lo tanto, el recorrido es el conjunto de todos los números mayores o iguales a 2*.*

Patricia felicita a Arturo y a su grupo, y lo invita a comprobar su resultado algebraicamente.

Arturo: *Nosotros intentamos un argumento algebraico para justificar nuestro resultado, haciendo lo que usted nos enseñó en clases anteriores y llegamos a lo mismo que hizo Fernando. Después de un rato, nos fijamos que si ponemos* $y = 0$ *en esa ecuación (apunta la ecuación (2) que está escrita en la pizarra), nos queda* $-2 = \sqrt{x+1}$ *, lo cual no tiene sentido, pues el número de la derecha no es negativo. Por eso nos quedamos con que el recorrido es* $[2, \infty)$ *. Pero no sabemos bien dónde está el error en el argumento algebraico.*

Profesora: *A ver...* (al curso), *¿qué opinan ustedes?, ¿están de acuerdo con Arturo? El recorrido es uno solo y en alguna parte hay un error.*

Fernando: *No, profesora, no hay ningún error, nosotros lo hicimos como usted nos dijo, y la solución algebraica no falla nunca.*

Arturo: *Pero, Fernando, recuerda que en las clases anteriores vimos que el menor valor de las x produce el menor valor de las imágenes. Como el menor valor de las x es -1, como tú mismo dijiste, el menor valor de las imágenes es $f(-1) = 2$. Mira la gráfica que nosotros hicimos y te puedes dar cuenta que tienes un error. Colócale valores a x y te darás cuenta que, si el dominio es del menos 1 en adelante, entonces no puede ser todos los reales el recorrido.*

Profesora: *El argumento de Arturo es contundente, el valor $y = 0$ no es la imagen de nadie. Pensemos en el problema, revisen sus resultados y argumentos y seguimos con la discusión la próxima clase. Entréguenme sus informes para revisarlos.*

Patricia se va para su casa, con los informes en la carpeta, ansiosa por leer los argumentos.

Fernando camino a su casa piensa *"tal vez lo que hizo la profe en los ejemplos anteriores no se aplica en todos los casos, tal vez no puedo pasar restando en las funciones como se hace en las ecuaciones, o tal vez no es llegar y elevar al cuadrado. Arturo parece que está en lo correcto, es importante hacer la gráfica, y eso que yo tengo mejores notas que él..."*.

Guía Para el facilitador

Introducción

El caso plantea el tema de las funciones, particularmente la función cuadrática y raíz cuadrada. Introduce temas de dominio, recorrido e inversa, que si bien no está explícitamente en el actual currículum, en varios colegios particulares se estudian y diversos textos escolares analizan el tema.

Además, pedagógicamente presenta la cuestión de la utilización de varios registros, y la manera de pasar de uno a otro, dentro de una misma clase o unidad. Este paso de un registro a otro o de una metáfora a otra, está presente en otros casos, como en el de *"Solo funciona en el postítulo"*. En este ejemplo es de registro, cómo pasar del algebraico al geométrico y viceversa, cómo uno sirve de verificación del otro. Sin embargo, parece ser que el puro argumento geométrico no basta y se busca siempre un argumento algebraico.

Resumen

Patricia es profesora de matemática de un colegio particular. En un curso de Tercero Medio ella analizará las funciones cuadráticas, sus dominios y recorridos, y las funciones inversas de estas en los dominios y recorridos correspondientes. Una vez que ella presenta el estudio de algunos casos, les plantea un problema a los estudiantes que es más complejo que los que ella analizó, de forma que descubran nuevos resultados respecto del tema.

Un estudiante, Fernando, afirma que el dominio de la función $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$, es $[-1, +\infty[$, y realizando una manipulación algebraica algo descuidada, pero aparentemente correcta, afirma que el recorrido es el conjunto de los números reales.

Otro estudiante, Arturo, haciendo el gráfico de la función, ve que el dominio es efectivamente $[-1, +\infty[$, pero el recorrido es $[2, +\infty[$. Éste mismo estudiante, también llega al recorrido de Fernando mediante una manipulación algebraica errada, pero puede darse cuenta que el resultado es incorrecto, evaluando algunos valores que sirven de contraejemplo. Sin embargo, no logra descubrir en qué paso del proceso algebraico ocurre el error.

Objetivo principal

Este caso tiene por objetivo principal provocar la discusión y reflexión acerca de por qué dado un argumento geométrico, es necesario dar un argumento algebraico. ¿Es superior un argumento algebraico a uno geométrico, en algún sentido?

Objetivos secundarios

1. Provocar discusión y reflexión respecto a la equivalencia de ecuaciones al realizar operaciones como elevar al cuadrado o sacar raíces.
2. Provocar discusión y reflexión sobre la manera en que los estudiantes resuelven un problema, en forma más o menos mecánica, en vez de un argumento del tipo "como recorre todos los valores mayores o guales a -1, entonces recorre todos los valores mayores o iguales a cero, por lo tanto, recorre todos los valores mayores o iguales a 2". Estos argumentos, muy usados en matemáticas, son postergados ante una manipulación relacionada a solución de ecuaciones, sin tener los cuidados respectivos.

Situación problemática principal

La situación problemática principal es la contraposición de las representaciones algebraicas de las funciones y de las representaciones geométricas de las mismas. En el caso parece apreciarse cierta preferencia de parte de la profesora y de los alumnos por la algebraica, en desmedro de la geométrica.

Situaciones problemáticas secundarias

Los alumnos realizan operaciones algebraicas en una ecuación, sin preguntarse si las ecuaciones resultantes son equivalentes a la primera. Pese a ver un contraejemplo, confían ciegamente en su resultado, pues es el método conocido.

Recomendaciones para la conducción del caso

Hay varios aspectos matemáticos interesantes de analizar en este caso. Primero que todo, que para una definición de función se usa algo parecido a lo siguiente:

"Dados A y B dos conjuntos diremos que una función f de A en B es una relación[3] *, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B."*

Según esta definición no tiene sentido preguntar por el dominio de $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$, pues la definición de arriba, necesita que estén definidos A y B; por lo tanto, el dominio debe estar dado de antemano. De hecho, la profesora con anterioridad utiliza otro lenguaje para preguntar lo mismo:

"Para asegurar los aprendizajes posteriomente la profesora trabaja con los alumnos: $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x+!}$, y les pide encontrar D máximo, que permite que f sea función."

[3] Aquí se usa en general **relación**, pero también **asociación, asignación, correspondencia, transformación**. Sin indicar qué significan ellas, en general se usan en un lenguaje vago, pero que tampoco provoca gran confusión en los estudiantes

Si bien habría que definir en qué sentido "D es máximo", se ajusta más a la definición de función dada arriba. En general, se usa el problema de encontrar dominios con la única intención de que se resuelvan inecuaciones o ecuaciones; por ejemplo, en vez de preguntar por la solución de la inecuación $x+1 \geq 0$ se pregunta por el dominio de $f(x) = \sqrt{x+1}$. Se sugiere discutir con los estudiantes este tema.

Otro aspecto que surge del caso, es el de ecuaciones equivalentes, particularmente si al elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación permite obtener ecuaciones equivalentes. En nuestro caso, uno de los estudiantes razona como sigue:

$$y - 2 = \sqrt{x+1} \tag{2}$$

Después elevamos al cuadrado en ambos lados, y nos quedó:

$$(y-2)^2 = x + 1 \tag{3}$$

pretendiendo que la ecuación (2) y la ecuación (3) son equivalentes. Se sugiere discutir con los estudiantes estos puntos.

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Cómo podría Patricia explicar el error algebraico de Fernando, en la determinación del recorrido de la función?
2. ¿Por qué Arturo y su grupo no quedaron tranquilos con su resultado, y buscaron una reafirmación algebraica?
3. ¿Por qué cree usted que nadie presentó una solución del tipo: "Como $\sqrt{x+1} \geq 0$, entonces $y = 2 + \sqrt{x+1} \geq 2$, por lo tanto, $y \geq 2$ ", si parece tan evidente? ¿Será porque los estudiantes no son tan astutos, o es que han sido "contaminados" por vicios del sistema escolar?
4. ¿Elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación produce una ecuación equivalente a la primera?
5. Si se piensa la función como un triple, el conjunto de salida, el de llegada y la relación entre ellos, ¿qué sentido tiene preguntar por el dominio de una función?
6. Dada una tabla de valores reales de doble entrada x, y ¿existe una única función real tal que para cada valor x y su correspondiente y de la tabla se cumpla que $f(x) = y$? Es decir, dada la tabla:

x	0	1	-1	2	-2	3	3
y	0	1	1	4	4	9	9

   ¿Es cierto que se puede afirmar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es la única que coincide con los valores de la tabla? En otras palabras, ¿es cierto que una tabla de valores determina la función?

Caso 11: Una historia de encuentros y desencuentros

Rodrigo es profesor de matemática de un liceo municipal ubicado en el sector poniente de Santiago. Tiene 8 años de experiencia profesional y participa de buen grado en las diferentes instancias de capacitación que se le ofrecen; es conocido entre sus colegas por su afición a los computadores.

En su liceo cuentan con un laboratorio de computación que posee 25 equipos, dispuestos en un espacio de trabajo cómodo y accesible. También se cuenta con bastante software que, en general, está disponible a través del CRA de su liceo.

Como profesor de matemática piensa que se crean mayores y mejores oportunidades de aprendizaje para sus alumnos, si existen instancias de que ellos puedan "meter las manos" en lo que se hace y de materializar de algún modo los conceptos abstractos de la matemática. Recuerda que cuando niño asimiló la tabla del cinco aprendiendo a ver la hora en un reloj análogo. Por esto se declara tan amigo del computador, pues ve en él un espacio de trabajo en donde poder representar, probar y emular los objetos matemáticos y sus relaciones.

El pequeño departamento de matemáticas del liceo está compuesto por Rodrigo, Mercedes y Sonia. Mercedes es una profesora cercana a los 50 años y poseedora de una amplia experiencia. Sonia ha llegado recién, es una joven profesora, egresada hace poco, que fue contratada en reemplazo de don Justo, un estricto profesor jubilado recientemente. Este último era absolutamente cerrado a la incorporación de la tecnología en la enseñanza de la matemática y tenía continuos conflictos con Rodrigo, quien está esperanzado y aliviado por la llegada de Sonia. Por fin alguien joven, que no tendrá temor al uso de la tecnología pensaba, entusiasmo que aumentó cuando vio llegar a Sonia con su Notebook bajo el brazo y utilizar con naturalidad su reproductor de MP3.

Los tres profesores trabajan, en general, de manera bastante amistosa y colaborativa. Se facilitan guías, apuntes y datos de sitios interesantes de manera habitual, sin embargo, no podría decirse que planifican en conjunto aun cuando atienden cursos del mismo nivel.

En varias ocasiones han discutido si es o no pertinente usar los computadores en sus clases de matemática. La más crítica en relación a este punto es Mercedes, que sostiene que un profesor no puede depender de la tecnología para hacer sus clases y que, en general, el 90 % del saber matemático lo ha construido la humanidad sin esta ayuda. Cuestiona a Rodrigo cuando este cuenta entusiasmado lo "enganchados" que estuvieron sus alumnos en una clase en la cual usó la hoja de cálculo para graficar las soluciones de un problema de tarifas de consumo de electricidad usando funciones lineales. *"No te entusiasmes tanto, Rodrigo. Es probable que los alumnos se entretengan y lo pasen bien, pero ello no quiere decir que estén aprendiendo matemática. A lo mejor solo están aprendiendo a usar la tecnología y, finalmente, de funciones lineales ni aprendan mucho".*

Sonia, que tiene un carácter bastante independiente, no se muestra en general muy interesada en tales discusiones, lo que provoca un poco de decepción en Rodrigo, que esperaba su apoyo, pensando incluso que "ahora seremos dos contra uno" en este tipo de discusiones. Es más, Sonia pareciera apegarse más a Mercedes que a Rodrigo. Rodrigo recuerda el día que le mostró por primera vez a Sonia el laboratorio de computación, su orgullo. Esta no pudo evitar una mirada de decepción: *¿Y están con Windows? ¿Y son solo unos Pentium 3?*

En la actualidad, Rodrigo está comenzando a ver sistemas de ecuaciones lineales con un Segundo Medio y tiene pensado iniciar el tema con un problema:

Si dos vehículos, un camión y un auto, salen de Santiago hacia el sur con dos horas de diferencia y se conocen sus velocidades medias, ¿a qué distancia de Santiago el auto, que salió a las 8:00 y se mueve a 100 km por hora, alcanzará al camión que salió a las 6:00 y se mueve a 75 km por hora?

Le gustaría que sus alumnos determinasen a qué hora se produciría el alcance. Cuando piensa en esta clase, se imagina a los alumnos organizados en grupos de trabajo, discutiendo una estrategia para resolver el problema. Sabe que algunos optarán por representar gráficamente la relación distancia recorrida versus tiempo de cada uno de los móviles y así, por intersección de rectas, determinar el punto de alcance . Si los alumnos hicieran eso, no estaría nada mal como comienzo.

Sin embargo, no puede dejar de pensar que dichos gráficos pudieran hacerse usando la hoja de cálculo a partir de una tabla en la cual se determine, para cada instante de un cierto período, 24 horas por ejemplo, la distancia recorrida por el camión y el auto. Los alumnos podrían determinar con un poco de ayuda, cómo calcular la distancia recorrida conociendo el tiempo transcurrido. Después, ambas series servirían para confeccionar una gráfica del tipo XY y podrían visualizar la solución. Si los alumnos son capaces de armar este modelo en la hoja de cálculo, podría profundizar su comprensión de las relaciones matemáticas en juego y manipular las velocidades (pendientes de cada recta) o el desfase de tiempo (valor de y en Eje de ordenadas).

Inevitablemente, ante la petición reiterada de sus alumnos, Rodrigo terminó por hacer esta clase en la sala de computación. Ahora siempre vamos al laboratorio. *Me gustaría saber si Mercedes y Sonia logran este entusiasmo en sus clases y que vieran cómo los alumnos realmente piden el uso de la tecnología pensaba para sí Rodrigo, con una sonrisa en los labios.*

Al terminar la clase, pasó junto a él Daniela, una alumna conocida por su indolencia. Hasta luego profe, me gustó harto su clase. *No me di cuenta de cómo pasó la hora y eso que a mí no me gustaba mucho su ramo.*

Sin embargo, Jorge, uno de los mejores alumnos del curso, parecía especialmente aburrido. Rodrigo esperó que se fueran los demás para conversar con él.

Rodrigo: *¿Qué te pareció la resolución del problema mediante la gráfica, Jorge?*

Jorge: *... Eee, para ser honesto, profe, yo lo resolví de otra manera y ni siquiera vi la pantalla del computador.*

Rodrigo: *¿Lo hiciste algebraicamente?*

Jorge: *No exactamente, profe. Solo que me pareció más fácil notar que si el camión salió con 2 horas de anticipación, entonces lleva 150 km de ventaja. Ahora, como el auto se mueve 25 km por hora más rápido, entonces descuenta 25 km cada hora. Para descontar los 150 km, deben pasar 6 horas para que lo alcance.*

Rodrigo: *No lo había pensado así, pero igual era entretenido ver cómo funciona el asunto en el computador. Tus compañeros parecían interesados.*

(En este momento Jorge se sonroja un poco. Él apreciaba el entusiasmo del profesor. Hace tiempo había notado que sus compañeros le pedían ir al laboratorio con aparente interés, pero lo único que querían era *"estar un rato en el laboratorio para echar la talla y no tener que hacer nada"*. Jorge no encontraba la manera de hacer notar al profe Rodrigo este hecho, y había visto cómo Daniela le cerraba el ojo a sus amigas mientras le decía lo *"interesante"* que estuvo la clase a Rodrigo).

Jorge: *Eeee, profesor, es que...* (le dice lo mejor que puede a Rodrigo lo que estaba sucediendo).

Rodrigo disimuló su orgullo herido lo mejor que pudo con Jorge y después se despidieron. Luego del episodio, reparó en varias señales que había notado anteriormente, y a las que no había dado importancia, para terminar por reconocer que Jorge estaba diciendo la verdad. Sin embargo, no se lo tomó tan a pecho. *Uno nunca termina de aprender con estos cabros, un profesor debe tener ojos en la espalda.* Finalmente, lo tomó con humor y se prometió tener más cuidado a la hora de hacer actividades en el laboratorio.

Esa misma tarde tuvo la oportunidad de conversar con Sonia, su colega más joven.

Rodrigo: *Sonia, noto que no usas muy seguido el laboratorio de computación.*

Sonia: (con una sonrisa) *En realidad no, Rodrigo, solo para cosas puntuales.*

Rodrigo: *Pero, me extraña de alguien que usa la tecnología a diario. ¿Por qué no la incorporas a tus clases?*

Sonia: *Sinceramente, Rodrigo, nunca entendí este entusiasmo por el uso de TIC en las clases. Encuentro que es una exageración. No me entusiasma particularmente el computador, y pareciera algo como una moda pasajera.*

Rodrigo: (sorprendido) *¿Una moda? Lo hubiera creído de don Justo o de Mercedes. Sé que puede ser difícil saber si logras aprendizajes significativos con TIC, pero el entusiasmo que genera el uso del computador es algo innegable.*

Sonia: *Pero es justamente ese entusiasmo del que hablas, el que me parece dudoso.*

Rodrigo: (más sorprendido) *No te entiendo, los jóvenes adoran los computadores.*

Sonia: *Eso no es tan cierto. Mi hermano chico se pasa pegado al computador y yo misma lo uso mucho. Pero mi hermano lo usa solo para jugar, y me ha dicho muchas veces que encuentra muy aburrido andar moviendo rectas o haciendo círculos en el computador, cuando él se lo pasa pegado con juegos de gráfica tridimensional o con aplicaciones de alta definición y diseño de última generación. El otro día me dijo que "estaba chato" con el famoso Cabri, -es el programa más chanta que hay- me dijo -y los profes nos hacen clases con él como si fuera lo mejor de lo mejor.*

Rodrigo: (espantado) *¿Dice que Cabri es "chanta"?*

Sonia: *En fin, no lo tomes a mal, pero es una cosa generacional. A tu generación los computadores y esos programas pueden parecerles fascinantes, pero a la generación que sigue les parecen cosas de rutina, y para ellos son "vanos intentos de los profes por hacer más simpático el contenido". De hecho, se ríen de los profesores que hablan tanto de la "maravilla de la tecnología", pues ellos nacieron con eso y no la valoran en lo más mínimo. El otro día mi hermanito me hablaba de lo "mula" que eran los computadores del laboratorio, pues no tenían ni siquiera acelerador gráfico.*

Sonia prefirió no seguir la conversación, pues vio cómo Rodrigo se ensimismaba más y más. Rodrigo no salía de su asombro. Nunca se había cuestionado siquiera que el uso de los computadores en las clases no generaba mucho entusiasmo. La argumentación de Sonia era de una naturaleza totalmente distinta a la de don Justo. ¿Seré yo el anticuado ahora? se preguntó, mirándose al espejo y notando unas incipientes canas en sus patillas.

Guía para el facilitador

Introducción

Este caso plantea cuál es la verdadera utilidad de la incorporación de TIC en el aprendizaje de matemática. La informática avanza a un ritmo acelerado, y este avance es fácil de observar en muchos sitios Web y en video juegos; sin embargo, no es claro que este avance llegue a los applets matemáticos o a herramientas que se usan en las clases de matemática, sobre todo en diseño y aplicaciones. Es por esto que no es claro que a los estudiantes de hoy les parezca novedosa o entretenida una clase utilizando herramientas computacionales; tal vez sí lo era para estudiantes de 25 años atrás, cuando la computación no era tan masiva.

Resumen

En un colegio pequeño, tres profesores componen el departamento de matemática, Sonia, Mercedes y Rodrigo. Este último es muy partidario de usar el laboratorio de computación para sus clases de matemática, y así lo hace en muchas de ellas. Mercedes es más cauta, y no cree que los estudiantes de verdad estén logrando objetivos matemáticos, distintos a aquellos que se logran en una clase sin TIC, más bien, están logrando objetivos en el uso de la tecnología. Sonia acaba de llegar al colegio en reemplazo de un antiguo profesor que siempre se opuso al uso de computadores para enseñar matemática. Ella no se muestra entusiasta por la tecnología en la enseñanza, pese a que convive con ella y la utiliza a diario con su computador portátil y su reproductor de MP3.

En una clase acerca de la función lineal y ecuación de la recta, Rodrigo lleva a los estudiantes a la sala de computación. Él les presenta un problema que se puede visualizar graficando en una planilla de cálculo un par de rectas, e interpretando las coordenadas del punto intersección como la solución del problema. Sus estudiantes están muy entusiasmados, como siempre, por ir al laboratorio; sin embargo, uno de sus estudiantes más talentosos sale decepcionado de la clase y le cuenta que él había resuelto el problema, casi de forma mental, y que no usó el computador para nada. Además, le explica que sus compañeros van al laboratorio con pocas intenciones de trabajar en matemáticas, sino más bien a entretenerse en otras cosas.

Rodrigo, decepcionado, se va y habla con Sonia respecto al uso del laboratorio de computación, y Sonia le plantea su idea de que los jóvenes de hoy tienen a la tecnología como parte de sí, y no ven novedoso que se use en matemática, sobre todo porque las aplicaciones que utilizan los profesores son de gráfica y diseño muy anticuado, y las utilidades para el usuario son muy limitadas. Rodrigo queda perplejo y reconoce que no había pensado en eso y que, tal vez, el anticuado ahora es él.

Objetivo principal

Crear discusión y reflexión sobre la real y útil incorporación de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Objetivos secundarios

Provocar discusión y reflexión acerca de los momentos y tópicos más adecuados para el uso de las aplicaciones computacionales en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Situación problemática principal

La situación problemática principal del caso tiene relación con el uso de la tecnología. Por una parte está la posición de Sonia, que afirma que el uso de la tecnología en matemática puede ser aburrida y anticuada para los estudiantes de hoy, pues las aplicaciones computacionales más populares en la enseñanza de la matemática, compiten con sitios Web y videojuegos que los superan largamente en usabilidad, diseño y gráfica. Por otra parte, está la posición de Rodrigo, que cree que los estudiantes se motivan más a aprender matemática cuando se usa la tecnología que cuando no.

Situación problemática secundaria

Está presente también la problemática respecto de si el problema propuesto es el más adecuado para una actividad con el uso de computadores. Al parecer, el profesor Rodrigo no tenía una planificación especial para esa clase, respecto al apoyo en el computador.

Recomendaciones para la conducción del caso

La discusión puede ser llevada hacia el hecho de si hay algo más que “motivación” en el uso de la tecnología, ¿cómo avanzar a habilidades matemáticas profundas utilizando TIC? ¿O será que lograr “motivación” ya es una tarea suficientemente dura, como para también pedirle más cosas a la tecnología? Vale decir, si hay alguna herramienta que logra que mis estudiantes estén motivados a aprender matemáticas, sea cual sea, es bienvenida.

Sin embargo, en este caso es importante hacer notar la postura de Sonia, que sostiene que hoy ni siquiera la tecnología en la enseñanza de la matemática produce motivación en los estudiantes, por el contrario, produce aburrimiento.

Otra discusión que es importante tener, es si es necesario estar siempre usando las aplicaciones computacionales en la enseñanza de las matemáticas, o hay momentos precisos y tópicos más adecuados para el uso de la tecnología. Si esto es así, es decir, hay momentos precisos y tópicos más adecuados, ¿cuáles son estos momentos?, ¿cuáles son estos tópicos?

Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Para que utilizarían ustedes la tecnología en una clase de matemática?
2. ¿Para qué creen ustedes que es útil la tecnología en la clase de matemática?
3. ¿Rodrigo escogió bien el problema para motivar el uso de las aplicaciones computacionales?
4. ¿Cuáles aplicaciones computacionales conocen ustedes que se usan en las clases de matemática?
5. ¿Se logran habilidades matemáticas profundas con el uso de TIC?
6. ¿Qué papel juega la planificación de una clase en que se usan TIC?
7. ¿Cuáles son los momentos de una clase de ecuación de la recta y función afín que son favorables al uso de aplicaciones tecnológicas?
8. ¿Se puede ser un buen profesor de matemáticas hoy, sin utilizar TIC en la sala de clases?

Capítulo 7: Casos para la formación inicial de profesores de enseñanza básica

En la elaboración de estos casos participaron Luisa Aburto, María Soledad Montoya y Jaime Mena, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Renato Lewin, Ivette León y Pierina Zanocco, de la Pontificia Universidad Católica, Cristián Reyes y María Leonor Varas de la Universidad de Chile.

Caso 1:
Acerca de la suma de números enteros.
Título: "Resta los números y conserva el signo del mayor"

Caso 2:
Acerca de la relación de proporcionalidad.
Título: "Proporciones versus la regla de tres"

Caso 3:
Acerca del conjunto solución de una ecuación
Título: "Apuros en clase"

Caso 4:
Acerca del Teorema de Pitágoras.
Título: "Pitágoras de película"

Caso 5:
Acerca de la posibilidad de guiar demostraciones de matemáticas en enseñanza básica.
Título: "Demostraciones en Básica"

Caso 1: Resta los números y conserva el signo del mayor

Paulina es profesora de Educación Básica. Se tituló hace 16 años y ejerció durante 10 en una escuela cerca de su hogar, teniendo a su cargo, generalmente, los niveles de Quinto y Sexto Básico. Enseñaba casi todos los subsectores, excepto Música, Educación Física y Tecnología.

Un día le ofrecen una jornada de trabajo en una escuela con mayor cantidad de alumnos, la invitan a hacer clases solo en el subsector de Educación Matemática en los niveles de Séptimo y Octavo Básico. Luego de pensarlo detenidamente, aceptó la oferta y decidió cambiarse de su escuela, porque el ofrecimiento era más favorable.

Desde que Paulina egresó de la universidad no había realizado un perfeccionamiento sostenido; de vez en cuando asistía a una que otra jornada de actualización, pero ella pensaba que no eran muy fructíferas.

En esta nueva escuela comenzaron a surgir ciertos "miedos", sobre todo cuando tuvo entrevista con sus colegas, y en particular con Eugenia, profesora que está en el establecimiento desde hace 10 años. Ella le indica que hacen uso de planificaciones, donde se muestran claramente: las actividades, los objetivos, los aprendizajes esperados, el desarrollo de habilidades y el tiempo dedicado a cada unidad. Paulina se preocupó, debido a que en su antigua escuela la planificación consistía solamente en la especificación de objetivos, contenidos y evaluación, resultándole desconocida esta forma de trabajo.

Frente a esto intentó buscar libros de apoyo para preparar sus clases de acuerdo a la nueva planificación. Observó que sus colegas hacían uso de textos escolares que ella conocía para preparar sus clases, lo que la dejó más tranquila.

Las planificaciones de Séptimo Básico indicaban que debía trabajar con el contenido "Suma de números enteros"; además del contenido mínimo, incluyó sumas con más de dos sumandos, en donde el alumno debía aplicar propiedades de la suma.

Organizó la clase con una guía de ejercicios para practicar la suma de dos números enteros de igual signo y de distinto signo, para luego agregar ejercicios en donde el alumno reconociera las distintas formas de obtener un resultado correcto, con sumas que incluyeran dos o más sumandos de números enteros. Llegó el día de su clase y lo que más temía era no tener aceptación con estos alumnos nuevos para ella.

Trataba de seguir la planificación, distinta en su forma, pero no en su fondo con respecto a lo que hacía en su otro trabajo. Su intención era que los estudiantes aprendieran el contenido que ella había preparado.

Paulina dio comienzo a la clase indicando a los alumnos el objetivo de ese día: "Sumar números positivos y negativos"; asimismo, indicó las habilidades a desarrollar: observar, identificar, calcular, entre otras.

Paulina comienza la clase:

Paulina: (se dirige al curso) *Hoy conoceremos la manera de sumar dos números enteros a través de algunos ejercicios. Anotamos:*

$$-15 + -14 =$$

Si los números son de igual signo, en este caso negativos, el resultado de esta suma es un número entero negativo. Podemos asociar los números positivos a los haberes y los números negativos a las deudas.

(Piensa que al asociar esto con la vida diaria, los alumnos entenderán mucho mejor).

Rodrigo: *Profesora, ¿qué ocurre cuando tenemos dos números positivos, ¿Resulta negativo?*

Paulina: *Claro que no, se mantiene el signo con los números que se están sumando, por ejemplo:*

$$43 + 67 = 110$$

Rodrigo: *Entonces cuando sumamos dos números de igual signo, el resultado tiene el mismo signo.*

Paulina: *Exactamente. Veamos ahora qué ocurre en el siguiente caso:*

$$-54 + 86 =$$

Ahora, restamos ambos números y colocamos el signo del número mayor. Es decir, cada vez que sumemos dos números de distinto signo, restamos y colocamos el signo del número mayor: ¿cuál será el resultado de $86 - 54$*?*

Mariana: 32.

Paulina: *Muy bien, ¿y qué número resulta al calcular* $-32 + 8$*?*

Francisco: *¡Fácil,* 24*!*

Paulina: *Sí, pero se equivocó de signo, ya que se debe observar el número mayor.*

Francisco: *Pero el número mayor es* 8*.*

Paulina: *Efectivamente, pero se elige el número mayor sin tomar en cuenta los signos.*

Francisco: *¡Ah!, ¿entonces en este caso sería* -24*?*

Paulina: *Correcto.*

Los alumnos terminan de desarrollar la guía con mucha dificultad. Paulina comenta la situación con sus colegas en la hora asignada por la escuela para la reflexión de situaciones y la organización de las clases, de manera que los niveles estén todos en los mismos contenidos. Ella les dice que los alumnos se confundieron un poco, pero que al parecer lo habían entendido de la manera como ella asoció lo de agrupar números enteros, a tener deudas y tener con qué pagar.

Eugenia le dice a Paulina que no está de acuerdo con ella, porque no usó la planificación que le mostró con anterioridad; en esa planificación estaba considerado lo importante que es definir conceptos matemáticos correctamente, y que el alumno tiene que desarrollar habilidades de cálculo buscando sus propias estrategias.

Paulina le responde que para ella lo importante es que los alumnos aprendan cómo resolver los ejercicios, saber el porqué no interesa mucho.

Sergio, otro profesor que estudia un postítulo con mención en matemática, también destaca el hecho de que Paulina no usó la planificación que ellos ocupan comúnmente; en consecuencia, agrega que hay que ponerse de acuerdo si se van usar estas planificaciones o cada profesor prepara su clase en forma personal, considerando solo los planes y programas oficiales. Además, deben coincidir en el texto que ocuparán para preparar las clases.

Frente a este comentario, Claudio, otro profesor, dice que no está de acuerdo con Sergio; si bien la planificación está, el profesor es libre y tiene la opción de usarla o no. Lo importante es que aprendan los estudiantes, aunque se sacrifique una definición formal matemática.

Paulina, exclama *" ¡Pero si yo no cometí ningún error! Los chicos aprenderán, les voy a hacer varios ejercicios y ya verán que la práctica lo hace todo; y después, si alcanzo, veo ejercicios de aplicación"*.

Notas didácticas

En general, en todos los casos, es bueno estimular a los y las estudiantes para que expresen las ideas matemáticas que encuentran en el caso. Es sorprendente ver cómo, con ideas matemáticas tan simples como la de este caso, los estudiantes de Educación Básica tienen problemas, a pesar de que hayan tenido un curso en el cual estos tópicos se estudiaron. Por ello, es necesario incitar y focalizar a los estudiantes en la discusión sobre el concepto de adición de números enteros, pues es altamente probable que desvíen la discusión del saber matemático hacia los conflictos pedagógicos, tales como: uso de planificaciones, cambio de nivel de enseñanza y de estilos de trabajo, que pueden ser abordados posteriormente.

El facilitador tendrá que realizar preguntas que le permitan analizar las frases propuestas por Paulina y las respuestas o preguntas de su curso, con el objetivo de que los estudiantes expliciten la definición de suma de números enteros.

Es importante que la reflexión aborde los conocimientos que los alumnos necesitan para tratar la adición de números enteros, específicamente la noción de valor absoluto de un número entero, y así dejar en evidencia que, en ocasiones, el modelo de enseñanza tradicional, en donde se privilegia la técnica, conduce a errores de conceptos.

Aspecto matemático

En el caso de la suma de números enteros, por ejemplo:

$$-54 + 86$$

La profesora dice: *"Ahora, restamos ambos números y colocamos el signo del número mayor. Es decir, cada vez que sumemos dos números de distinto signo, restamos y colocamos el signo del número mayor".*

Eso es falso; además, hay algo de vaguedad en la frase, *"restamos ambos números"*, puesto que asume que se tiene un concepto de resta de números enteros, antes que el de suma, idea absolutamente errada. Lo que en realidad quiere decir, es que se hace la resta de números naturales, con resultado en el conjunto de los números naturales, por lo tanto, *"restamos ambos números"* debiera cambiarse por un *"calculamos el valor absoluto de ambos y restamos al valor absoluto mayor el menor valor absoluto".*

La frase *"colocamos el signo del número mayor"*, es falsa, y debiera cambiarse por algo como *"colocamos el signo del que tiene mayor valor absoluto"*. Así, la "regla" para sumar números enteros de distinto signo quedaría como:

"Si son de distinto signo y del mismo valor absoluto, entonces el resultado es cero. Si son de distinto valor absoluto, entonces calculamos el valor absoluto de ambos y restamos al valor absoluto mayor el valor absoluto menor, y al resultado colocamos el signo del número de mayor valor absoluto".

Es importante que el Facilitador guíe a una definición de ese tipo para mostrar lo engorrosa que resulta, y luego pregunte ¿por qué es así? o ¿para qué es así?, ¿por qué definimos esta suma y no otra, tal vez más simple?

Se sugiere guiar a los estudiantes a reconocer propiedades algebraicas, de la suma en $\mathbb{Z}$, y en $\mathbb{N}$ y analizar cómo se extiende a $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, lo único que sabemos algebraicamente de -4 es que sumado con 4 es cero. En general, lo que define a $-a$ en forma algebraica es que

$$a + -a = -a + a = 0.$$

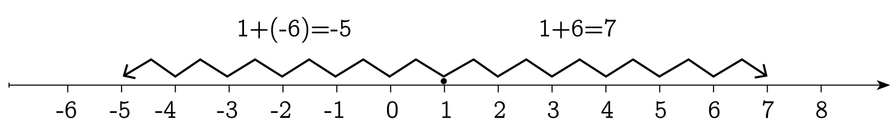
Si se quieren extender la conmutatividad y asociatividad de la suma en $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, se puede comprobar que:

$$-54 + 86 = -54 + (54 + 32) = (-54 + 54) + 32 = 0 + 32 = 32.$$

Ahora bien, si $\mathbb{Z}$ viene a resolver un problema algebraico, ¿cómo se le explica a un estudiante de Séptimo Básico, que esta es una forma "natural" de extender la suma de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, sin tener que pasar por estructura algebraica?

Aspecto didáctico

Se sugiere invitar a los estudiantes a proponer modelos didácticos, representaciones, metáforas, que permitan dar sentido a la suma de números enteros, y guiar la discusión, para que entre las diferentes representaciones y metáforas, se analice la recta numérica, donde sumar a es saltar a puesto a la derecha, si a es positivo, igual como se hacía en la parte positiva de la recta, y sumar a es saltar a puestos a la izquierda, si a es negativo.



Esto hace que se vea una ventaja de la idea de "saltar en la recta numérica", como metáfora de la suma, sobre la metáfora de agregar objetos en un recipiente, en este sentido, y se valoren las diferentes representaciones para un mismo objeto.

Preguntas para guiar la reflexión

1) ¿Hay algún error en la metodología de enseñanza del contenido matemático propuesta por Paulina?
2) ¿Qué conocimientos previos necesitan los estudiantes para abordar el tema de la adición de números enteros positivos y negativos?
3) De acuerdo a la regla enseñada, ¿es correcta la respuesta de Francisco al ejercicio $-32 + 8 = 24$?
4) ¿Cree usted que usando contextos de haberes y deudas, los alumnos comprenden mejor la adición de números enteros?
5) ¿Por qué Eugenia, al conversar con Paulina, destaca la importancia de usar las planificaciones?
6) ¿Qué opina respecto de la intervención de Claudio en la discusión creada por el uso o no de las planificaciones en las clases realizadas?
7) ¿En qué aspecto la idea de agregar objetos en un recipiente, como metáfora de la suma, es más "eficiente" que la de saltar en la recta numérica?
8) ¿Cree usted que puede ser un problema decirle a un niño de hasta Sexto Básico, que la resta $4-7$ no se puede hacer, y sin embargo, en Séptimo decirle que sí se puede? Si usted cree que es un problema, ¿cómo lo solucionaría?, ¿qué le diría a los niños que están en cursos que aún no estudian la suma de números enteros, que se preguntan por la resta $4 - 7$?

Caso 2: Proporciones versus la regla de tres

La escuela "Amanecer" imparte enseñanza desde Primero a Octavo Básico. Su planta docente es de 18 educadores; entre ellos hay dos profesores que enseñan matemática en los niveles de Quinto a Octavo Básico.

Uno de ellos es José, que por varios años se ha dedicado a esos niveles. Es intransigente frente a su modelo de enseñanza, está convencido de que su forma es la apropiada para que los estudiantes aprendan. Da énfasis a la ejercitación de la operatoria de números y considera que la resolución de problemas es una aplicación.

La otra profesora es Claudia, especialista en los niveles de Séptimo y Octavo. Trabaja hace 10 años en la escuela y su modelo de enseñanza matemática no es muy explícito, busca más bien el equilibrio entre proponer situaciones problemas y la ejercitación.

A Claudia y José les comunicaron que durante este año escolar, ambos realizarían clases desde Quinto a Octavo básico en cursos paralelos. José siempre estuvo descontento con ese cambio y se lo hace saber a Claudia.

En una reunión, a la hora del café, se produce el siguiente diálogo:

José: *Sigo descontento con esta decisión de ponernos en cursos paralelos, esto de cambiar a mí no me agrada mucho, yo opino que si nos va bien y se obtienen buenos resultados, ¡para qué cambiar!*

Claudia: *Sí, tienes razón, a la profesora Inés, que es especialista en Primero Básico y que por años enseñó a leer, la cambiaron a Cuarto Básico. Ella me dijo que estaba descontenta.*

José: *¿Te das cuenta? Inés hace muy bien su trabajo, es excelente como profesora de Primero Básico.*

Claudia: *Pero mejor no nos preocupemos de analizar el porqué y el para qué del cambio, veamos cómo vamos a trabajar este año. Te propongo que hablemos de esto en la hora de consejo técnico.*

Al otro día en reunión técnica

José llega a la oficina y Claudia ya estaba buscando sus planificaciones de Séptimo y Octavo para estudiarlas y preguntarle a su colega sobre los temas de Quinto y Sexto Básico.

Claudia: *¡Ah!, llegaste, qué bueno; mira, encontré todo el material que usé el año pasado en mis cursos, así que revisemos y veamos qué nos sirve y qué no, por lo menos organicemos los temas para este año.*

José: *¡Bien! Después hacemos lo mismo con mi material de Quinto y Sexto, pero te digo que no estoy muy contento.*

Claudia: *La primera unidad de Séptimo es Fracciones y la segunda, Razones y proporciones.*

José: *Yo avancé mucho con el curso en fracciones, los hice hacer hartos ejercicios de operatoria, creo que no debieran tener dificultades, vamos a ir rápido con esta unidad.*

Claudia: *¡Qué bueno! Entonces, preocupémonos de planificar la unidad de Proporcionalidad para Séptimo; es primera vez que los alumnos verán este tema.*

Así, José y Claudia programaron y planificaron los temas que abordarían durante el año, ellos sabían que tenían que tener más comunicación, pues estaban en cursos paralelos.

Pasaron varios días y efectivamente avanzaron rápido en las unidades, sobre todo José. Llegó el momento de tratar la unidad de Proporcionalidad en los Séptimos Básicos.

Un día, en la clase de Claudia ocurrió lo siguiente:

Clase de Claudia

Claudia inicia su clase y les dice a sus alumnos que comenzarán con una nueva unidad; les plantea el siguiente problema (escribe en la pizarra):

"Don Juan, en su minimarket, vende el kilo de tomates a \$750, para calcular rápido la cuenta de sus clientes se hace una tabla como la siguiente:

Cantidad de tomates (kg)	*Cantidad a pagar ($)*
1	*750*
2	*1500*
3	*2250*
4	*3000*
5	*3750*

¿Cuánto dinero tiene que pagar un cliente si compra 8,5 kilos?"

Pedro: *¿Cómo se hace, profe?*

Claudia: *No le diré el cómo, busque usted una forma de hacerlo; intente aplicando todos los conocimientos que tiene...*

Sergio: (le da la respuesta) *Profe, son $* 6,375.

Claudia: *Sergio, explica tu forma de resolver.*

Sergio: *Bueno, profe, 8 lo multiplico por 750 y luego le agrego la mitad de 750 que es lo que cuesta medio kilo de tomates, sumo ambos valores y ahí me da ese resultado.*

Claudia le dice a Sergio que su respuesta está bien y consulta al curso si alguien lo hizo de otra forma.

Leticia: (levanta la mano) *Profe, yo lo hice completando la tabla hasta llegar a los 8 kilos de tomates y luego agregué la mitad de $750 y el resultado que me dio es $* 6,375.

Claudia: *Bien, Leticia.*

La profesora continúa con su clase. A partir de ese problema y de las respuestas de sus alumnos, inicia la introducción al concepto de proporcionalidad.

Pasaron varios días, Claudia está siempre preocupada de que sus estudiantes aprendan el concepto de proporción con el lenguaje matemático, dando énfasis a la resolución de problemas.

Hasta que un día, en un recreo, se acerca un alumno.

Javier: *Profesora Claudia, tanto que usted nos complica para ver el tema de la clase; mi primo está en el otro curso, con el profesor José, y él le enseñó que el problema de "don Juan, el de los tomates" se hace con la regla de tres .¿Qué es la regla de tres?*

Claudia: (pensativa) *En la próxima clase te responderé.*

Enseguida busca a José y le dice que tiene que conversar, que se reúnan esa tarde para ponerse de acuerdo en algunos conceptos.

Reunión

Claudia se dirige a José y le cuenta sobre la consulta de su alumno Javier.

José: *Sí, es así, yo les enseñé a mis alumnos que en todos los problemas en donde una cantidad sube y la otra también, hay que aplicar la regla de tres, después hice hartos problemas, los estudiantes trabajaron como nuncaÖ El mismo problema que preparamos, lo resolví así:*

$$\begin{array}{c} 1..............\$750 \\ 8,5..................x \end{array}$$

A esto se le llama regla de tres, porque si compro más kilos de tomates, más dinero pago y, además, hay tres datos y falta uno; luego, para buscar ese dato, la x, hay que multiplicar cruzado las cantidades dadas y dividir por 1. Los alumnos entendieron muy bien. Después hice una guía de ejercicios donde aplicaban esta regla de tres.

Claudia: (lo escucha con atención) *No estoy de acuerdo con tu forma de enseñar. ¿Dónde está el concepto de proporcionalidad? ¿El lenguaje matemático? Tus alumnos aprenderán ahora, pero se olvidarán rápido.*

José: (la mira) *No seas tan exagerada, vamos rápido con la materia, estos cabros necesitan la técnica, ¿para qué explicar más?*

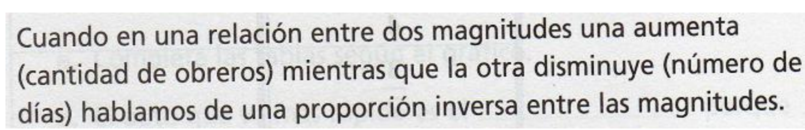
Notas didácticas

En este caso en particular, es importante que el facilitador guíe la discusión hacia la necesidad de tener una definición de proporcionalidad y aprovechar los errores en sus conceptos para ver la apropiación del saber matemático. En este caso se presentan en contraposición las formas de presentar la matemática, de dos profesores. Uno presenta un problema y luego dice cómo resolverlo, utilizando una regla. En cambio, la profesora no sugiere ninguna regla ni tampoco una estrategia de solución; los estudiantes resuelven el problema de varias formas distintas, y luego la profesora introduce los conceptos de proporcionalidad, pero en el relato no se aprecia cómo.

Es importante invitar a los estudiantes a reflexionar la manera de continuar con la clase de la profesora.

Aspectos matemáticos

La proporcionalidad directa e inversa produce bastante confusión entre nuestros estudiantes e, incluso, entre algunos profesores. Por ejemplo, aún existen textos de estudio licitados por el MINEDUC, donde se encuentra información como la siguiente:


Cuando en una relación entre dos magnitudes una aumenta (cantidad de obreros) mientras que la otra disminuye (número de días) hablamos de una proporción inversa entre las magnitudes.

Este error es bastante común en nuestras escuelas, y el dual referido a proporción directa, que trata este caso, también es muy fácil de encontrar. En nuestro relato aparece en la voz de José:*Sí, es así, yo les enseñé a mis alumnos que en todos los problemas en donde una cantidad sube y la otra también, hay que aplicar la regla de tres.* Por lo tanto, es muy habitual que nuestros estudiantes de pedagogía básica traigan este error desde la escuela.

Es importante que el Facilitador del caso encause una parte de la discusión a este respecto. En la situación en que haya opiniones a favor de José, es decir, estudiantes que crean correcto que "cuando una variable crece, la otra también crece, entonces estamos en presencia de una relación de proporcionalidad directa", sugerimos invitar a estudiantes de la opinión contraria a argumentar y, sobre todo, a entregar ejemplos que muestren variables relacionadas en forma creciente, pero que no están relacionadas en forma proporcional, por ejemplo, el lado del cuadrado y el área del cuadrado.

Una vez que se haya consensuado que la definición de José es errada, es importante invitar a los estudiantes a entregar una definición correcta de relación de proporcionalidad directa. Es bueno resaltar que el caso no muestra cómo aborda Claudia el concepto de proporcionalidad directa con sus estudiantes; por ello, es crucial que el Facilitador cree el espacio para la reflexión respecto a cómo sería una clase del tópico en cuestión, utilizando la introducción de la profesora. Además, debe incitar a los estudiantes a argumentar sus opiniones y discutir cuando aparezcan respuestas tales como: *"La profesora debería hacer una clase donde da una definición formal de proporciones".* "La profesora debería dar más ejercicios".

En general, no se debe aceptar una crítica sin sugerencia concreta en donde se aborde realmente el problema de "cómo se debe enseñar".

Otra pregunta que sería interesante discutir, si el tiempo lo permite, es que si bien no es cierto que "si una variable crece, la otra también crece, entonces las variables están en relación directamente proporcional", ¿es cierto que "si dos variables están en relación proporcional directa, entonces si una crece, la otra también crece"?

Esta pregunta tiene que ver con la idea de que dos variables, digamos x e y, están en proporción directa si y solo si existe k no nulo tal que $y = kx$. En este caso, si k es negativo, no se obtiene una relación creciente y, por lo tanto, la pregunta anterior tendría respuesta negativa.

Aspectos pedagógicos

Una vez que se tenga un consenso respecto a una definición de proporcionalidad, invitar a los participantes a elaborar actividades que permitan introducir el tema en sus futuros estudiantes, a un nivel de Séptimo u Octavo Básico. ¿Es necesario pasar siempre por la constante de proporcionalidad?

Una vez que se haya llegado a una definición clara de proporcionalidad directa, es interesante preguntar a los estudiantes: Si el concepto de proporcionalidad directa ya está adquirido por el curso del colegio en cuestión, ¿hay algún inconveniente en usar la regla de tres? ¿O es que siempre la regla de tres es una estrategia inadecuada para usar con estudiantes de Educación Básica?

Preguntas para guiar la reflexión

1. ¿Qué complicaciones tiene el cambio de un curso a otro en el profesor o profesora?
2. ¿Cómo se enfrenta la enseñanza en cursos paralelos, con docentes distintos?
3. ¿Cuáles son los contrastes de los modelos de enseñanza de José y Claudia?
4. ¿Con qué cree usted que continuó Claudia para enseñar la proporcionalidad?
5. ¿Qué diferencia hay entre enseñar la regla de tres y el concepto de proporcionalidad?
6. ¿Es suficiente enseñar la regla de tres para comprender lo que es la proporcionalidad?

Caso 3: Apuros en clase

Javiera es una profesora con 10 años de experiencia, egresó de la Universidad y trabajó durante dos años en una escuela haciendo clases de Tecnología, pero no estaba contenta y buscó una escuela en donde pudiera hacer clases de Matemática; así, llegó a su actual trabajo. Estaba contenta de cambiar de escuela, desde muy joven la cautivaba la matemática.

Sus clases las planificaba pensando en sus alumnos, a veces, más de la cuenta. Hacía esfuerzos para que, de una u otra manera, los estudiantes aprendieran. Por lo tanto, la dedicación para preparar su clase era mayor, buscaba textos escolares para seleccionar actividades, ya sean ejercicios o problemas y procuraba resolverlos previamente.

En su escuela había dos cursos por nivel, desde Primero a Octavo Básico y ella tenía a su cargo desde el Quinto al Octavo, mientras su colega José atendía los mismos niveles, pero en los cursos paralelos. De vez en cuando se reunían para ponerse de acuerdo en lo que iban tratando, pero las planificaciones de sus clases y la preparación misma la realizaba cada cual.

José tenía alrededor de 5 años menos de experiencia que Javiera; desde que él se tituló de profesor, trabaja en la misma escuela; además, trabaja en otro establecimiento haciendo clases de Matemática y muchas veces se le observa correr de un lado para otro.

Javiera y José se reunieron para conversar el tema que debían enseñar en Octavo Básico: ecuaciones de primer grado. Javiera le dice que ya comenzó con ese tema y que lo trató vinculado a la resolución de problemas, pero ahora tenía que profundizar la resolución de ecuaciones. José responde que le dio énfasis primero a la resolución de ecuaciones y luego tenían que aplicar las ecuaciones en problemas. Quedaron de acuerdo en reunirse otro día y traer material para intercambiar, así ahorraban tiempo en la preparación de la clase.

Javiera decide que tiene que ver algunos casos claves de resolución de ecuaciones; para ello, prepara la clase:

Momento 1: *preparación de la clase*

Javiera tenía guardado algunos problemas que, a simple vista, parecían sencillos, y seleccionó dos:

Problema 1:

Un número aumentado en 10 es igual al mismo número aumentado en el doble de 5.

Problema 2:

Un número par disminuido en 6 es igual al mismo número par aumentado en 3.

Cada problema lo resuelve con esmero, pues era la primera vez que trataba el tema sobre las soluciones de las ecuaciones y se sentía segura de lo que iba a realizar.

Momento 2:*Intercambio de material*

José y Javiera intercambian material. Javiera le entregó una serie de ejercicios y problemas que ella había recopilado para su clase. Por su parte, José también le entrega algunas guías; él estaba contento, pensaba que tenía más material para preparar sus clases.

Momento 3:*Clase de Javiera y Clase de José*

Clase de Javiera:

Llegó el día de la clase que Javiera había preparado con dedicación. Escribió en la pizarra los problemas 1 y 2, y les dijo a los alumnos que los realizaran usando ecuaciones. La metodología que usó fue: un momento de trabajo personal, luego comentar con los compañeros y, finalmente, una puesta en común, y les dejó espacio para trabajar.

Observó durante la clase cómo los alumnos y alumnas hacían rápidamente la traducción del lenguaje natural al matemático.

Pedro: (siempre hace los ejercicios rápidamente, dice en voz alta) *¡Está malo esto!*

Javiera: *Pedro no grites, tus compañeros están trabajando.*

Pedro: *Está malo, esto no puede ser, ¡usted se equivocó!*

(Javiera, muy tranquila y segura de lo que estaba haciendo, le hace algunas preguntas a Pedro, para que continúe o busque una explicación).

De inmediato, Javiera hace la puesta en común, pues Pedro dio la respuesta en voz alta. Llama a Bernardita a la pizarra para que escriba y resuelva la primera ecuación.

Problema 1: Un número aumentado en 10 es igual al mismo número aumentado en el doble de 5.

Bernardita escribió:

$$\begin{aligned} x+10 &= x+2\cdot 5 \\ x+10 &= x+10 / +(-10) \\ x+10+(-10) &= x+10+(-10) \\ x+0 &= x+0 \\ x &= x / +(-x) \\ x+(-x) &= x+(-x) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Bernardita: (mira a la profesora y con timidez, le dice) *Parece que está malo esto profesora".*

Pedro: *Ve, le digo que eso está malo, no puede ser que la x se vaya.*

Javiera le dice a su alumna que se siente y pide a Pedro que trate de buscar una explicación.

Pedro: *Mire, está bien resuelto, usted se equivocó en hacer el problema.*

La profesora consulta al resto del curso y les pregunta: *¿Qué creen ustedes? ¿Tendrá algún significado esto que nos dio?* El curso completo se queda en silencio, hasta la más inquieta mira a la pizarra y no encuentra explicación. Entonces, Javiera hace una pregunta al curso: *¿Qué nos dice el problema? Busquen un número que cumpla con esto, sin mirar el desarrollo que hizo Bernardita de la ecuación.*

Rápidamente levantan la mano varios alumnos, Javiera les pide a algunos que los escriban en la pizarra.

1) $2+10=2+2\cdot 5$ 2) $3+10=3+2\cdot 5$ 3) $7+10=7+2\cdot 5$

Ahora, ¿qué observan?

Rodrigo: (alumno muy analítico) *Este problema tiene 10 respuestas.*

Javiera: *¿Por qué?*

Rodrigo: *Bueno, vamos cambiando valores y llegamos".*

Continuando con su clase, ocupa todo lo que escribieron los alumnos y la discusión que se generó. Posteriormente, les explica que este tipo de ecuaciones, que al resolverlas resulta el mismo número a ambos lados de la igualdad, tienen varias soluciones.

Del mismo modo, es decir, usando la misma metodología, los alumnos resuelven el problema 2; posteriormente, Javiera escribe sobre las soluciones de una ecuación en la pizarra y da ejemplos.

Clase de José:

José les dice a sus alumnos que ahora realizarán problemas de aplicación usando ecuaciones. Escribe en la pizarra dos problemas y les da un tiempo para que los resuelvan. Mientras sus alumnos trabajan, él completa el libro de clases; pasado un tiempo se acerca un alumno.

Roberto: *Profe... parece que el problema está malo.*

Profesor: (sin mirar lo que había hecho el alumno) *No, ¡está bien! Siéntate.*

Observa que hay murmullos en la sala y se para de su asiento y comienza a pasearse; efectivamente, se da cuenta que a los alumnos les da una respuesta rara.

Manuel: *Profe... esto está malo, hágalo usted en la pizarra.*

El profesor vuelve a su mesa y lo resuelve rápidamente; se da cuenta que le da $0 = 0$. Piensa que esto no está bien, así es que decide cambiar el problema en ese mismo instante.

Profesor: *A ver, alumnos, me equivoqué, en vez de el doble de 5 coloquen el doble de 6.*

Todos los alumnos resuelven el nuevo problema.

Manuel: *Profe, esto también está malo. Mire me da* $10 = 6$*".*

El profesor, muy nervioso, vuelve a resolver y se da cuenta de que también hay un error. Aprovecha de mirar el problema 2 y obtiene $6 = 3$. Preocupado, toma la decisión y dice *"no realicen los problemas, vamos a hacer más ecuaciones".*

Los alumnos reclaman y dicen *¡Más lo que nos hace escribir...!* Lo único que quiere José es finalizar la clase, así es que improvisa y escribe en la pizarra varias ecuaciones y les dice que las resuelvan, eso sí, atento a que no ocurra lo mismo.

Terminada la clase, busca a Javiera y le dice a su colega: *Oye Javiera, los problemas que me pasaste el otro día están malos, no los pudieron hacer los alumnos, tuve que improvisar y hacer otros ejercicios.*

Javiera le responde que esos problemas tenían la intención de tratar el tema de las soluciones de una ecuación y le explica lo que ella hizo en clases. José le dice *"Me hubieras avisado, me pasé la clase cambiando los enunciados."* Pero en realidad no entendía bien para qué Javiera ponía problemas con infinitas soluciones, si esos problemas en realidad no aparecen en ecuaciones de primer grado.

Notas didácticas

Siempre es bueno estimular a los y las estudiantes para que expresen las ideas matemáticas que hay en el caso. Concretamente, en esta situación el problema aparenta ser simple, sin embargo, requiere de un análisis más fino, puesto que subyacen ideas que permitirán la comprensión de otros conceptos, como la resolución de sistemas lineales o las ecuaciones polinómicas de grados mayores a uno.

La idea fundamental acá es tratar las soluciones de una ecuación de primer grado de la forma $ax + b = 0$ con a y b cualquier número entero. Se observa que al tratar estas ecuaciones en Octavo Básico, no se hace hincapié en analizar las soluciones de una ecuación, teniendo en consideración que la ecuación lineal tiene solución única o infinitas soluciones o solución vacía. Es común que cuando los alumnos resuelven ecuaciones y obtienen $0 = 0$, lo interpreten como una ecuación que está mal hecha y que no tiene significado en matemática. Lo mismo ocurre con las ecuaciones que, al resolverlas, dan contradicciones, por ejemplo $6 = 1$, ellos piensan que la ecuación no tiene sentido, que el problema está mal planteado.

Por tal razón, es necesario que el Facilitador encauce la discusión hacia este tema, pues es fácil que la reflexión se focalice en aspectos como la preparación de la clase, que sin duda es muy relevante, pero no se constata si los estudiantes tienen o no apropiado el saber en cuanto a las soluciones de la ecuación de primer grado. Esto no quiere decir que el tema de la preparación de la clase no se aborde, por el contrario, lo primero que un docente debe realizar para hacer su clase es estar completamente apropiado del contenido a tratar.

Otro punto a considerar es la idea de provocar la discusión y analizar los dos tipos de clases, haciendo notar que las intervenciones tienen distintas intencionalidades y evitando que los estudiantes emitan juicios sobre el actuar de ambos profesores. La profesora Javiera quería introducir un tema nuevo para los alumnos, era primera vez que trataba el tema en cuestión, de ahí entonces que se esmera en la preparación de su clase. Por otra parte, el profesor tiene otra intención, que es aplicar la resolución de ecuaciones en problemas; sus alumnos sabían resolver ecuaciones, sin embargo, al proponer los mismos problemas que Javiera, su clase cambió de rumbo.

Aspectos matemáticos

En general, las soluciones vacías de una ecuación causan problemas, lo mismo que las soluciones infinitas. Es importante guiar la discusión a que no es lo mismo decir "esta ecuación tiene varias soluciones" que decir "esta ecuación tiene infinitas soluciones". Es importante que el Facilitador invite a dar argumentos claros que permitan asegurar que la ecuación $3(x-4) = 2(x-1) + (x-10)$ tiene infinitas soluciones, lo mismo para el caso vacío.

Otro aspecto interesante a discutir es que no basta comprobar algunos casos, para asegurar que una relación o propiedad es universal. Es decir, si no se sabe a priori que el conjunto solución de una ecuación de primer grado es un singleton, o todo el conjunto de los números reales (si se considera a este como referencial) , o el vacío, no basta decir que como:

1) $2 + 10 = 2 + 2 \cdot 5$ 2) $3 + 10 = 3 + 2 \cdot 5$ 3) $7 + 10 = 7 + 2 \cdot 5$

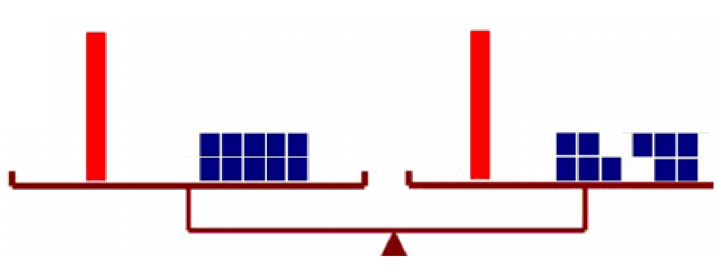
Entonces, para cualquier x real se cumple que $x + 10 = x \cdot 5$, sino que se requiere un argumento general.

Aspectos pedagógicos

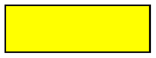
La siguiente es una pregunta recurrente: "¿Es necesario saber resolver ecuaciones para determinar que $x + 10 = x + 2 \cdot 5$?"

O, más generalmente, problemas del tipo "Mi mamá me regala 20 estampitas, que junto a las que ya tenía suman en total 34, ¿cuántas estampitas tenía?", ¿son realmente apropiados para introducir las ecuaciones? Se sugiere guiar al grupo a discutir este tema, es decir, discutir la necesidad de introducir las ecuaciones y cuáles problemas son los más apropiados. Se sugiere que el Facilitador esté muy preparado, con representaciones y metáforas que permitan resolver problemas que propongan los estudiantes, sin necesidad de usar ecuaciones.

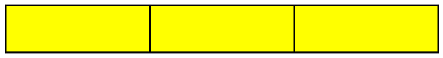
Otro aspecto interesante y relacionado con el anterior, es utilizar metáforas y representaciones para resolver ecuaciones, dar sentido a las reglas que rigen a las ecuaciones, argumentar respecto a la naturaleza de las ecuaciones. Por ejemplo, en la representación en balanzas, parece ser claro (ver la imagen más abajo) que la caja alargada puede tener cualquier cantidad de calugas y esta se mantendrá equilibrada, lo cual muestra que cualquier número x es solución de la ecuación $x + 10 = x + 2 \cdot 5$.



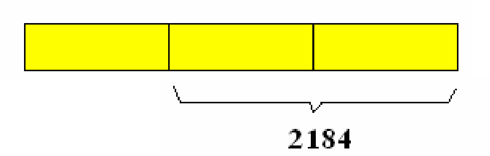
Otro método muy utilizado, incluso para resolver problemas aparentemente complicados, es representar las incógnitas por barras. Por ejemplo, para resolver el problema *"La diferencia de dos números es 2184, el más grande es el triple del pequeño, encuentra la suma de los números"*, se sugiere la estrategia de representar el número pequeño por una barra, digamos



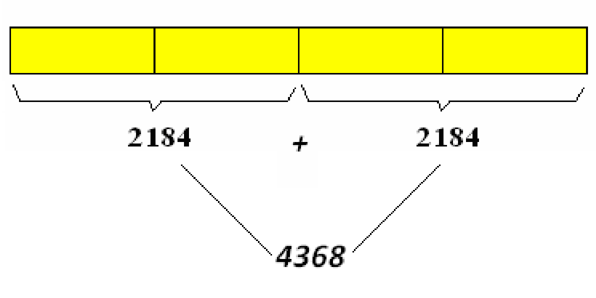
El más grande, que es el triple del pequeño, por:



La diferencia entre ellos la marcamos en el anterior:



Y la suma la representamos por:



Preguntas para guiar la reflexión

1) ¿Toda ecuación de primer grado tiene una única solución?
2) ¿Existen ecuaciones de primer grado que no tienen solución?
3) ¿Existen ecuaciones de primer grado en las cuales se admite cualquier ¿resultado? como solución?

4) ¿Existen ecuaciones de primer grado que tienen exactamente dos soluciones?
5) ¿Es necesario hacer el análisis de las soluciones de una ecuación general de primer grado?
6) ¿Cuál es la intención de cada una de las clases?
7) ¿Cuál es la importancia de preparar una clase? ¿Es suficiente intercambiar y acumular material?
8) ¿Cuáles problemas son interesantes para introducir las ecuaciones sin que parezca artificioso, debido a que se pueden resolver “al ojo” o con representaciones adecuadas?
9) ¿Cuáles representaciones se pueden utilizar para introducir y desarrollar el tema de las ecuaciones de primer grado? Describa ventajas de unas frente a otras, dependiendo de los problemas que resuelven, o la estrategia metodológica a utilizar.

Caso 4: Pitágoras de película

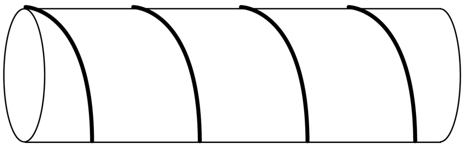
Eliana y Marianela son profesoras de matemática en un liceo capitalino. En realidad, la primera no cuenta con un título de especialista, como sí sucede con la otra, ya que es profesora de Básica, pero imparte las clases de matemática en Séptimo y Octavo con buenos resultados y reconocimiento de sus colegas y directivos. Marianela se siente involucrada y parte de estos logros de Eliana, pues llevan años colaborando y compartiendo los perfeccionamientos a los que asisten juntas y proyectan en su docencia. El desafío que actualmente las convoca es el de preparar las clases del Teorema de Pitágoras, que serán filmadas por un proyecto de investigación de la Universidad, en el que participa el Liceo. Eliana tiene muy claro el esquema que seguirá para este tópico con sus alumnos del Séptimo C, pues lo ha implementado en años anteriores y nunca le ha dado ningún problema. Por el contrario, a sus alumnos siempre les ha ido bien en esa prueba y es un curso bueno -tal vez el mejor del nivel- en matemática. Su colega coincide con esta apreciación, pero en su rol de jefa del Departamento de Matemática y por la confianza que se tienen con Eliana, igual quiere conocer en detalle la planificación de esta: "Siempre hay algo que se puede mejorar", dice la una, pero lo piensan las dos.

La planificación de las clases del Teorema de Pitágoras

Eliana siempre parte con una motivación concreta, un problema que no se sabe resolver y para lo cual servirá el nuevo conocimiento, en este caso, el Teorema de Pitágoras. Luego sigue con una actividad de indagación: hará que sus alumnos descubran el Teorema de Pitágoras. Luego, formalizará este descubrimiento, estableciendo claramente el Teorema, su representación algebraica y gráfica, haciendo que los alumnos también verbalicen el resultado. Finalmente, trabajará aplicaciones del teorema tanto a problemas matemáticos como de la vida diaria.

Marianela no puede más que coincidir con este esquema, que ella también aplica en otros tópicos, pues no le ha tocado enseñar el Teorema de Pitágoras. Por eso mismo se interesa en conocer cada una de las actividades que Eliana trabajará con sus alumnos y le muestra un bonito problema que publicó el TIMSS, que pocas personas lograron responder internacionalmente:

Una pita se enrrolla simétricamente en torno a un tubo de 12 cm. de largo y 4 cm. de contorno, exactamente 4 veces.



Determine el largo de la pita.

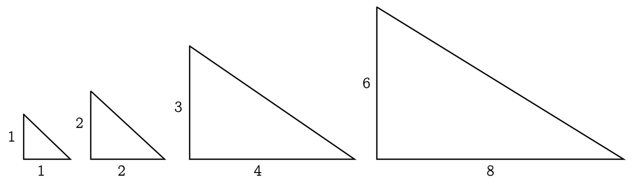
Eliana se asombra, pues ciertamente nunca había pensado en algo tan difícil. De utilizarlo, lo dejaría para el final de la unidad, después de los ejercicios que ella siempre ha utilizado, y que muestra a continuación.

Para motivar:

Francisco vive en el 6^{to} piso de un edificio de 10. Calcula que su ventana está como a 15 metros del nivel de la calle. Del lado que él vive, el terreno es irregular, hay árboles y hasta una piscina y él calcula que, en caso de incendio, el carro de bomberos no podría acercarse a una distancia menor que a 10 metros del edificio. Esto le inquieta, pues cree que ninguna escalera telescópica, de esas que utilizan los bomberos, alcanzaría para llegar hasta su ventana y rescatarlo en caso de incendio. Es un temor que no ha podido despejar, pues no sabe cuánto sería esa distancia diagonal que tendría que cubrir la escalera. ¿Podremos calcularla nosotros?

Para descubrir:

Organizará al curso en grupos de cuatro alumnos. A cada grupo le asignará uno de los cuatro triángulos de más abajo y a todos los grupos les pedirá la misma tarea. Esta tarea consiste en construir cuadrados sobre cada uno de los lados, en papel lustre de distintos colores, y luego, siguiendo unas indicaciones para recortar uno de los cuadrados correspondiente a un cateto, que ella les dará, les pedirá cubrir la superficie del cuadrado sobre la hipotenusa con los cuadrados correspondientes a los catetos.



Para aplicar:

a) Resolver el problema de Francisco usado para motivar.
b) Calcular una altura en un triángulo de lados dados.

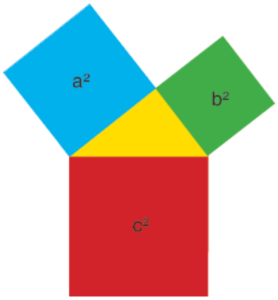
Marianela celebra la planificación, le gusta el esquema propuesto por Eliana, pero insiste en su problema del TIMSS, que se esmera en explicar. Juntas lo resuelven y se entusiasman mutuamente con el mayor desafío que presentarán a los alumnos. Se trata de un buen curso y, enfrentado a ese problema, se lucirá.

Comienza la filmación

El generalizado nerviosismo inicial cede rápidamente por la seguridad de Eliana en su planificación y el apoyo que siente con la presencia de Marianela al fondo de la sala. La actividad de indagación toma más tiempo del previsto, por falta de prolijidad de algunos grupos, que no han medido bien o no han escuadrado correctamente los cuadrados, con lo cual no calzan bien las piezas recortadas para cubrir el cuadrado grande, el de la hipotenusa. Eso obliga a rehacer parte de los trabajos y buscar más papel lustre, que comienza a escasear.

Eliana repite indicaciones generales y particulares a los distintos grupos. Recomienda usar el papel cuadriculado de sus cuadernos de matemática y contar cuadraditos para asegurarse de hacer cuadrados que sean efectivamente cuadrados. Los grupos que trabajan con los primeros dos triángulos descubren que la hipotenusa pasa justo por la diagonal de los cuadraditos del papel cuadriculado y eso les ayuda en su construcción del cuadrado grande. Pero esa misma receta tomada por los otros grupos no hace más que complicarles la tarea. Finalmente, Eliana considera que en general se ha acumulado suficiente evidencia para concluir el resultado buscado y conduce ese proceso. Para rematar, luego de que todos los grupos han informado y comprobado la coincidencia, pega en la pizarra las piezas correspondientes a los cuadrados construidos sobre los lados de un gran triángulo que ella ha traído preparado. La siguiente clase parte enunciando el Teorema de Pitágoras, que escribe en un gran recuadro en la pizarra, junto al triángulo con los cuadrados sobre los lados.

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



A continuación resuelve en la pizarra el problema usado como motivación y entrega una guía de ejercicios para que trabajen en grupo. Se ha guardado el problema del TIMSS para el final; no lo puso en la guía, lo resolverán todos juntos, el curso completo, en la tercera clase que se filme.

El problema de la guía

La idea de trabajar grupalmente la guía de ejercicios era que los alumnos discutieran, pero la discusión que se produjo en esta ocasión no era la esperada, menos en el grupo de los buenos alumnos, que siempre tienden a juntarse.

Aníbal y Cristina no logran ponerse de acuerdo frente al siguiente problema:

Diga, en cada caso, si las siguientes medidas pueden ser las de un triángulo rectángulo:

i) $a=2,\ b=3,\ c=4$
ii) $a=4,\ b=4,\ c=4$
iii) $a=3,\ b=5,\ c=4$
iv) $a=9,\ b=12,\ c=15$
v) $a=1,\ b=2,\ c=3.$

Según Aníbal, no tenían cómo responder esta pregunta, pues no sabían lo que pasaba con los triángulos que no son rectángulos. Cristina argumentó que era obvio que en esos triángulos no valía que $a^2 + b^2 = c^2$, si no ¿para qué iba a partir el teorema diciendo "para todo triángulo rectángulo"? Habría bastado con decir "para todo triángulo". Y además, si el teorema valiera para triángulos no rectángulos, ¿qué sentido tendría hablar de la hipotenusa y los catetos?, ¿acaso esos nombres no eran exclusivos para triángulos rectángulos? Aníbal estuvo a punto de aceptar el argumento de Cristina, pero el tono burlón le molestó -mal que mal lo estaba tratando de tonto y en público- así que insistió y en voz más alta, pidiendo a Eliana que aclarara si la propiedad era exclusiva de los triángulos rectángulos o no.

Eliana, por supuesto, ratificó el argumento de Cristina. Aníbal no quedó para nada conforme y se puso a buscarle “la quinta pata al gato”, dibujando triángulos con lados de diversas medidas, rectángulos y no rectángulos. No tardó mucho en descubrir que Eliana había cometido un error con el ejercicio v) y, picado como estaba, no lo planteó directamente, sino que, haciéndose el inocente, preguntó en voz alta si se podían construir triángulos con lados de cualquier medida. Eliana, que había observado sus intentos, no entendió la pregunta (o no la pensó detenidamente) y le respondió que sí, pensando en alentarlo a seguir explorando y descubriendo regularidades. Aníbal disfrutó su victoria, pasando a la pizarra a mostrar su “descubrimiento”.

Antes de que Aníbal terminara de hablar, Eliana se había dado cuenta de su error, pero ya era tarde. Con la cámara a centímetros de su cara y con la mirada desafiante de Aníbal del otro lado, su explicación al curso sonó débil. La mayoría ni siquiera prestó atención, absortos como estaban, trabajando en sus grupos, muchos incluso de espalda a la pizarra. Eliana tiene muy claro que su objetivo es el curso y que ni la cámara ni Marianela ni la molestia de Aníbal ni su frustración momentánea, la confundirán. Por eso se acerca a las mesas, pidiendo atención, y que suspendan lo que estaban haciendo. Bernardo, un alumno cuya afición al chateo y a Internet raya en el vicio, aprovecha la ocasión para comentarle que mucho antes que Pitágoras, los egipcios y los babilonios usaban el teorema y que él no entiende por qué es Pitágoras el que se roba la película.

Notas didácticas

El Teorema de Pitágoras es un tema que aparece en Séptimo Básico en nuestro actual currículum; sin embargo, los profesores generalistas no son preparados para desarrollar habilidades relacionadas con hacer demostraciones de este teorema (ni de otros) ni tampoco en reconocer entre una implicancia o una equivalencia.

Este caso tiene muchas aristas, muchos caminos por los cuales adentrarse, y tener una discusión rica. Algunos temas son:

- Trabajar en equipo.
- Utilizar problemas de pruebas internacionales, en las cuales sabemos con certeza que, como país, obtenemos muy malos resultados.
- Comprobar utilizando papel y tijeras no constituyen demostraciones matemáticas.
- Exponer a los estudiantes a intervención externa con aparatos de filmación.

Y así, muchos otros. Pero es muy importante que se trate el tema de dar demostración, para este nivel, del Teorema de Pitágoras, así como también de abordar el conflicto de Aníbal. Es decir, si el teorema dice *"Si a, b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$"*, entonces efectivamente no podemos decir que si los lados de un triángulo son 3, 4 y 5, entonces el triángulo es rectángulo invocando el teorema de Pitágoras.

Aspectos matemáticos

El Teorema de Pitágoras se entiende, en general, como lo enunciamos más arriba. Sin embargo, muchos lo entienden como una equivalencia, más que como una implicancia, que es como lo mostramos.

La verdad es que es una confusión muy divulgada y, por lo general, a los estudiantes les cuesta ver la diferencia de implicancia y equivalencia en este caso, porque siempre lo han entendido como implicancia, pero lo han ocupado como equivalencia.

Se sugiere hacer afirmaciones más simples, del tipo "Si un número es divisible por 4, entonces es par" e invitar a los estudiantes a dar argumentos que muestren la veracidad de la afirmación, y luego hacer la recíproca, esto es, "Si un número es par, entonces es divisible por 4", entonces los estudiantes darán ejemplos para mostrar que esta frase es falsa. Por lo tanto, es necesario guiar la discusión a que si *p implica q, no necesariamente q implica p.*

Invitar a los estudiantes a enunciar el recíproco, y se debiera converger a frases del tipo "Si en un triángulo las medidas de sus lados son a, b y c y además satisfacen

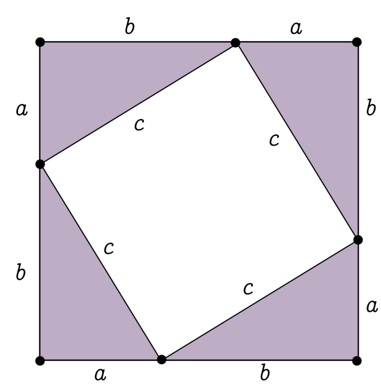
$a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo".

Otro aspecto importante es dar una demostración del teorema y de su recíproco.

Aspectos pedagógicos

En estas notas solo nos enfocaremos en los relacionados con los aspectos más matemáticos. Es importante discutir en el grupo respecto a si un argumento basado en cortes de papel lustre, constituye una demostración. Es importante considerar los errores en las mediciones y en lo poco preciso de los cortes, lo mismo con argumentos de trasvasije de agua en prismas de base triangular.

Lo que sí puede ser interesante, es hacer actividades de recorte que se pueden transformar en demostraciones formales. Por ejemplo, la más conocida es copiar cuatro triángulos rectángulos congruentes y disponerlos de forma de encerrar un rombo de lado la hipotenusa del triángulo.



Luego, argumentar respecto a que el rombo de lado c es en realidad un cuadrado, para luego calcular el área de la figura achurada de dos formas distintas.

Invitar a los estudiantes a elaborar una estrategia para llevar la demostración al aula. Hacer lo mismo con el recíproco.

Preguntas para guiar la reflexión:

1. Rigurosidad del lenguaje en el que se enuncia el teorema. Necesidad de la frase del tipo "Si...entonces...". Distinguir entre el Teorema de Pitágoras y su recíproco.
2. Discutir la actividad de indagación con criterios de "diseño de experimentos". ¿Se puede conjeturar que la propiedad depende del hecho que haya un

ángulo recto, si no se experimentó con triángulos que no tenían un ángulo recto? ¿Cómo se puede aprovechar la falta de prolijidad para realizar la actividad manipulativa con este mismo fin? Discutir el valor concluyente de un contraejemplo.

3. Discutir el valor de la secuencia de ejercicios de i) a iv), dejando fuera el error del último.
4. Discutir la validez del trabajo en grupo para resolver esta guía de ejercicios.
5. ¿Cómo seguiría usted la clase en el momento en que Eliana descubre su error?
6. ¿Qué responder a Bernardo?
7. Discutir por lo menos 3 demostraciones del Teorema de Pitágoras adecuadas a Séptimo Básico.

Caso 5: Demostraciones en Básica

Carolina es profesora básica de un colegio municipalizado. Ella ha trabajado solo en ese colegio desde que salió de la universidad, hace cinco años. El colegio es pequeño, tiene dos cursos por nivel. Cuando llegó al colegio le dieron pocas horas, le hacía clases a un Tercero y a un Cuarto Básico; como le fue bien en SIMCE, le asignaron los dos Cuartos y los dos Terceros, mientras otra profesora hace clases a Primero y Segundo Básico. Además, como ha tenido tan buenos resultados, le pidieron hacer un taller extra para fortalecer matemáticas, y subir aún más los puntajes SIMCE.

Carolina estudia con información de la Web y de libros que ha encontrado en librerías de textos usados, conversa con su colega de básica y también con profesores de segundo ciclo respecto a los aspectos importantes de la matemática, sin tener nada muy claro aún. Sin embargo, con practicar con problemas tipo SIMCE le ha ido bastante bien. Pese a que ella no era "buena" para las matemáticas en el colegio y tampoco en la universidad, ha empezado a encontrarle gracia a esta disciplina; ver que ella misma resuelve problemas desafiantes, y puede explicarlos a sus alumnos utilizando varias representaciones, le ha permitido sentirse más segura y confiada en la enseñanza de las matemáticas. De hecho, hasta se ha comprado libros de acertijos matemáticos, historia de las matemáticas y "matemática entretenida".

En el verano pasado participó en un curso de perfeccionamiento que trataba sobre la argumentación en matemáticas para primer y segundo ciclo. En él pudo comprender algunas cosas sobre las cuales nunca había meditado y conoció una parte de la matemática que le era totalmente desconocida: las demostraciones.

Ella había visto alguna vez demostraciones en geometría respecto a dimensiones de las cuerdas en una circunferencia, en el preuniversitario, pero nunca las había entendido, ni tampoco entendía para qué le servirían. Pero ver ahora argumentaciones a nivel de básica respecto a aritmética, le parece más cercano y más fácil de ver que las complicadas demostraciones geométricas llenas de rectas auxiliares que le hacían perder de vista el resultado al cual quería llegar. Además, el profesor que hizo el curso mostró maneras en que estos argumentos se pueden llevar al aula sin demasiados pasos técnicos.

Además, en el ajuste curricular ella ha visto que en varios CMO aparecen frases del tipo "Formulación y verificación de conjeturasÖ" por lo tanto, cree que la argumentación se volverá una prioridad en el nuevo enfoque curricular.

Algunas de las cosas que vio en el curso de capacitación las llevó a su clase de Cuarto Básico.

La primera clase

Carolina había preparado una clase para mostrar que la suma de dos números pares es par; pidió a los estudiantes que le dijeran qué era un número par. Sin embargo, se dio cuenta que los niños no podían verbalizar una definición, y ella reconocía como una falta propia no haber dado importancia a las definiciones. Se dio cuenta en terreno que no podía hacer su clase de argumentación, cambió de plan y ese día lo ocupó para que todos los niños tuviesen una definición de número par.

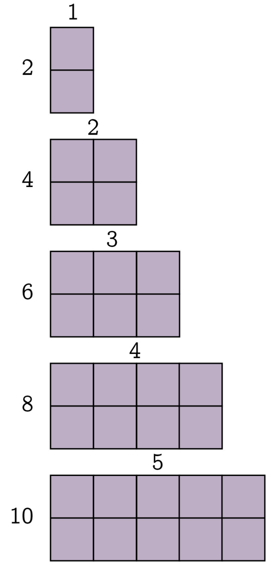
Ella les pidió que le dieran ejemplos de números pares:

Mariela: *El* **dos***, tía.*
Carolina: *Muy bien, Mariela. ¿Otro?*
Francisco: *El* **cuatro***, tía.*
Carolina: *El* **cuatro**. *¿Qué dicen todos? ¿Es par el* **cuatro***?*
Todos: *¡Síííííííí!*
Carolina: *Muy bien, el* **cuatro***es par. ¿Otro?*
Cristián: *El* **cinco**.
Carolina: El **cinco**. *¿Qué dicen todos? ¿Es par el* **cinco***?*
Todos (incluso Cristián): *¡Noooo!*
Carolina: *¿Por qué no es par?*
Violeta: *Porque el dos es par, el cuatro es par y el siguiente par es el seis, porque los pares van saltando de dos en dos.*
Carolina: *Muy bien Violeta. ¿Todos de acuerdo con eso?*
Todos: *¡Síííííííí!*
Martina: *El* **cero** *tía.* **Carolina:** *¿Qué pasa con el* **cero***, Martina?*
Martina: *El* **cero** *es par, tía.*

Cuando Carolina les preguntó a todos si el 0 era par, como decía Martina, muchos dijeron que sí y muchos dijeron que no. Carolina sabe que el cero es par, pero lo entendió hace poco, y sabe que es un tema conflictivo, así que dejó ese problema abierto, para discutirlo en otro momento y no desviarse tanto del tema. Pese a que el argumento de Martina era bueno, ella dijo: *"Como los pares van saltando de dos en dos y el dos es par, si salto dos para atrás llego al cero"*.

Carolina siguió con la clase y trató de dirigirla a que ellos mismos dijeran que un número es par si es el doble de un número. Pero no le resultó, así que casi al final de la clase dijo:

“Noten que el **dos** lo puedo ver como dos baldosas pegadas, el **cuatro** como dos hileras de dos baldosas, el **seis** como tres hileras de dos baldosas, el **ocho** como cuatro hileras de dos baldosas, el **diez** como 5 hileras de dos baldosas y así sucesivamente.”



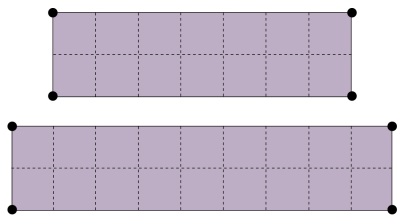
Carolina: *El 12, ¿cuántas hileras de dos baldosas tiene?*
Todos: *¡Seeeeis!*
Carolina: *Muy bien, niños. ¿Ustedes creen que cualquier número par se puede ver así?*
Todos: *¡Sííííííí!*
Carolina: *¿Pueden decir qué tienen en común los números pares?*

Silencio sepulcral. Los niños ni siquiera entendían qué se les estaba preguntando. Jamás les habían hecho una pregunta como esa. Carolina no insiste, suena la campana y los niños salen a recreo. Carolina se da cuenta que para su clase de argumentación no necesita que se verbalice una definición, así que se queda tranquila, ya que le basta que reconozcan un par como un arreglo rectangular de baldosas donde uno de los lados es 2.

La segunda clase

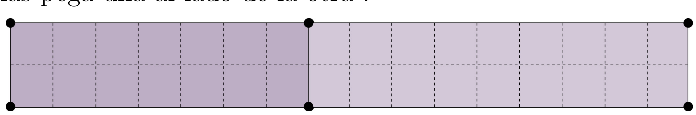
La clase siguiente ocurrió al otro día, así que lo visto estaba "fresquito" en las cabecitas de los niños.

Carolina: *Recuerdan que habíamos visto los números pares. Habíamos dicho que eran filas de parejas de baldosas, como estas* -y pega en la pizarra las figuras hechas con cartulina que traía desde su casa-.



Estos son dos números pares, ¿verdad?
Todos: *¡Síííííííí!*
Violeta: *Son el 14 y el 18.*
Carolina: *Muy bien, Violeta. Pero podrían ser cualesquiera, ¿verdad?*
Martina: *¿Cómo cualesquiera? Son el 14 y el 18.*
Carolina: *Pero cualquier otro número par se podría dibujar así. ¿Verdad?*
Todos: *¡Sííííííííííí!*

Carolina: *¿Qué pasa si las pego una al lado de la otra?* -mientras despega una de ellas y las pega una al lado de la otra-.



Pueden ver que queda otra hilera de parejas de baldosas. Entonces, ¿les parece que cuando sumamos dos números pares resulta de nuevo un número par?

Todos: *¡Sííííííííí!*
Martina: *Obvio, pues catorce más dieciocho es treinta y dos, que es par.*
Carolina: *¿Pero no te parece que independiente del dieciocho y el catorce, siempre si sumas dos pares resulta un par?*
Martina: *Claro, por ejemplo, cuatro más seis es diez que es par; seis más ocho es catorce que es par, y así siempre que sumo dos pares, el resultado es par.*
Carolina: *Pero, ¿no te parece que los parejas de baldosas pueden tener cualquier largo, y aún así cuando pegues dos de ellas será de nuevo una hilera de parejas de baldosas? Si sólo compruebas con varios ejemplos, ¿cómo sabes que en cualquier*

otro caso seguirá ocurriendo que la suma de pares es par?
Martina: *No sé por qué lo sé, pero lo sé, es obvio. Si sumo un par con otro par, el resultado tiene que ser par. ¿Qué otra cosa pude ser? No puede ser impar, ¿cómo va a ser impar?*
Violeta: *Sí, tía, es obvio que par más par es par.*
Muchos: *Sí poh, obvio, imagínese par más par es impar, no poh, no puede ser.*

Suena la campana y los niños se van. Carolina se queda un poco decepcionada de no poder transmitir lo que quería. *¿Tal vez los niños de esta edad no tienen la madurez de ver estas demostraciones? ¿Tal vez no sienten la necesidad de dar argumentos generales?* piensa Carolina.

Le cuenta lo ocurrido a una profesora de media que hace clases a los niños de segundo ciclo básico. La colega la deja más desconcertada, le dice: *"Eso no es una demostración, para hacer una demostración necesitarías notación algebraica, cosas por el estilo dos x más dos y es 2 factor de x más y. O cosas por el estilo. Lo que tú hiciste es otra cosa. Además, los niños chicos no necesitan esto, mejor dedicas el tiempo a hacer acertijos y problemas choros, es más divertido y aprenden más".*

Carolina se va para la casa sin saber qué hacer, por lo pronto prepara su taller de SIMCE, y le da un poco de lata. *Ojalá en el curso de perfeccionamiento me hubiesen dicho qué hacer en estos casos*, dice en voz alta Carolina y suspira.

Notas didácticas

El ajuste curricular enfatiza claramente las habilidades de razonamiento, de argumentación y deducción desde primer ciclo básico. Hay frases que se declaran explícitamente al respecto, por ejemplo:

> “La matemática se aprende haciendo matemática, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento acumulado y sistematizado. Por ello el **razonamiento matemático** se aborda transversalmente en los cuatro ejes. Consecuentemente, resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones, para casos particulares o en forma general -en cuyo caso se usará el verbo demostrar- está en el núcleo de las experiencias de aprendizaje deseables”.

Así como estas frases, en el ajuste hay varias menciones a la argumentación; es importante notar que en el ajuste se dice “demostrar” cuando una argumentación trata del caso general. Nos parece correcto, pues hemos observado que existe cierto grado de “solemnidad” para la demostración, que la hace inalcanzable a niveles básicos e incluso, medios, e invita a usar terminología ambigua y poco clara, como “justificar”, “verificar”, “argumentar”, etc., con el único fin de evitar la palabra “demostrar”.

Este caso plantea el tema en una clase de Cuarto Básico, que además está complementado con otros temas secundarios, como son la paridad del cero, la necesidad de definiciones claras como prerrequisito de una demostración. También, está presente el tema del momento, en el desarrollo del niño, en que ellos pueden comprender y dar demostraciones generales.

Se muestra a Carolina, una joven profesora de enseñanza básica, a quien durante su época de estudiante no le resultaron amigables las matemáticas, en particular las demostraciones, que generalmente las había visto en geometría, y le parecían lejanas y difíciles. Ella ha investigado, ha conversado con colegas y ha tomado varios cursos de capacitación, que le han hecho encontrarle “gracia” a las matemáticas y también a las demostraciones en aritmética, que es donde a ella le parece más natural verlas. Carolina ha tenido buenos resultados y le han asignado los Terceros y Cuartos Básicos, además de un curso especial para preparar el SIMCE.

Ella prepara una clase para demostrar que la suma de dos números pares es un número par. Sin embargo, se encuentra con algunas dificultades, la principal es que los niños no pueden verbalizar una definición de número par, en los términos en que Carolina lo esperaba.

Decide replantear la clase y se dedica a que los estudiantes encuentren una característica que determine a los números pares. Al final de la clase admite que no necesita que los niños verbalicen una definición de número par en los términos que ella lo esperaba en un principio, sino que para sus objetivos le basta con que los niños reconozcan un número par "como un arreglo rectangular de baldosas donde uno de los lados es 2".

Para su segunda clase, que ocurre al día siguiente de la primera, ella muestra su argumento: que si un número par se representa como una hilera doble de baldosas, entonces al pegar dos de estas configuraciones se obtiene una configuración del mismo estilo, por lo tanto la suma de dos pares es par. Pese a sus esfuerzos, los estudiantes no logran desprenderse del todo de la particularidad de los ejemplos mostrados por Carolina. Esto la hace sentir decepcionada.

Una colega de enseñanza media le dice que lo que ella ha hecho no es una demostración, que para tener una demostración se necesita notación algebraica:

$$2x + 2y = 2(x + y).$$

Le sugiere, además, que se dedique a hacer "problemas choros" y acertijos, pues así aprenden más matemática. Carolina queda confundida, sin saber qué hacer.

Aspectos Matemáticos

Durante las pruebas piloto que hemos realizado con estudiantes de Pedagogía General Básica y con profesores en ejercicio de primer ciclo, hemos observado que no siempre hay claridad respecto a qué es un número par. Ha dado buenos resultados hacer una indagación del conocimiento de los profesores y estudiantes al respecto. En particular, resulta interesante preguntar sobre la paridad del cero, para analizar si las posibles definiciones permiten decidir si el cero lo es. Algunas definiciones que hemos recibido son las siguientes:

"Un número es par si es divisible por 2".
"Un número es par si es el doble de un número".
"Un número es par si es el doble de un número natural".
"Un número es par si es el doble de un número entero".
"Un número es par si es el múltiplo de dos".
"El dos es par y cualquier numero que resulta del dos saltando de dos en dos".
"Si tenemos un conjunto de objetos y vamos quitando parejas del conjunto, si al final no quedan elementos, entonces el conjunto tiene un número par de elementos; si queda un elemento, entonces el conjunto tiene un número impar de elementos".
"La suma de un número consigo mismo es un número par".

Es importante que los participantes reconozcan la diferencia entre un argumento general y una verificación en casos particulares. Es muy común encontrar en textos escolares y en otros documentos, frases del tipo "Como $3 + 5 = 5 + 3$, entonces la suma es conmutativa" o "como $3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 27$, entonces la multiplicación distribuye respecto a la suma" o "como 4 es par y 6 es par y como la suma es 10 que también es par, entonces la suma de dos pares es par". Para ello es importante mostrar ejemplos de conjeturas que no sean ciertas, pese a que funcionan en casos particulares. Un ejemplo famoso corresponde a los primos de Fermat: un ejemplo menos elaborado que hemos usado es proponer a $d(n) = 2n - 6$ como la cantidad de diagonales de un polígono de n lados. Tiene éxito para $n = 3$ y $n = 4$, pero falla de ahí en adelante.

Uno de los riesgos, y que hemos experimentado, es que la discusión se enfrasca en la paridad de cero. En este caso hemos usado dos estrategias, una es postergar la discusión y concentrar la atención en otros temas. La segunda es agotar el tema, pero dirigirlo hacia una definición de par que permita testear la paridad de cero. Se sugiere invitar a los participantes a que, de entre todas las definiciones dadas de par, consensuar una equivalente a:

"Un número entero es par si y solo si se escribe como $2k$, con $k \in \mathbb{Z}$"

Es importante distinguir entre una definición experta, que manejen los profesores, a una definición que se entrega en aula de primer ciclo. En el caso de arriba nos referimos a una definición que debe manejar el profesor.

Aspectos Pedagógicos

Una situación que nos ha tocado observar es que tanto profesores como estudiantes, plantean que los estudiantes de Cuarto Básico no entienden y no entenderán una demostración general, basándose en su experiencia, lo cual es valiosísimo, pero es importante plantear la discusión en el sentido de qué pasaría si desde los primeros niveles hubiera una preocupación de desarrollar habilidades de argumentación. Tal vez, cuando lleguen a Cuarto Básico, los estudiantes ya estén acostumbrados a este tipo de explicaciones, y las puedan seguir sin mayores dificultades.

Preguntas para guiar la reflexión

1. ¿Creen ustedes que los estudiantes de Carolina lograron comprender la generalidad del argumento?
2. ¿Es necesario usar otra representación que incluya la generalidad del problema y no sólo ejemplos de casos particulares?
3. ¿Qué debió haber hecho Carolina con anterioridad a la primera clase, para que esta no hubiese fallado como ocurrió?

4. ¿Cuál es su opinión respecto al pasaje del relato *"Carolina se da cuenta que para su clase de argumentación no necesita que se verbalice una definición, así que se queda tranquila, ya que le basta que reconozcan un par como un arreglo rectangular de baldosas donde uno de los lados es 2"?* ¿Cree usted que es correcto?
5. ¿Es cierto que los niños no tienen una definición de par? O ¿Es que no la pueden verbalizar?
6. ¿Le parece bien que Carolina no haya abordado en clases la paridad del cero? O ¿Es necesario que haya cerrado ese capítulo en el momento que apareció el asunto?
7. ¿Es necesario esperar el lenguaje algebraico para hacer demostraciones como esta?
8. ¿Por qué es importante que los estudiantes desarrollen habilidades de argumentación desde los primeros niveles básicos?

Capítulo 8: Casos para la formación continua de profesores de Matemática

En la elaboración de estos casos[1] participaron Carmen Gloria Medina, Lino Cubillos, Jorge Soto y Cristián Reyes, de la Universidad de Chile.

Caso 1: Acerca de Metáforas para la Esperanza Estadística.
Título: “Esperanzas para todos los gustos”

Caso 2: Acerca de las soluciones de la ecuación cuadrática
Título: “Raíces de la ecuación cuadrática”

Caso 3: Acerca de la real posibilidad de hacer demostraciones en clases de matemática.
Título: “Demostraciones en clases de matemática”

[1] Hay casos de formación inicial que han sido adaptados para formación continua. Solo agregamos algunos de aquellos especialmente redactados para este propósito.

Caso 1: Esperanzas para todos los gustos

Roxana Acevedo es una profesora de matemática con 15 años de experiencia docente. Le agrada mucho su profesión y la interacción con sus jóvenes estudiantes. Por fin, después de muchos años intensos, en los que el rumbo de su vida estaba demarcado por las obligaciones, se siente tomando las riendas. No es que se queje, al contrario, está orgullosa de sus hijos, disfruta hablando de ellos y de sus logros, pero se alegra de la mayor independencia que ellos (y ella) van adquiriendo. Posee una jornada laboral de 30 horas de clase y no quiere tomar más horas. Así se deja algún tiempo para leer acerca de su especialidad, navegar en la web buscando sitios interesantes para sacar ideas y materiales para sus clases, incluso, participar en cursos de desarrollo profesional.

Se entusiasma con las nuevas ideas, pero con la cautela que su experiencia le otorga. Ha visto muchas modas, bien presentadas, que han terminado siendo desastrosas.

En la actualidad está tratando el concepto de *esperanza estadística*. En esta materia nunca se ha sentido igual de relajada que en otras. Tal vez, porque en su propia formación universitaria fue más débil y confusa o porque simplemente es más difícil. Como sea, ella se ha preparado especialmente para enseñar este tópico, tanto para fortalecer su propia comprensión del contenido, como para buscar formas de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que ella percibe. Hasta el vocabulario es complicado y no es solo por diferencias formales o anecdóticas; refleja diferentes maneras de mirar la realidad que se modela o estudia y, por lo tanto, son muy profundas. Recuerda cuánto tiempo le tomó descubrir que la esperanza de una variable aleatoria era lo mismo que la media de una colección de datos. En la primera manera de nombrar se privilegia lo teórico (las probabilidades) y en la segunda manera el contexto es experimental (lo estadístico). En todo caso, piensa que -de acuerdo al Programa- es la idea de *variable aleatoria* la que se debe privilegiar y considerar que los datos estadísticos, cuya media se estudiará, son recogidos justamente con la intención de ver "cómo se porta" una variable aleatoria.

Su reflexión actual es metodológica. Mucho se ha repetido que la forma tradicional de presentar los contenidos expositivamente y luego realizar extensas ejercitaciones, no desarrolla una comprensión profunda de la matemática, sino que está más bien orientada a la destreza mecánica. Si bien no concuerda del todo con esta visión tan peyorativa de una práctica extendida, realizada largo tiempo por ella misma y que no dio tan malos resultados como se dice, busca nuevas formas de enseñar a sus alumnos. Le atrae mucho la idea de aprovechar las experiencias sensorio motoras previas de los estudiantes, sobre todo en la etapa de indagación o de descubrimiento del concepto que se introduce. Además, ha utilizado metáforas a lo largo del año. Comenzó con timidez, pero a estas alturas se diría que es una apasionada impulsora de esta metodología, basada en sacar partido de nuestros diversos modos cognitivos para abordar conceptos o procesos matemáticos.

En esta ocasión utilizó la metáfora del balancín para presentar la esperanza. Apoyándose en ella, la "definió" como el punto de equilibrio del sistema de masas asociado al gráfico de barras de la distribución (o ley) de probabilidad de la variable aleatoria. Su idea era "cosechar" la fórmula a partir de una serie de actividades tendientes a comprender bien esta "definición". Esto lo apoyó con preguntas y puso a prueba pidiendo que estimaran tal punto de equilibrio a partir de listas de datos y de gráficos que ella trajo preparados y que repartió en los distintos grupos de trabajo.

Para asegurarse de que sus alumnos y alumnas del Cuarto B comprendieran bien la metáfora, propuso como desafío inicial el caso de una niña pequeña que desea jugar con su hermano mayor en el balancín. ¿Cómo podrán equilibrarse ambos si su hermano pesa 40 k y ella sólo 20 k? Los alumnos no vacilaron en proponer que el hermano mayor se acercara más al punto de apoyo o pivote del balancín y que la niña se alejara más hacia el extremo. No tardaron en darse cuenta de que el equilibrio se encuentra cuando la distancia de la niña al punto de apoyo es exactamente el doble de la distancia entre dicho punto y su hermano.

Al preguntar a sus alumnos por situaciones parecidas al ejemplo del balancín, aparecieron las antiguas "romanas" o balanzas de almacén en las cuales se equilibraba el peso a medir con unos contrapesos deslizantes a lo largo de un brazo graduado; una balanza de consultorio médico y aquellas balanzas mecánicas usadas por los pediatras para pesar a los bebés.

Para pasar de dos a un número mayor de objetos/personas que se contrapesan, recurrió a sus gráficos, porque le pareció complicado seguir con la idea de la experiencia sensorio motora, que ya había explotado. Puso en la pizarra el gráfico de barras del resultado de una prueba de diagnóstico que se tomó este año a los 360 alumnos ingresados a Primero Medio, calificados en 4 niveles de conocimientos (1: insuficientes, 2: básicos, 3: adecuados, 4: destacados) y pidió:

(a) que estimaran el "resultado promedio";
(b) que descubrieran alguna manera de calcular el "punto de equilibrio" de las 4 barras.

Repitiendo las preguntas, entregó a cada grupo varios gráficos de situaciones-problemas similares; finalmente, entregó una lista con 50 resultados de una encuesta (con 5 alternativas de respuesta), pidiendo el resultado promedio, sin explicitar su deseo de que agruparan y graficaran antes de responder o que utilizaran una fórmula ya descubierta.

La profesora Roxana Acevedo estaba bastante contenta con la gran actividad que observaba en la sala. Definitivamente, este método los hacía pensar por sí mismos. Por lo mismo, se sorprendió con la pregunta de Juan, un buen alumno, correcto y respetuoso, aunque como todos los de su edad, a veces trata de probar que ya es adulto y que el uniforme que viste tiene sus días contados.

Juan: (con voz clara desde el fondo de la sala) *Profesora ¿qué van a preguntar en la prueba de nivel de la próxima semana?, ¿va a ser de balancines y de descubrir fórmulas o habrá que calcular usando la fórmula que está en el libro?*

No podría haber dicho nada en contra de la pregunta o de la actitud de Juan, pero le pareció que algo había en ella de contenida molestia. En ese momento se dio cuenta de que no había visto a Juan participando de las actividades propuestas por ella y que la fórmula que tenía escrita en su cuaderno debió haberla copiado del libro o conocido de antes.

Roxana le respondió (a él y al curso entero) que resolver problemas, encontrar representaciones adecuadas de los datos, hacer estimaciones, son no solo objetivos muy importantes de la enseñanza de la matemática, sino que fácilmente evaluables a través de una prueba.

Los 45 minutos habían pasado sin que nadie descubriera la fórmula, lo que estaba dentro de sus expectativas. Cerró la clase dejando la última actividad de tarea y advirtiendo que al día siguiente formalizarían lo aprendido.

Aprovechó el recreo para conversar con Juan, quién no la buscó para aclarar su preocupación, pero tampoco la esquivó. "¿No te parecieron interesantes las metáforas empleadas?, ¿no te gustó la forma de trabajo?"

Con honestidad, Juan le explicó que esos rodeos lo aburrían y que no entendía para qué servían. Además, a él siempre le había ido bien en matemática sin ninguna necesidad de todo eso.

Juan: *Se me ocurre que usted colocó esos ejemplos para los alumnos a los que les cuesta entender, pero yo no creo que con eso hayan aprendido más. Para ellos* *sería más fácil memorizar la fórmula, que no es larga, y practicar aplicándola muchas veces.*

Roxana le rebatió con energía. Ella no definía su estrategia metodológica pensando solo en una parte de sus alumnos. Todos sus alumnos se verían beneficiados por este enfoque. Le recriminó a Juan su falta de participación en las actividades de aprendizaje que ella preparó, porque así no podía saber siquiera cuánto más habría aprendido con ello, sobre todo en profundidad y claridad de conceptos muy complejos, como son los relacionados con variables aleatorias.

Juan: (la interrumpe con un dejo de desesperación) *¿No habría sido más sencillo para todos, que usted nos hubiera explicado la fórmula, nos mostrara cómo se usa y luego nos diera ejercicios para practicar y ver si le entendimos?*
Roxana se arrepintió de su vehemencia y alentó a Juan a desahogarse, aunque fuera en contra de su trabajo, de cuya calidad ella estaba muy segura.

Juan: *Bueno, usted sabe que a mí me gusta la matemática y los problemas difíciles de resolver, pero siento que con su método nos atrasa y nos aparta del tema matemático. Yo tengo un amigo en el Cuarto C que vive cerca de mi casa, al que también le gusta la matemática; con él nos juntamos a estudiar y a resolver problemas de Olimpiadas. Por eso sé que este tema el profesor de ese curso ya lo tiene visto hace rato. A lo mejor usted alcanza igual a ver toda la materia, pero nunca vamos a llegar a ver problemas difíciles, y eso es lo que a mí me interesa.*

"Los recreos son muy cortos y este tema bien largo", pensó Roxana al despedirse afectuosamente de Juan, prometiendo seguir esta conversación al día siguiente. Su gran seguridad, sin embargo, fue dando lento paso a una avalancha de preguntas que, extrañamente, no se había formulado antes: ¿Era esta metodología buena para todos sus alumnos? ¿Lo era para Juan, como ella había aseverado, y para los alumnos más lentos? ¿Qué hacer con quienes se sienten incómodos, obligados a exponerse en actividades que les parecen impropias de su edad o estatus de buen alumno? ¿Cómo revertir ideas reduccionistas acerca de la matemática, que las pruebas tienden a fortalecer?

A pesar de lo que había asegurado respecto de la prueba de nivel, tenía realmente pocas esperanzas de que evaluara aquello que le había parecido tan importante. Son muchos colegas, la tradición pesa y ella no se había jugado por convencerlos de sus ideas. La última vez que intentó que valorizaran la profundidad de los aprendizajes que se obtenían con los métodos que ella propiciaba, le respondieron que tal superioridad también debería verse reflejada en mejores resultados en pruebas normales. Si lo que proponía era crear la vara a su medida, no podía pretender medirlos a todos ellos con esa vara.

Esta vez decidió no dejarlo pasar como en aquella ocasión. Es cierto que no le gustan las comparaciones y que ella puede disponer de un tiempo para desarrollo profesional, que sus colegas no tienen. Pero consideró que las cosas habían llegado más lejos y se sintió comprometida con sus alumnos. Su estrategia de no entrar en discusiones teóricas con sus colegas y de traer buenos problemas preparados, resultó muy exitosa. De las 45 preguntas de la prueba de nivel, que cubrió la materia de todo el semestre, ella logró poner 10 de las 12 de estadística, y lamentó no haber preparado más del mismo estilo en otras materias, pues casi no tuvo resistencia.

Los resultados, sin embargo, no mostraron lo que ella esperaba. La verdad es que sus alumnos no se distinguieron de los demás, ni siquiera en las preguntas que ella había puesto. La leve superioridad caía dentro del "error estadístico" y no permitía sacar conclusiones. Pensó en investigar en mayor profundidad, buscar las diferencias (que estaba completamente segura que se debían manifestar), observando los desarrollos realizados por los estudiantes, en las únicas dos preguntas de desarrollo que había puesto. Revisó sus preguntas y ahora no le parecieron todas tan novedosas o apropiadas a sus fines de establecer esa diferencia. Volvió a mirar la lista con los resultados de su curso: Juan tenía un siete -con todo lo que había reclamado- y Manuel un honorable 5, lo que en su caso era un rotundo éxito. No pudo seguir con su revisión, pues la interrumpió Juan, quien llevaba un buen rato observándola, mientras comía su colación en el patio, a pocos pasos del escaño donde Roxana se entibiaba al sol. *"¿No quedó conforme, profesora, con los resultados de la prueba?"*.

Roxana se apuró en rechazar tal idea, le mostró la nota de Manuel y la suya, le recordó su preocupación por el tipo de problemas y que por favor mirara los problemas que ella justo estaba revisando. Juan no releyó los problemas, los recordaba bien, y suspicaz con la actitud de Roxana, la molesta con otra pregunta: *"¿Así que estos problemas los puso usted? La verdad no me parecen tan distintos de otros, así son en general los problemas de esta materia, con datos y contextualizados, no veo la diferencia y menos la necesidad de los balancines. Yo creo que a mí me fue bien, porque estudié como siempre y porque hice hartos ejercicios. Acéptelo, profesora, con su método o con otro, al final igual en la prueba les va mejor a los que se prepararon más haciendo más ejercicios, no a los que más participan en sus actividades"*.

Roxana sabía que esta conversación no podía terminar en este punto, pero Juan (que intuyó lo mismo) aprovechó el timbre para volver rápidamente a su sala.

Lamentó no haber tocado el tema al día siguiente, como le prometió a Juan aquella vez. Detrás de estas discusiones se escondían cosas profundas respecto de lo que es la matemática y en qué consiste aprender. Rechazó la idea de que pudiera tratarse solo de una impresión subjetiva suya, que los alumnos aprendían más y mejor, y que la realidad objetiva se limitaba a que estaban más entretenidos en la clase.

En cambio, tuvo que admitir la posibilidad de que, partiendo al revés, promoviendo primero la destreza operatoria, se familiarizaran con un concepto y alcanzaran también la comprensión profunda que ella buscaba sobre esta otra base de “conocimiento concreto”. ¿Había aprendizajes realmente distintos, alcanzables con su metodología y no con esta otra? ¿De qué aprendizajes se trataba? ¿Qué tipo de preguntas sería necesario hacer para constatar que dichos aprendizajes diferentes realmente ocurrieron?

Recordó no haber encontrado nada muy inspirador en los facsímiles de PSU revisados y se propuso buscar en las famosas pruebas internacionales TIMSS y PISA. Decidió que esa misma tarde se sentaba al computador y comenzaba por escribir una a una las preguntas, dudas, inquietudes y hasta críticas recibidas que se le agolpaban en la cabeza. Luego las abordaría buscando ayuda, por supuesto. Pensó en el profesor de la Universidad, que le abrió el bello mundo de las metáforas; lo visitaría. Necesitaba discutir esto con alguien más que con Juan. Pensó también en invitar a Nancy, una colega joven, con poco tiempo disponible, pero inquieta y bien dispuesta a innovar. Su propio tiempo tampoco era tanto y dudó de estarse imponiendo tareas sobredimensionadas. “No por mucho madrugar amanece más temprano” le decía su abuela, para frenar sus ímpetus. A lo que ella respondía con un chiste absurdo, pero poderoso, que recordó ahogando la carcajada: “La esperanza es lo último que se pierde”.

Notas didácticas

Este caso trata sobre metáforas para entender la Esperanza o el promedio estadístico. En general, se cree que las metáforas están bien para niños pequeños, pero en nivel de secundaria esto ya no es tan útil como tener un dominio algebraico potente, que permite modelar y resolver cualquier problema.

Pero en el entendimiento de los objetos matemáticos, las metáforas son de total necesidad, incluso entre los matemáticos profesionales, aunque a veces sean metáforas entre objetos matemáticos.

Los objetivos de este caso son discutir y reflexionar sobre estos temas: ¿Qué tan complejo es el concepto de *esperanza?* ¿Cómo lo explicaría usted? ¿Cree que el punto de equilibrio estático es una buena metáfora para introducir el concepto de esperanza? ¿Qué precauciones tomaría? ¿Sería de utilidad para iluminar el concepto, después que éste haya sido aprendido por métodos tradicionales?

Una actividad interesante de realizar en el Taller de casos, con docentes en ejercicio, es que cada cual recopile todos los argumentos de Juan, no respondidos por Roxana, e intente responderlos. En particular, las siguientes interrogantes: ¿Por qué se están quedando atrás como curso? ¿Por qué los alumnos que estudian y resuelven ejercicios son los que obtienen buenos resultados y no los que participan en sus actividades? ¿Cómo influyen las evaluaciones externas como pruebas de nivel, PSU[2] o SIMCE en la planificación de actividades? ¿Hay que alinearse con estas pruebas o debe buscarse un camino propio, independiente de éstas? ¿Cómo describiría los aprendizajes que Roxana busca con sus métodos? ¿Se podrán evaluar? ¿Qué estrategias de evaluación sugiere para ello?
Hacer lo mismo con las preguntas de Roxana: ¿Con quién debería conversar Roxana estos temas? ¿Le bastará sostener conversaciones o debe planificar un trabajo más sistemático para responder a sus preguntas? ¿Necesita a sus colegas para ello o basta con que le permitan poner preguntas en las pruebas?

Aspectos Matemáticos

Los aspectos matemáticos de este caso son secundarios, lo central es un problema pedagógico. Un problema importante a responder, que no es trivial, y que en general lleva bastante tiempo es ¿Cómo pasar de la metáfora del pivote del promedio estadístico, a la fórmula del promedio?

[2]Prueba de Selección Universitaria.

Aspectos Pedagógicos

Hay visiones del caso, interesantes de abordar que tienen que ver con las creencias que tienen los docentes respecto de las matemáticas.

¿Cuáles son las distintas visiones de Juan y de Roxana acerca de la matemática y lo que significa aprender? ¿Cree que Roxana tiene argumentos para convencer a Juan que a él también le sirve entender esta metáfora? ¿Qué otras alternativas tiene Roxana para no caer en "la tradicional forma de presentar los contenidos expositivamente y luego realizar extensas ejercitaciones" tratándose del concepto de esperanza?

Preguntas para guiar la reflexión

1. ¿Qué tan complejo cree ud. es el concepto de esperanza?
2. ¿Cómo lo explicaría usted?
3. ¿Cree que el punto de equilibrio estático es una buena metáfora para introducir el concepto de esperanza?
4. ¿Qué precauciones tomaría ud.?
5. ¿Sería de utilidad para iluminar el concepto, después que éste haya sido aprendido por métodos tradicionales?
6. ¿Con quién debería conversar Roxana estos temas?
7. ¿Le bastará sostener conversaciones o debe planificar un trabajo más sistemático para responder a sus preguntas?
8. ¿Necesita a sus colegas para ello o basta con que le permitan poner preguntas en las pruebas?
9. ¿Es importante utilizar metáforas con estudiantes de enseñanza media, o eso es un asunto de enseñanza básica?

Caso 2: Raíces de la ecuación cuadrática

Pablo es un Licenciado en Matemáticas de una prestigiosa universidad del país. Realizó un año y medio de cursos de pedagogía, para obtener el grado de Licenciado en Educación y el título de Profesor en Matemáticas. En su carrera tomó cerca de 40 cursos de matemáticas puras, entre ellos 3 cursos de cálculo, 6 de álgebra, 3 de análisis, topología, variable compleja, ecuaciones diferenciales, lógica, teoría de conjuntos, probabilidades y estadísticas, teoría de grafos, y varios otros. Él siente que mientras más sabe matemáticas, más confianza tiene y esto se transmite a los estudiantes. Ha hecho clases, desde que egresó hace ya más de 15 años, en el mismo colegio, del cual es ex - alumno.

El colegio es su segundo hogar, de hecho lleva más tiempo allí que casi todos sus colegas, y aún le cuesta llamar por el nombre a sus antiguos profesores. Es el primero en llegar y el último en irse.

Tiene reservada una parte de su sueldo para comprar libros. La mayoría de los meses compra libros de matemática o de enseñanza de las matemáticas, a veces de ciencia y pocas veces de historia y filosofía de la ciencia.

Todos los veranos hace cursos de perfeccionamiento, a veces más de uno, y siempre los hace en matemáticas puras y algunas veces en didáctica de las matemáticas. No confía mucho en esos cursos, suele decir que son "puras perogrulladas", y que la didáctica no sirve para nada si no se sabe matemática. "Cuando uno sabe matemáticas bien, puede moverse de una explicación a otra con bastante confianza, porque sabe de lo que está hablando. Puede entender en forma profunda por qué se están equivocando los estudiantes y puede ayudarles. El resto es puro talento natural, se nace para ser *profe*. Uno desde chico sabe que quiere enseñar, le enseña a sus hermanos, a sus compañeros". Pablo siempre fue el mejor ayudante que tuvo el Departamento de Matemáticas de la universidad y los estudiantes llenaban las salas donde él estaba, en desmedro de las secciones paralelas. Alguna vez se creyó que Pablo "soplaba" o ayudaba de mala forma a los estudiantes, pero solo fue un rumor levantado por algunos envidiosos colegas. Sus clases eran las mejores y punto. Lo interesante es que no solo los estudiantes de matemáticas lo preferían, sino que también los de biología, química, física, e incluso los de Bachillerato, que tienen fama de ser más escolares.

Los últimos cuatro años había hecho clases solo a los cuartos medios (4 en total). Además, realizaba los talleres de PSU para Tercero y Cuarto Medio. Al mismo tiempo dirige el Departamento de Matemáticas. Sin embargo, este año hace clases a dos terceros medios, dos cuartos medios, los talleres de PSU y la jefatura de departamento. Además, le han entregado una jefatura de tercero medio.

Como hace tiempo que no hacía clases en tercero, revisa los OF y los CMO de ese curso para organizar sus clases. Lee que en el curso regular de matemáticas aparece *"Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas"* y en el curso de formación diferenciada lee: *"Deducción de la fórmula para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática".*

Esto le sorprende pero no tanto, porque ya le había parecido extraño en el pasado, pero no recordaba cuán curioso era el Marco Curricular en este punto. "De la completación de cuadrados a la deducción de la fórmula hay un épsilon, porque no está todo junto. Además, lo más importante y lo más interesante es la completación de cuadrados, de esto deriva todo", reclamaba Pablo para sí.

Le pregunta a su colega Carlos, que está dictando los mismos tópicos que él pero en cursos paralelos, cómo lo ha hecho para separar aguas entre el curso de formación general y el diferenciado en el tema de las soluciones a la ecuación de segundo grado. Carlos le dice que él sigue el Marco Curricular y efectivamente, en el curso regular llega hasta completación de cuadrados. La fórmula de las raíces y su deducción lo deja para el diferenciado. Pablo le pregunta si nunca ha dejado el tema de las raíces de la función cuadrática en el curso regular, incluso lo que aparece en los CMO del diferenciado. Carlos dice que no, pues no le alcanza el tiempo, pero le parecería buena idea; sin embargo, le sugiere no hacerlo si pretende cubrir todo el currículum.

Pablo realiza sus clases como acostumbra, haciendo preguntas muy interesantes y profundas. No utiliza computadoras, solo tiza y pizarra, y el ejercicio continuo de hacer clases participativas, con muchas preguntas y contra preguntas. Alienta a quienes tienen buenas ideas a que salgan a la pizarra a mostrarlas. También a los que presentan un error típico, porque sin duda muchos otros están en la misma situación, y al ver a un par mostrando su razonamiento errado ante todos, se reconocen. Cuando Pablo dialoga con el alumno que está en la pizarra, le da todo el tiempo para que explique su razonamiento, destaca sus valores y le aclara por qué está cometiendo un error y por qué es muy común que ocurra. De este modo logra aprendizajes duraderos y profundos. Él dice que esto se puede lograr solo si se sabe mucha matemática y se puede hacer perfectamente bien si se tiene el "don" natural para la enseñanza. Personalmente, cree que no lo tiene, pero imita en lo que puede a sus "maestros", como llama a sus buenos profesores. Sin embargo, reconoce que algunos son maravillosamente irrepetibles.

Por ejemplo, cuando propuso el problema de encontrar las raíces de $(x+1)^2 = 0,25$, los dejó trabajar unos minutos en su puesto y preguntó las soluciones, hubo un grupo que afirmó que la solución era $\frac{-1}{2}$ y otro que las soluciones eran $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-3}{2}$. Entonces invitó a la pizarra a un representante del primer grupo a mostrar su razonamiento, y sale Manuel.

Manuel: *Yo, profesor, sé que* $0,25$ *es un cuarto, así que escribí la ecuación como:*

$$(x+1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Entonces me preguntan por un número $x+1$ *que al cuadrado sea* $\frac{1}{4}$*, y yo sÈ que ese*
número es $\frac{1}{2}$*, por lo tanto* $x+1 = \frac{1}{2}$*. Restando menos uno a ambos lados se obtiene:*

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Pablo: *Muy bien, Manuel,* (mientras se escucha un bullicio indicando que está mal el razonamiento de Manuel) *¿pero por qué dices que si un número al cuadrado es* $\frac{1}{4}$*, entonces ese número es* $\frac{1}{2}$*?*

Manuel: Porque así es poh, profe. Mire:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

Pablo: *Muy bien. Pero tú dices que el cuadrado de* $\frac{1}{2}$ *es un cuarto, lo cual es correcto. Pero yo pregunto otra cosa, ¿si es que hay un número que al cuadrado es* $\frac{1}{4}$*, es necesariamente ese número* $\frac{1}{2}$*? Hagámoslo más simple, si un número al cuadrado es 1, ¿cuál es el número?*

Manuel: *Puede ser el* 1 *o el* -1*, como vimos en la clase anterior.*

Pablo: *Muy bien. Ves, no necesariamente el* 1 *es la única solución, el* -1 *también lo es. Entonces te pregunto de nuevo,* mientras todo el mundo está atento como espectadores de un teatro, *si es que hay un número que al cuadrado es* $\frac{1}{4}$*, ¿es necesariamente ese número* $\frac{1}{2}$*?*

Manuel: *No, también puede ser* $-\frac{1}{2}$.

Pablo: *¿Les parece?*

El curso: *¡Síííííííí!*

Pablo invita a Manuel a la pizarra y le agradece. También le ofrece a uno de los alumnos que respondió afirmativamente que resuelva el problema inicial.

Jorge: *Como dijo Manuel, la ecuación a resolver es:*

$$(x+1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Entonces me preguntan por un número $x+1$ *que al cuadrado sea* $\frac{1}{4}$*, y ya sabemos que ese número puede ser* $\frac{1}{2}$ *o* $-\frac{1}{2}$*, por lo tanto* $x+1=\frac{1}{2}$ *o bien* $x+1=-\frac{1}{2}$*. Restando uno a ambos lados de la ecuación se obtiene:*

$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = -\frac{3}{2}.$$

Pablo: *Muy bien Jorge* (mientras el curso asentía con la cabeza). *Pero, ¿por qué dices que si un número al cuadrado es* $\frac{1}{4}$*, entonces ese número es* $\frac{1}{2}$ *o es* $-\frac{1}{2}$*?*

Jorge: *Porque recién lo vimos.*

Pablo: *¿Pero cómo sabes que no hay más raíces?*

Jorge: *Porque todo número positivo tiene dos raíces, una positiva y otra negativa.*

Pablo: *¿Por qué?*

Jorge: *Porque* x *al cuadrado es lo mismo que ?*x *al cuadrado, por lo tanto si* x *al cuadrado es* a*, entonces ?*x *al cuadrado también es* a*.*

Pablo: *Muy bien, Jorge. Pero de nuevo estoy preguntando al revés. Tú me acabas de decir que si un número tiene una raíz, entonces su inverso aditivo* *también es raíz. Lo cual está muy bien y te felicito, lo hiciste muy rápido. Pero, ¿cómo sabes que no hay otro número por ahí cuyo cuadrado sea a?*

(No se escuchaba un murmullo en la sala).

Pablo: *Además sabemos que si x es raíz de a, entonces ?x también lo es. Otra pregunta interesante sería ¿por qué x existe? Es decir, si tenemos $a > 0$ ¿cómo podemos asegurar que existe x tal que su cuadrado sea a?*

(El silencio se hizo sepulcral).

A medida que fue avanzando la clase, solucionaron el problema de que a lo más hay dos raíces de la ecuación $x^2 = a$. Pero a la pregunta "Si a es positivo, ¿es cierto que existe número real x tal que $x^2 = a$? " no hubo acercamientos muy correctos. Sabiendo lo profundo y complicado del tema, Pablo les deja esa pregunta abierta hasta la próxima clase, para que la maduren un poco más.

Pablo decide hacerle caso a su colega y prefiere no deducir la fórmula en el curso regular y dejarla solo para el diferenciado. Sin embargo, le dedica un tiempo importante a la completación de cuadrados.

Usó la completación de cuadrados para graficar, por ejemplo, la función real $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Sus alumnos, en su mayoría, podían completar el cuadrado y hacer los desplazamientos necesarios para graficar, es decir, escriben $f(x) = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$, que corresponde a desplazar el gráfico de $y = x^2$, un puesto hacia arriba y uno hacia la izquierda. Así se ve naturalmente el vértice, sin tener que aprenderse la fórmula de memoria. Sin embargo, sus estudiantes se quejaban de que a veces era difícil completar el cuadrado y eso hacía lento el proceso.

Lo usó también para decidir si una ecuación cuadrática tenía raíces o no, por ejemplo, para decidir si $0 = x^2 + x + 1$ tiene raíces reales; en general, después de un rato, sus alumnos podían argumentar diciendo cosas como:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

lo cual es siempre mayor o igual a $\frac{3}{4}$, pues $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ es positivo o cero.

Le ocupó varias clases que los estudiantes pudiesen completar cuadrados con cierto dominio, aunque algunos seguían quejándose.

Cuando dedujo la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática, en el curso diferenciado, algunos estudiantes le decían: *"Profe, entonces pongo los valores de a, b y c en la fórmula y listo y tanto que leseamos con completar cuadrados, nos hubiese dicho antes, pobres cabros que no están en el electivo"*.

Desde luego que todos los estudiantes, en el diferenciado o no, comenzaron a usar la fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas; los del curso diferenciado ya habían corrido la voz de esta "papita" y Pablo lo permitía, ¿cómo impedirlo?

Para la prueba del tema de funciones y ecuaciones cuadráticas, los resultados fueron buenos, pero no tanto. Comparados con el curso de Carlos, los resultados fueron similares. Sin embargo, Carlos pudo observar que en los problemas rutinarios de cálculo de raíces de una ecuación cuadrática, o de decidir la naturaleza de las raíces, o de gráfico de una función cuadrática, aquellos estudiantes que usaron sistemáticamente la completación de cuadrados, cometieron muy pocos errores; en cambio los otros cometieron varios errores al reemplazar los parámetros en las fórmulas de vértices, de raíces y de discriminante.

Pablo quedó muy satisfecho con el resultado, pero se quedó un poco preocupado, *"tal vez con los del diferenciado, en vez de ir avanzando con la fórmula, estamos retrocediendo"*.

Notas didácticas

Este caso tiene varias aristas. Una de ellas trata acerca del desconcierto que existe al confundir "p implica q" con "q implica p" y con "p es equivalente a q" que aparece en varios ámbitos. Por ejemplo, en inecuaciones es muy común ver en variados textos:

$$x + 1 > 2x + 3 \Rightarrow -2 > x.$$

Por lo tanto el conjunto solución es $(-\infty 2)$.

También aparece en el Teorema de Pitágoras, que la mayoría de las veces se expresa como:

"Si a, b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$ "pero se entiende como una equivalencia, lo que es cierto, pero su enunciado sería otro.

Aspectos Matemáticos

En este caso, el conflicto de "implica" versus equivalencia" se aprecia en el diálogo de Pablo con sus estudiantes:

Pablo: *¿Pero cómo sabes que no hay más raíces?*

Jorge: *Porque todo número positivo tiene dos raíces, una positiva y otra negativa.*

Pablo: *¿Por qué?*

Jorge: *Porque x al cuadrado es lo mismo que ?x al cuadrado, por lo tanto si x al cuadrado es a, entonces ?x al cuadrado también es a.*

Pablo: *Muy bien, Jorge. Pero de nuevo estoy preguntando al revés. Tú me acabas de decir que si un número tiene una raíz, entonces su inverso aditivo también es raíz. Lo cual está muy bien y te felicito, lo hiciste muy rápido. Pero, ¿cómo sabes que no hay otro número por ahí cuyo cuadrado sea a?"*

Pablo les hacía una pregunta y los estudiantes responden por el recíproco.

Sin duda, una arista importante es la contraposición entre "completación de cuadrados" y las fórmulas del vértice de la parábola, la fórmula del discriminante y la fórmula de las raíces.

Aspectos Pedagógicos

Otra arista interesante son las creencias de Pablo. ¿Será cierto que para ser buen profesor basta saber harta matemática y tener un don natural para el diálogo y la enseñanza? ¿Se podrá ser buen profesor sin ese don natural? ¿Se podrá aprender cómo ser buen profesor?

Preguntas para guiar la reflexión

1. ¿Valdrá la pena gastar tanto tiempo en la completación de cuadrados, si al final con las fórmulas pueden hacer todos los problemas de igual manera?
2. ¿Con cuál postura se obtendrán mejores y más duraderos resultados?
3. ¿Cómo hacer para motivar, en la presencia de ambos métodos de solución, que se use la completación de cuadrados?
4. ¿Podría usted elaborar un problema, de tal forma que quienes lo resuelven usando completación de cuadrados, tengan más opciones de responder correctamente que quienes usan la fórmula?
5. ¿Cuál es el error en la siguiente frase

"$x + 1 > 2x + 3 \Rightarrow -2 > x$ por lo tanto el conjunto solución es $(-\infty, -2)$" ?

6. ¿Puede demostrar ud. que $x^2 = a$ tiene solo dos soluciones?

Una actividad interesante puede ser invitar a los profesores en ejercicio a responder las preguntas que Pablo dejó abiertas a sus estudiantes.

Caso 3: Demostraciones en clases de matemática

María Eugenia entró a estudiar Pedagogía en Matemática, pues siempre quiso enseñar y era buena en esta disciplina. Solía enseñarles a sus compañeras del liceo, les mostraba formas alternativas de solución, distintas a la única que mostraba el profesor. Tenía paciencia y dedicación y, en general, le parecía una tarea simple hacer que hasta sus compañeras más "negadas" para las matemáticas, obtuvieran notas dignas en las pruebas.

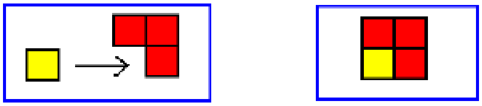
Sin embargo, cuando entró a la universidad, su primera nota en Cálculo fue un 2,5. Recién ahí se dio cuenta que la matemática que había visto en el colegio no es comparable a la de la universidad. Las demostraciones le aterraban al principio, y casi todas sus guías y pruebas estaban plagadas de ellas. En Álgebra no empezó mejor, su primera nota fue un 3,3. Con el tiempo fue mejorando hasta convertirse en una de las mejores alumnas de la clase, y de nuevo se convirtió en la que le enseñaba a sus compañeros.

Comenzó a apreciar las demostraciones, hasta convencerse que son una parte fundamental de las matemáticas. De hecho, llegó a decir *"uno al final de la enseñanza media no puede saber si le gustan o no las matemáticas, porque hasta ese entonces no las ha conocido"*.

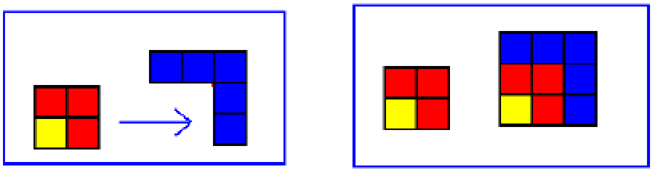
Con esta idea, en su vida laboral hacía demostraciones en todos los tópicos que podía, y buscaba o inventaba demostraciones accesibles a sus estudiantes, en cada nivel correspondiente.

Este año está impartiendo, entre otros, matemáticas para un curso de Primero Medio, y en la unidad de álgebra aparecen **conjeturas y argumentación de la regla general de secuencias numéricas**. Ella ve en esto una gran oportunidad para hacer demostraciones. Revisa el texto que entregó el MINEDUC y ve algunas cosas que no le gustan, por ejemplo, para demostrar que la suma de los primeros n números impares es n^2 , aparece lo siguiente:

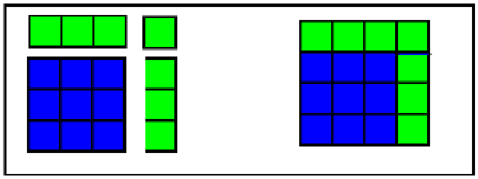
Si sumamos el primer cuadrado con los del primer saco, lo podemos hacer así:



De modo que la suma de 1 y 3 cuadraditos forman el cuadrado de lado 2. Ahora si sumamos el tercer saco resulta la siguiente figura, es decir un cuadrado de lado 3.



Así si ya formamos un cuadrado de lado n con los primeros n impares, necesitamos agregarle n cuadrados a cada lado y un cuadradito en un vértice para formar el siguiente cuadrado, es decir, $n+n+1=2n+1$. De este modo siempre se obtendrá un cuadrado al sumar los primeros números impares.



Por lo tanto la suma de los primeros números impares es un cuadrado.

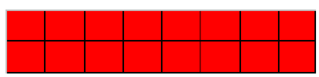
A María Eugenia esto le parece muy bonito, pero se pregunta: *"¿constituye esto una demostración?"*. Para ella, el autor hace trampa, esconde un poco la inducción en la frase:

Así si ya formamos un cuadrado de lado n con los primeros n impares, necesitamos agregarle n cuadrados a cada lado y un cuadradito en un vértice para formar el siguiente cuadrado, es decir, $n + n + 1 = 2n + 1$.

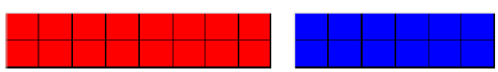
En otra parte del libro, para demostrar que la suma de dos números pares es par, hace lo siguiente:

La suma de dos números pares es par.

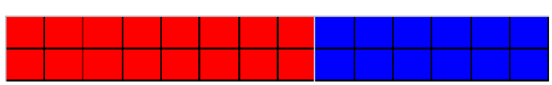
Esa misma propiedad la podemos ver geométricamente: imaginémonos a un número par como dos filas de la misma cantidad de baldosas.



Ahora si tomamos dos números pares, estos los podemos ver como dos juegos de baldosas como el de arriba, pero tal vez de distinto largo.



La suma de esos dos números pares es el número que resulta de pegar estas baldosas, que como se ve de nuevo son dos filas del mismo número de baldosas, es decir, un número par.



De nuevo cree que el autor *"se está pasando de listo"*; él dice *"imaginémonos a un número par (cualquiera) como dos filas de la misma cantidad de baldosas"*, pero a la hora de dibujar solo dibuja $8 = 2 \times 4$, así que su demostración no es tan general como pretende.

De modo que ella se salta esa representación geométrica y solamente se queda con las algebraicas, que el mismo libro también las provee; por ejemplo, en clase, solo hace la versión algebraica del libro, respecto a la suma de pares:

Ahora bien si tenemos dos números pares N y M, entonces N es el doble de un número entero y M de otro número entero. Es decir, $N = 2n$ y $M = 2m$ para ciertos números enteros n y m. Entonces $N + M = 2n + 2m$. Por otra parte

$$2(n+m) = 2n + 2m,$$

entonces

$$N + M = 2n + 2m = 2(n+m)$$

es decir, $N + M$ es el doble del número entero $n + m$, luego $N + M$ es par. En definitiva hemos demostrado que

La suma de dos números pares es par.

Luego deja dos problemas planteados en la pizarra, para que lo resuelvan en grupo:

1. Demuestra que la suma de dos números impares es par.
2. Demuestra que la suma de tres números consecutivos es múltiplo de tres.

Algunos estudiantes, los más motivados por las matemáticas, trabajan afanosamente por hacer la actividad. Uno de ellos, Leonardo, terminó muy rápido, y para el segundo problema le muestra su desarrollo:

$$n - 1 + n + n + 1 = 3n.$$

María Eugenia: *Muy bien, Leonardo, pero te ruego que expliques los pasos y escribas la conclusión.*

Leonardo, un poco lateado, hace lo que le dice la profesora. María Eugenia vuelve a ver el trabajo de su alumno y le dice: *"Esto Leonardo, es el corazón de las matemáticas: las demostraciones"*.

Leonardo: (asombrado) *"Sabe, profesora, esto me parece bastante fome, yo prefiero los problemas difíciles, los que me hacen pensar. Estas cuestiones yo las hago siguiendo lo que usted hizo antes. Solo repito lo que ha hecho, y lo hago no porque me guste, sino porque tengo que hacerlo pa? sacarme buenas notas. Si usted no hubiese hecho el ejemplo de los pares, a mí no se me ocurre ni como talla, cómo hacer el problema 2. Además, el 1 lo sé desde chiquitito, que dos impares suman par, lo sé desde Tercero Básico más o menos, y demostrarlo ahora me parece pérdida de tiempo. Si esto es el corazón de las matemáticas, parece que voy a repensar ser matemático"*.

María Eugenia, queda preocupada y en realidad reconoce que para aprender a demostrar, ella misma repetía modelos ya hechos; en cálculo ajustaba el épsilon tal como lo hacía el profesor o los textos. Suena la campana, despide a los estudiantes y se queda sentada en su escritorio, sin saber qué hacer.

Notas didácticas

Este caso trata acerca de las demostraciones en la enseñanza media, desde al menos tres puntos de vista, no necesariamente muy disjuntos. Uno de ellos presenta el conflicto de ¿qué es lo que entendemos o aceptamos como demostración en enseñanza media o incluso en básica?, ¿puede un argumento geométrico convertirse en una demostración de una propiedad algebraica?

Otra perspectiva muy relacionada con la anterior, tiene que ver con hasta dónde llegar en profundidad en la cadena deductiva. ¿Cuáles son las herramientas que tienen? ¿Qué aceptamos como sabido? ¿Cuáles son los axiomas y cuáles los teoremas? ¿Para una demostración del Teorema de Pitágoras, asumimos como ciertos los postulados de Euclides? También, cuán necesario y realista es hacer y pedir demostraciones a los estudiantes de enseñanza media. ¿Logra esto aprendizajes significativos o se vuelve una mecanización y repetición de procedimientos entregados por el profesor?

Los objetivos de este caso son discutir y reflexionar sobre los puntos arriba mencionados y otros que surjan de la conversación. Se sugiere invitar a los profesores del taller a que cuenten su experiencia propia con las demostraciones: ¿Les ocurrió algo similar a María Eugenia, cuando entraron a la universidad? ¿Cuál es su apreciación con relación a las demostraciones?

Aspectos Matemáticos

Es importante discutir acerca de las demostraciones que sugiere el texto que consultó María Eugenia, y si en particular ellos las consideran demostraciones o no. Los argumentos en este sentido deben ser claros y ojala que la intervención del Facilitador sea mínima, para que se entreguen todas las visiones, sin mayores prejuicios.

Aspectos Pedagógicos

Es interesante discutir sobre las creencias de María Eugenia. Analizar la afirmación: *"Esto, Leonardo, es el corazón de las matemáticas: las demostraciones"*. Discutir acerca de la importancia de las demostraciones en matemática y la importancia de las demostraciones en la enseñanza de la matemática. ¿Las demostraciones se hacen para asentar la verdad? ¿Tienen algún objetivo formativo? ¿Cuáles demostraciones hacer o proponer? ¿En qué tópicos, en qué momento?

Preguntas para guiar la reflexión

1. ¿Cree ud. que *"las demostraciones están en el corazón de las matemáticas"?*
2. ¿Qué sentido tiene hacer demostraciones de resultados más o menos obvios o demasiado intuitivos, como *"la suma de dos números pares es par"?*
3. ¿Para qué hacer demostraciones en enseñanza media?
4. ¿Las demostraciones se hacen para asentar la verdad?
5. ¿Tienen algún objetivo formativo?
6. ¿Cuáles demostraciones hacer o proponer?
7. ¿En qué tópicos, en qué momento?
8. ¿Cuál es su opinión respecto a la última intervención de Leonardo: *"Sabe, profesora, esto me parece bastante fome, yo prefiero los problemas difíciles, los que me hacen pensar. Estas cuestiones yo las hago siguiendo lo que usted hizo antes. Solo repito lo que ha hecho, y lo hago no porque me guste, sino porque tengo que hacerlo pa? sacarme buenas notas. Si usted no hubiese hecho el ejemplo de los pares, a mí no se me ocurre ni como talla, cómo hacer el problema 2. Además, el 1 lo sé desde chiquitito, que dos impares suman par, lo sé desde Tercero Básico más o menos, y demostrarlo ahora me parece pérdida de tiempo. Si esto es el corazón de las matemáticas, parece que voy a repensar ser matemático"?*
9. ¿Considera ud. que las argumentaciones expuestas por el texto constituyen demostraciones?

Bibliografía

[1] Barnes, L et al. *"Teaching and the case method"*, Text, Cases and Readings. Third Edition. Harvard Business School Press. Boston, Massachusetts. USA. 1987.

[2] Doyle, W.: *" Case methods in the education of teachers"*. Education Quarterly. Vol 17. Núm 1. 1990

[3] Flyvbjerg, B.: *"Five misunderstandings about case-study research"*. Qualitative Inquiry. Vol. 12, núm 2. Abril de 2006.

[4] Friedberg, S et al. *"Teaching Mathematics in Colleges and Universities: Case Studies for Today?s Classroom"*. Conference Board of the Mathematical Sciences. Issues in Mathematical Education. Vol. 10. American Mathematical Society. Mathematical Association of América. 2001.

[5] Friedberg, S. *"Teaching Mathematics Graduate Students How to Teach"*.. Notices Amer. Math. Soc. 52 (2005), no.8, 842-847.

[6] Kleinfeld, J. *"Learning to think like a teacher: The study of cases.* In J, H. Shulman (Ed.), *Case methods in teacher education (pp. 33 ?49)*. New York: Teachers College Press. 1992.

[7] Merseth, K. *"Cases for decision making in teacher education"* ,In J. H. Shulman (Ed.), Case methods in teacher education (pp.50?63). New York Teachers College Press. 1992

[8] Merseth, K.: *"Cases and Case Methods in Teacher Education"* of Handbook of reserch on teacher education. Segunda Edición. Jhon Sikula editor. Association of Teacher Educators, Reston, VA. 1996.

[9] Merseth, K.: *"Windows on Teaching: cases of middle and secondary mathematics classroom"*Teacher College Press. 2003.

[10] OCDE. *"Revisión de políticas nacionales de educación. Chile"*. Centro para la Cooperación con los países no miembros de la OCDE. París, Francia.2004