





## Modelando Fenómenos de Evolución

**ISBN:** 978-956-306-066-9

**Registro de Propiedad Intelectual:** 200.532

**Colección:** Herramientas para la formación de profesores de matemáticas.

**Diseño:** Jessica Jure de la Cerda

**Diseño de Ilustraciones:** Catalina Frávega Thomas, Cristina Felmer Plominsky

**Diagramación:** Pedro Montealegre Barba, Francisco Santibáñez Palma

**Financiamiento:** Proyecto Fondef D05I-10211

**Datos de contacto para la adquisición de los libros:**

**Para Chile:**

1. En librerías para clientes directos.
2. Instituciones privadas directamente con:  
**Juan Carlos Sáez C.**  
Director Gerente  
Comunicaciones Noreste Ltda.  
J.C. Sáez Editor  
jcsaezc@vtr.net  
www.jcsaezeditor.blogspot.com  
Oficina: (56 2) 3260104 - (56 2) 3253148
3. Instituciones públicas o fiscales: [www.chilecompra.cl](http://www.chilecompra.cl)

**Desde el extranjero:**

1. Liberalia Ediciones: [www.liberalia.cl](http://www.liberalia.cl)
2. Librería Antártica: [www.antartica.cl](http://www.antartica.cl)
3. Argentina: Ediciones Manantial: [www.emanantial.com.ar](http://www.emanantial.com.ar)
4. Colombia: Editorial Siglo del Hombre  
Fono: (571) 3377700
5. España: Tarahumara, [tarahumara@tarahumaralibros.com](mailto:tarahumara@tarahumaralibros.com)  
Fono: (34 91) 3656221
6. México: Alejandría Distribución Bibliográfica, [alejandria@alejandrialibros.com.mx](mailto:alejandria@alejandrialibros.com.mx)  
Fono: (52 5) 556161319 - (52 5) 6167509
7. Perú: Librería La Familia, Avenida República de Chile # 661
8. Uruguay: Dolmen Ediciones del Uruguay  
Fono: 00-598-2-7124857

Modelando Fenómenos de Evolución | Pedro Gajardo

Universidad Técnica Federico Santa María

[pedro.gajardo@usm.cl](mailto:pedro.gajardo@usm.cl)

ESTA PRIMERA EDICIÓN DE 2.000 EJEMPLARES

Se terminó de imprimir en febrero de 2011 en **WORLD COLOR CHILE S.A.**

Derechos exclusivos reservados para todos los países. Prohibida su reproducción total o parcial, para uso privado o colectivo, en cualquier medio impreso o electrónico, de acuerdo a las leyes N°17.336 y 18.443 de 1985

(Propiedad intelectual). Impreso en Chile.



# MODELANDO FENÓMENOS DE EVOLUCIÓN

Pedro Gajardo

Universidad Técnica Federico Santa María





## Editores



**Patricio Felmer**, Universidad de Chile.  
Doctor en Matemáticas, Universidad de Wisconsin-Madison,  
Estados Unidos

**Salomé Martínez**, Universidad de Chile.  
Doctora en Matemáticas, Universidad de Minnesota,  
Estados Unidos

## Comité Editorial Monografías



**Rafael Benguria**, Pontificia Universidad Católica de Chile.  
Doctor en Física, Universidad de Princeton,  
Estados Unidos

**Servet Martínez**, Universidad de Chile.  
Doctor en Matemáticas, Universidad de Paris VI,  
Francia

**Fidel Oteíza**, Universidad de Santiago de Chile.  
Doctor en Currículum e Instrucción, Universidad del Estado de Pennsylvania,  
Estados Unidos

**Dirección del Proyecto Fondef D05I-10211**  
**Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática**



**Patricio Felmer**, Director del Proyecto  
Universidad de Chile.

**Leonor Varas**, Directora Adjunta del Proyecto  
Universidad de Chile.

**Salomé Martínez**, Subdirectora de Monografías  
Universidad de Chile.

**Cristián Reyes**, Subdirector de Estudio de Casos  
Universidad de Chile.

## Presentación de la Colección



La colección de monografías que presentamos es el resultado del generoso esfuerzo de los autores, quienes han dedicado su tiempo y conocimiento a la tarea de escribir un texto de matemática. Pero este esfuerzo y generosidad no se encuentra plenamente representado en esta labor, sino que también en la enorme capacidad de aprendizaje que debieron mostrar, para entender y comprender las motivaciones y necesidades de los lectores: Futuros profesores de matemática.

Los autores, encantados una y otra vez por la matemática, sus abstracciones y aplicaciones, enfrentaron la tarea de buscar la mejor manera de traspasar ese encanto a un futuro profesor de matemática. Éste también se encanta y vibra con la matemática, pero además se apasiona con la posibilidad de explicarla, enseñarla y entregarla a los jóvenes estudiantes secundarios. Si la tarea parecía fácil en un comienzo, esta segunda dimensión puso al autor, matemático de profesión, un tremendo desafío. Tuvo que salir de su oficina a escuchar a los estudiantes de pedagogía, a los profesores, a los formadores de profesores y a sus pares. Tuvo que recibir críticas, someterse a la opinión de otros y reescribir una y otra vez su texto. Capítulos enteros resultaban inadecuados, el orden de los contenidos y de los ejemplos era inapropiado, se hacía necesario escribir una nueva versión y otra más. Conversaron con otros autores, escucharon sus opiniones, sostuvieron reuniones con los editores. Escuchar a los estudiantes de pedagogía significó, en muchos casos, realizar eventos de acercamiento, desarrollar cursos en base a la monografía, o formar parte de cursos ya establecidos. Es así que estas monografías recogen la experiencia de los autores y del equipo del proyecto, y también de formadores de profesores y estudiantes de pedagogía. Ellas son el fruto de un esfuerzo consciente y deliberado de acercamiento, de apertura de caminos, de despliegue de puentes entre mundos, muchas veces, separados por falta de comunicación y cuya unión es vital para el progreso de nuestra educación.

La colección de monografías que presentamos comprende una porción importante de los temas que usualmente encontramos en los currículos de formación de profesores de matemática de enseñanza media, pero en ningún caso pretende ser exhaustiva. Del mismo modo, se incorporan temas que sugieren nuevas formas de abordar los contenidos, con énfasis en una matemática más pertinente para el futuro profesor, la que difiere en su enfoque de la matemática para un ingeniero o para un licenciado en matemática, por ejemplo. El formato de monografía, que aborda temas específicos

con extensión moderada, les da flexibilidad para que sean usadas de muy diversas maneras, ya sea como texto de un curso, material complementario, documento básico de un seminario, tema de memoria y también como lectura personal. Su utilidad ciertamente va más allá de las aulas universitarias, pues esta colección puede convertirse en la base de una biblioteca personal del futuro profesor o profesora, puede ser usada como material de consulta por profesores en ejercicio y como texto en cursos de especialización y post-títulos. Esta colección de monografías puede ser usada en concepciones curriculares muy distintas. Es, en suma, una herramienta nueva y valiosa, que a partir de ahora estará a disposición de estudiantes de pedagogía en matemática, formadores de profesores y profesores en ejercicio.

El momento en que esta colección de monografías fue concebida, hace cuatro años, no es casual. Nuestro interés por la creación de herramientas que contribuyan a la formación de profesores de matemática coincide con un acercamiento entre matemáticos y formadores de profesores que ha estado ocurriendo en Chile y en otros lugares del mundo. Nuestra motivación nace a partir de una creciente preocupación en todos los niveles de la sociedad, que ha ido abriendo paso a una demanda social y a un interés nacional por la calidad de la educación, expresada de muy diversas formas. Esta preocupación y nuestro interés encontró eco inmediato en un grupo de matemáticos, inicialmente de la Universidad de Chile, pero que muy rápidamente fue involucrando a matemáticos de la Pontificia Universidad Católica de Chile, de la Universidad de Concepción, de la Universidad Andrés Bello, de la Universidad Federico Santa María, de la Universidad Adolfo Ibáñez, de la Universidad de La Serena y también de la Universidad de la República de Uruguay y de la Universidad de Colorado de Estados Unidos.

La matemática ha adquirido un rol central en la sociedad actual, siendo un pilar fundamental que sustenta el desarrollo en sus diversas expresiones. Constituye el cimiento creciente de todas las disciplinas científicas, de sus aplicaciones en la tecnología y es clave en las habilidades básicas para la vida. Es así que la matemática actualmente se encuentra en el corazón del currículo escolar en el mundo y en particular en Chile. No es posible que un país que pretenda lograr un desarrollo que involucre a toda la sociedad, descuide el cultivo de la matemática o la formación de quienes tienen la misión de traspasar de generación en generación los conocimientos que la sociedad ha acumulado a lo largo de su historia.

Nuestro país vive cambios importantes en educación. Se ha llegado a la convicción que la formación de profesores es la base que nos permitirá generar los cambios cualitativos en calidad que nuestra sociedad ha impuesto. Conscientes de que la tarea formativa de los profesores de matemática y de las futuras generaciones de jóvenes es extremadamente compleja, debido a que confluyen un sinnúmero de factores y disciplinas, a través de esta colección de monografías, sus editores, autores y todos los que han participado del proyecto en cada una de sus etapas, contribuyen a esta tarea, poniendo a disposición una herramienta adicional que ahora debe tomar vida propia en los formadores, estudiantes, futuros profesores y jóvenes de nuestro país.

**Patricio Felmer y Salomé Martínez**  
**Editores**





## Agradecimientos



Agradecemos a todos quienes han hecho posible la realización de este proyecto Fondef: "Herramientas para la formación de Profesores de Matemáticas". A Cristián Cox, quien apoyó con decisión la idea original y contribuyó de manera crucial para obtener la participación del Ministerio de Educación como institución asociada. Agradecemos a Carlos Eugenio Beca por su apoyo durante toda la realización del proyecto. A Rafael Correa, Edgar Kausel y Juan Carlos Sáez, miembros del Comité Directivo. Agradecemos a Rafael Benguria, Servet Martínez y Fidel Oteiza, miembros del Comité Editorial de la colección, quienes realizaron valiosos aportes a los textos. A Guillermo Marshall, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile y José Sánchez, entonces Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción, quienes contribuyeron de manera decisiva a lograr la integridad de la colección de 15 monografías. A Jaime San Martín, director del Centro de Modelamiento Matemático por su apoyo durante toda la realización del proyecto. Agradecemos a Víctor Campos, Ejecutivo de Proyectos de Fondef, por su colaboración y ayuda en las distintas etapas del proyecto.

Agradecemos también a Bárbara Ossandón de la Universidad de Santiago, a Jorge Ávila de la Universidad Católica Silva Henríquez, a Víctor Díaz de la Universidad de Magallanes, a Patricio Canelo de la Universidad de Playa Ancha en San Felipe y a Osvaldo Venegas y Silvia Vidal de la Universidad Católica de Temuco, quienes hicieron posible las visitas que realizamos a las carreras de pedagogía en matemática. Agradecemos a todos los evaluadores, alumnos, académicos y profesores -cuyos nombres no incluimos por ser más de una centena- quienes entregaron sugerencias, críticas y comentarios a los autores, que ayudaron a enriquecer cada uno de los textos.

Agradecemos a Marcela Lizana por su impecable aporte en todas las labores administrativas del proyecto, a Aldo Muzio por su colaboración en la etapa de evaluación, y también a Anyel Alfaro por sus contribuciones en la etapa final del proyecto y en la difusión de los logros alcanzados.

**Dirección del Proyecto**



# Índice General



<b>Prefacio</b>	17
<b>Capítulo 1: Fenómenos de evolución a tiempo discreto</b>	21
1.1 Ecuaciones de recurrencia	27
1.2 Máxima captura sustentable	36
1.3 Modelo logístico discreto	39
1.4 Ecuaciones de recurrencia en varias variables	45
1.5 Modelos en clases de edades	56
1.6 Relación con contenidos de Educación Media	62
<b>Capítulo 2: Evoluciones a tiempo continuo de una variable</b>	65
2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias	69
2.2 Equilibrio y estabilidad	80
2.3 Extracción de un recurso natural renovable	84
2.4 Modelo de crecimiento económico	87
2.5 Relación con contenidos de Educación Media	90
<b>Capítulo 3: Evoluciones a tiempo continuo de varias variables</b>	93
3.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	98
3.2 Equilibrio y estabilidad	104
3.3 Diagramas de fase	108
3.4 Competencia por un mismo recurso	121
3.5 Dinámica de un péndulo simple	131
3.6 Relación con contenidos de Educación Media	134
<b>Capítulo 4: Evoluciones con aleatoriedad</b>	139
4.1 Conceptos preliminares de probabilidades	143
4.2 Cadenas de Markov	146
4.3 Clasificación de estados	161
4.4 Evolución genética	168
4.5 Relación con contenidos de Educación Media	171

Bibliografía	173
Índice de figuras	175
Índice de nombres propios	177
Índice de términos	177

*A Claudia y Simón....*



## Prefacio



La modelación matemática de fenómenos, que varían con el tiempo y cuyo estado evoluciona, brinda un campo extremadamente amplio para comprender la riqueza y profundidad de la matemática. La naturaleza de los efectos temporales es tan fuerte en nuestras vidas y su experiencia es tan profunda, que todos tenemos una gran sensibilidad por todo lo que signifique su modelación. El profesor de matemática puede maravillarse en su vida de estudiante con los modelos y problemas que se presentan en este campo. De igual manera, en su vida de profesor, podrá encantar a sus estudiantes con modelos más sencillos, pero que todavía guarden la riqueza de los ejemplos más complejos.

El objetivo de esta monografía es ofrecer un panorama de modelos matemáticos actualmente utilizados en diferentes disciplinas que tratan con fenómenos de evolución. En este contexto, abordaremos problemas de evolución a tiempo discreto y continuo, los que serán motivados con diversos ejemplos acompañados de su formulación y análisis.

Comenzaremos en el primer capítulo discutiendo sobre la pertinencia en representar el tiempo como una variable discreta o continua, para luego introducir las ecuaciones de recurrencia, que modelan fenómenos a tiempo discreto, mostrando algunas de sus aplicaciones a la dinámica de poblaciones y otras áreas. El estudio del comportamiento a largo plazo se abordará usando el álgebra lineal para describir la estabilidad de estos sistemas. La primera parte de este capítulo puede ser utilizada a partir de cursos en el primer semestre de la carrera de pedagogía. En la sección donde se introducen fenómenos que involucran más de una variable en tiempo discreto, será conveniente manejar los conceptos básicos de álgebra lineal.

En el segundo y tercer capítulo se abordarán fenómenos de evolución a tiempo continuo, los cuales se describen por una y varias variables respectivamente. También serán analizados ejemplos provenientes de la biología, economía, bioquímica y física. El capítulo dos bien puede ser tratado en cursos introductorios donde se presenten los primeros conceptos del cálculo diferencial. Para un real aprovechamiento del capítulo tres, es recomendable que el estudiante esté cursando o haya realizado un curso de cálculo diferencial en varias variables.

Finalmente, se expondrán fenómenos que se pueden modelar mediante cadenas de Markov tendiendo un puente con las probabilidades. A través de ejemplos se analizará el comportamiento de estos sistemas, con énfasis en el modelamiento. Si bien el capítulo final trata de ser lo más autocontenido posible, nociones básicas de probabilidades son deseables para una mejor comprensión de él.

Mediante el tratamiento de todos estos temas, pretendemos introducir al lector en el modelamiento matemático. Antes de hacer matemática intentaremos deducir algunos modelos, tarea que generalmente no es fácil de realizar.

¿Qué entenderemos por tener un buen modelo? El primer objetivo del modelamiento matemático es poner en evidencia fenómenos importantes y evidentes, valga la redundancia, del problema en estudio. El modelo deberá ser simple, a veces demasiado, arriesgando en ocasiones la pérdida de realismo. Lo importante es que aporte en alguna medida una visión cualitativa y/o cuantitativa del fenómeno que se desea representar. Será esta simplicidad la que nosotros abordaremos dejando de lado una representación precisa y detallada de la realidad.

Cada capítulo comienza con uno o más ejemplos de fenómenos, los cuales se propone modelar llegando a la expresión matemática que será abordada en las secciones posteriores. Luego de cada introducción, hemos incluido una sección llamada *Hoja de ruta*, la cual pretende ser una guía para el profesor que utilice el texto, indicándole los requisitos necesarios que deben tener los alumnos para abordar cada una de las secciones del capítulo. En esta parte también indicamos los textos de la colección que son complementarios a los contenidos expuestos.

Al final de cada capítulo, en la sección *Relación con contenidos de Educación Media*, se propone al futuro profesor hacer el nexo entre los contenidos abordados y aquellos que deberá enseñar. Principalmente, el objetivo es mostrar que hay un contexto diferente, precisamente el que trata el texto, en el cual se pueden situar materias de la Enseñanza Media. En ocasiones, en estas secciones se mencionan nuevos modelos a ser tratados en el aula.

La versión actual de esta monografía, no hubiera sido posible sin las acuciosas observaciones y valiosas sugerencias realizadas por Joaquim Barbe, Fernando Cordova, Omar Gil, Rajesh Mahadevan, Servet Martínez, Rigoberto Medina, Maximiliano Olivares (quien también me ayudó con las figuras), Axel Osses, Adriana Piazza, Alexander Quaas, Ramón Reyes, Paulina Sepúlveda y todos aquellos evaluadores anónimos que aportaron constructivamente al desarrollo de este proyecto. En particular deseo agradecer a Salomé Martínez y Patricio Felmer por la espectacular oportunidad brindada al invitarme a participar de esta iniciativa, y por la rigurosidad y entusiasmo con que han seguido la confección del texto. Finalmente, quiero destacar y agradecer la disposición de Jaime Mena y de los estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, quienes me permitieron implementar en aula la monografía en su forma preliminar, actividad fundamental que orientó la presente versión.

Pedro Gajardo, Valparaíso 2010.



## Capítulo 1: Fenómenos de evolución a tiempo discreto



En el análisis de fenómenos que evolucionan en el tiempo, el modelamiento matemático tiene por objetivo plasmar, en un lenguaje formal, diversas relaciones que debiera(n) satisfacer la o las variables que se desea estudiar y, establecidas éstas, poder describir (cualitativa y/o cuantitativamente) la evolución del fenómeno prediciendo futuros comportamientos. Las relaciones que en la construcción de un modelo se establecen, pueden ser inferidas a través de:

- *Observaciones* realizadas por especialistas asociados a las disciplinas en la que el fenómeno se enmarca (biólogos, economistas, físicos, etc.); Ejemplo: *el crecimiento de una población es limitado pues el espacio físico y la cantidad de alimentos lo son.*
- *Teorías* propias a las distintas áreas del conocimiento (biología, física); Ejemplo: *La energía en un sistema cerrado se conserva.*

Lo necesario para crear un modelo matemático, asociado a la evolución de un fenómeno, puede resumirse en las siguientes etapas:

- 1.- Identificar la(s) variable(s) (cantidades) relevantes que intervienen en el fenómeno, las que se desea poder describir. A éstas las llamaremos *variables de estado*. Ejemplo: *número de individuos en una población, posición de un objeto sujeto a fuerzas, cantidad de un bien económico, etc.*
- 2.- Determinar, realizando supuestos fundamentados, las transiciones que transcurren en un periodo de tiempo y/o interacciones que existen entre las variables de estado, a través de una expresión matemática.

Para graficar lo anterior, comencemos con la introducción de un modelo epidemiológico el cual intentará describir la evolución de un virus (e.g. la gripe).

Supongamos que en una población sana un día llegó un individuo infectado y que la transmisión del virus se produce a través del contacto físico. Una vez infectado(a) la persona demora una cierta cantidad de tiempo en recuperarse. Las hipótesis anteriores podrían justificarse a través de observaciones realizadas por biólogos/médicos.

Luego de un periodo de tiempo, la población se divide en tres clases: infectados, sanos no inmunes y sanos inmunes, siendo la suma de las tres el total de la población. La población de inmunes representa a todos los individuos que no contraerán la enfermedad ya sea porque la tuvieron anteriormente o bien porque se vacunaron contra ella.

Si llegado un momento, en virtud de la gran cantidad de afectados, las autoridades deciden aplicar un programa de vacunación masiva con el fin de evitar nuevos

contagios, estudiemos cómo evoluciona la cantidad de infectados en el tiempo. Para ello nos concentraremos sólo en la evolución de infectados que notaremos por  $x(t)$ , donde  $t$  indica la variable temporal. La deducción completa de este modelo, u otros relacionados, así como su desarrollo, donde se considere que a todo momento hay nuevos contagios, puede encontrarse en [6, 10].

Supondremos que en un día, 2 de 100 individuos infectados se recupera (volviéndose inmune) y, por lo tanto, la probabilidad de recuperación (de un infectado) en un día es  $p_1 = \frac{2}{100}$ . La tasa de recuperación se define como la probabilidad de recuperación en un periodo de tiempo dividida por el periodo de tiempo. Así, la tasa de recuperación en un día será

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{1 \text{ día}} = \frac{2}{100} \frac{1}{1 \text{ día}} = \frac{1}{50} \frac{1}{1 \text{ día}}.$$

De manera similar, la probabilidad de que un individuo infectado se recupere en dos días será  $p_2 = \frac{4}{100}$  y la tasa de recuperación en dicho periodo de tiempo (2 días) es

$$\alpha_2 = \frac{p_2}{2 \text{ días}} = \frac{4}{100} \frac{1}{2 \text{ días}} = \frac{1}{50} \frac{1}{1 \text{ día}}.$$

Denotando por  $p_{\Delta t}$  y  $\alpha_{\Delta t}$  a las probabilidades y tasa de recuperación en  $\Delta t$  días, para un periodo de medio día se tiene que  $p_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{100}$  y

$$\alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{p_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \text{ día}} = \frac{1}{100} \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ día}} = \frac{1}{50} \frac{1}{1 \text{ día}}.$$

Observe que la tasa de recuperación  $\alpha_{\Delta t} = \frac{p_{\Delta t}}{\Delta t}$ , bajo los supuestos realizados, es independiente del periodo de tiempo  $\Delta t$  elegido por lo que la notaremos simplemente  $\alpha$ .

El número de infectados después de transcurrido un periodo de tiempo  $\Delta t$  será

$$(MG) \quad x(t + \Delta t) = x(t) - p_{\Delta t}x(t).$$

Si definimos  $x_k = x(k\Delta t)$  se deduce la ecuación de recurrencia

$$(MTD) \quad x_{k+1} = (1 - p_{\Delta t})x_k.$$

Por otro lado, si en  $t = 0$  la población de infectados es  $x(0) = x_0 > 0$ , se tendrá

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - p_{\Delta t})x(0) = (1 - p_{\Delta t})x_0 \\ x_2 &= ((1 - p_{\Delta t})x_1 = (1 - p_{\Delta t})^2x_0 \\ x_3 &= (1 - p_{\Delta t})x_2 = (1 - p_{\Delta t})^2x_1 = (1 - p_{\Delta t})^3x_0 \\ &\vdots \\ x_k &= (1 - p_{\Delta t})x_{k-1} = (1 - p_{\Delta t})^2x_{k-2} = \dots = (1 - p_{\Delta t})^kx_0. \end{aligned}$$

Es decir, conociendo la cantidad  $x_0$  de individuos infectados al comienzo, a través de este modelo es posible determinar cómo evolucionan en el tiempo mediante la relación

$$(SMTD) \quad x_k = (1 - p_{\Delta t})^k x_0.$$

Dado que  $0 < 1 - p_{\Delta t} < 1$ , independiente del periodo de tiempo  $\Delta t$ , se tiene que la variable  $x_k$  decrecerá en cada periodo de tiempo.

Este modelo también puede establecerse en tiempo continuo. De hecho, si en la expresión (MG) se divide por  $\Delta t$  se obtiene la relación

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\alpha x(t),$$

donde  $\alpha = \frac{p_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{1}{50} \frac{1}{1 \text{ día}}$  es la tasa de recuperación la cual es independiente del periodo de tiempo  $\Delta t$  considerado. Si el periodo  $\Delta t$  es muy pequeño (e.g. un segundo  $= \frac{1}{86400}$  día), podemos realizar el procedimiento de hacer tender  $\Delta t \rightarrow 0$  obteniendo la ecuación diferencial

$$(MTC) \quad \frac{d}{dt}x(t) = -\alpha x(t)$$

la cual tiene por solución (en el Capítulo 2 veremos cómo obtener soluciones de ecuaciones diferenciales)

$$(SMTC) \quad x(t) = x_0 e^{-t\alpha}.$$

En la Figura 1.1 se grafican las soluciones obtenidas por los modelos en tiempo discreto y tiempo continuo utilizando el valor  $\Delta t = 0,5$  día y comenzando con 120 infectados.

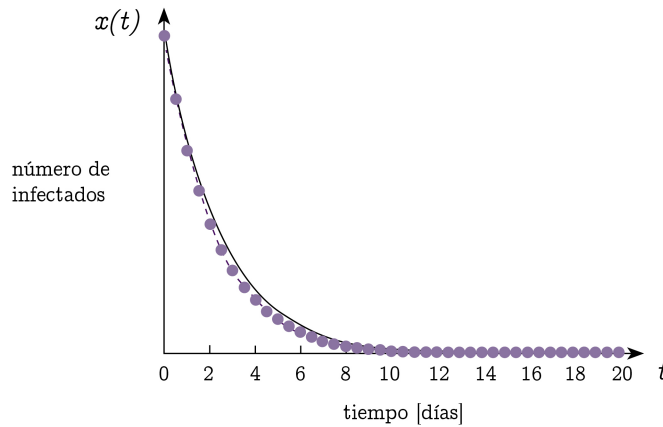


FIGURA 1.1. Trayectorias a tiempo continuo y discreto con  $\Delta t = 0,5$  día.

Ambas evoluciones, a tiempo discreto y continuo, predicen que el número de infectados tiende a decaer teniéndose, para tiempos grandes, convergencia a cero. Para  $\Delta t$  pequeño se observa que la gráfica correspondiente a (SMTD) se ajusta bien a la de la solución (SMTC). Sin embargo, para periodos de tiempo  $\Delta t$  mayores, por ejemplo  $\Delta t = 2$  días, (SMTD) difiere considerablemente de (SMTC) como se observa en la Figura 1.2.

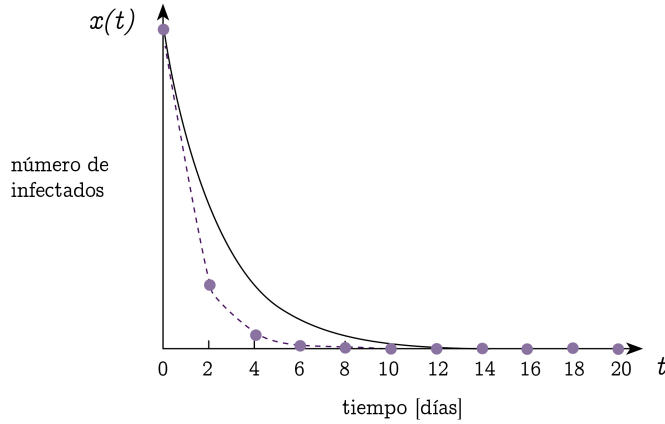


FIGURA 1.2. Trayectorias a tiempo continuo y discreto con  $\Delta t = 2$  días.

He aquí un punto importante a determinar al comenzar el modelamiento de un fenómeno que evoluciona en el tiempo. La variable (crucial) temporal ¿será considerada discreta o continua?. Esto se traduce a determinar la unidad de tiempo en la cual será medida la evolución (dependiendo los propósitos que se tenga) y el periodo de tiempo  $\Delta t$  en el cual puede ser descrita una transición de la(s) variable(s) en estudio. En el caso del modelo epidemiológico, asumimos que en un día 2 de cada 100 individuos infectados se recupera. Si se pretende predecir la cantidad de infectado dentro de los próximos 10 días (en la población de una ciudad pequeña), ¿tendrá sentido describir las transiciones en periodos de tiempo  $\Delta t$  pequeños (e.g. 1 segundo) lo que haciendo la aproximación  $\Delta t \approx 0$  da origen al modelo (MTC)?. Por otro lado, si se desea predecir cuántos individuos infectados habrá el próximo minuto (dentro de toda la población mundial), ¿cómo haríamos si las transiciones han sido establecidas en días dando origen al modelo (MTD)?. Así, la elección de unidad de medida determinará si el modelo se realiza a tiempo discreto o continuo. Esta dependerá de los objetivos que uno se plantee a la hora de elaborar un modelo.

En el caso en que el periodo de tiempo  $\Delta t$ , donde se puede describir una transición relevante de la(s) variable(s) en estudio es pequeño con respecto a la unidad en que se está midiendo el tiempo (e.g. tiempo medido en días y  $\Delta t =$  un milisegundo) uno debiera inclinarse por modelar el fenómeno a tiempo continuo, dando origen a una ecuación diferencial como se estudiará en el Capítulo 2. En caso contrario, un modelo a tiempo discreto se presenta como más adecuado.

**Ejercicio 1.1.** A usted se le ha solicitado hacer un pronóstico de la cantidad de personas que habrá a futuro en su región. Justifique si el modelo a elaborar será a tiempo discreto o continuo en los siguientes casos:

- Pronostico de la población a 20 años;
- Pronóstico de la población a 300 años.

**Ejercicio 1.2.** Asuma que el crecimiento de una población de individuos, puede representarse de manera similar al modelo (MG)

$$(1.1) \quad x(t + \Delta t) = x(t) + p_{\Delta t}^N x(t) - p_{\Delta t}^M x(t),$$

donde  $x(t)$  indica la cantidad de individuos,  $p_{\Delta t}^N$  la fracción de nuevos individuos que nacen a partir de los ya existentes, y  $p_{\Delta t}^M$  la proporción de individuos que mueren, donde  $p_{\Delta t}^M < p_{\Delta t}^N + 1$ .

1. Realice un análisis similar al del modelo de infección para obtener una representación en tiempo discreto y en tiempo continuo.
2. Utilizando una planilla de cálculo o un programa matemático, para una población inicial de  $x(0) = 100$  y diferentes valores de  $\Delta t$ ,  $p_{\Delta t}^M$  y  $p_{\Delta t}^N$ , determine la evolución, a tiempo discreto, de  $x_k$  hasta  $k = 50$ .
3. Deduzca qué sucede a largo plazo cuando  $p_{\Delta t}^M > p_{\Delta t}^N$  e interprete el resultado.

En este capítulo, introduciremos algunas metodologías para el estudio de fenómenos que pueden modelarse a tiempo discreto. El tipo de variables que describirán los estados del fenómeno evolutivo, serán consideradas cantidades continuas (números reales), como se estableció (sin mencionarlo) con el número de infectados en el modelo epidemiológico. De hecho, dependiendo de la elección de  $p_{\Delta t}$  en el modelo (MTD), podríamos haber deducido que un día habrá 1, 2 infectados, ¿qué sentido tiene aquello?

Si la variable en estudio representa una distancia, la masa de un conjunto de individuos, el valor de un conjunto de bienes, no es difícil relacionar este tipo de cantidades con una variable continua. Sin embargo, si la variable indica un número de individuos, uno estaría más propenso a representarla por cantidades discretas (1, 2, 3, ...). La justificación para, en algunos casos, representar la cantidad de individuos a través de una variable continua, son las diferentes unidades que se puedan estar utilizando en su medición. Por ejemplo, cuando se trabaja con organismos unicelulares en laboratorio, el número de individuos es no menos de varias decenas de miles pudiendo alcanzar  $10^6$ ,  $10^7$ . En la naturaleza, cantidades de  $10^8$  y  $10^9$  son comúnmente consideradas. Al elegir una unidad que es del orden de la talla de la población, por ejemplo del orden de  $10^8$  individuos y elegimos una unidad igual a un millón, denotando por  $x(t)$  la cantidad de individuos al instante  $t$  en esa unidad, si bien estaremos hablando de un número entero (cantidad de individuos),  $x(t)$  puede considerarse como un número real en virtud de la unidad elegida (e.g.  $x(t) = 1, 2$  millón de individuos). Debemos tener siempre presente que lo deseado es realizar una representación **aproximada** de la realidad.

A lo largo de los tres primeros capítulos, la variable en estudio seguirá siendo una cantidad real. Si ésta la denotamos por  $x$  (número de individuos de una población en una unidad apropiada, nivel de producción de un sector económico, etc.), su evolución

a lo largo del tiempo (discreto) puede ser vista como una sucesión

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$$

que en cada periodo de tiempo  $k$  asocie el nivel de la variable en dicho momento notándola  $x_k$ .

Los modelos a tiempo discreto dan origen a ecuaciones de recurrencia (como la presentada en (MTD)) las cuales estudiaremos a través de herramientas y metodologías presentadas en este capítulo. Luego de estudiar fenómenos que involucren una sola variable, aplicando los contenidos introducidos a ejemplos, nos concentraremos en modelos que involucren varias variables tratando, entre otros, los casos de fenómenos que presentan retardos y modelos en clases de edades.

## Hoja de ruta

El principal objetivo de este capítulo, es introducir al lector en la modelación de fenómenos cuyas transiciones puedan ser descritas considerando el tiempo como una variable discreta. La primera parte del capítulo (dinámicas en una variable), puede ser tratada en cursos con alumnos de primer año de pedagogía ya que ésta ha tratado de ser autocontenida. Si bien se hace mención (o se utilizan) a conceptos de análisis como: Continuidad, Lipschitz, Teorema del valor medio, Teorema del valor intermedio; los alumnos de primer año tendrán la oportunidad de relacionar dichos contenidos, que serán vistos en el primer curso de cálculo, en otro contexto como es el expuesto acá. Para alumnos que hayan cursado las primeras asignaturas matemáticas de la carrera de pedagogía; la parte de dinámicas en una dimensión puede ser complementada utilizando una planilla de cálculo o programas matemáticos, con la obtención de trayectorias (gráficos) y cálculos de equilibrios.

Independientemente del grado de formación que tengan los estudiantes, creemos importante hacer énfasis en el proceso de modelación de un determinado fenómeno. La discusión sobre la pertinencia de considerar el tiempo como una variable discreta o continua, determinar la o las variables en estudio, describir la transición de un estado a otro, son procedimientos propicios para hacer participar a todos los estudiantes. Una vez acordado el modelo, dependerá de los conocimientos de cada alumno obtener la mayor información posible a partir de él.

Si bien la construcción de modelos que involucren dinámicas en varias variables, es un proceso que no requiere mayores requisitos matemáticos, pudiendo trasladarse algunos de estos al aula de Educación Media, para el posterior análisis será necesario que los estudiantes hayan cursado asignaturas donde se vean elementos de álgebra lineal (cálculo de valores propios) y cálculo diferencial en varias variables (obtención de la matriz Jacobiana). De no ser el caso, se recomienda restringir el estudio sólo al cálculo de equilibrios.

Los siguientes contenidos, tratados en el capítulo, pueden ser complementados con lo expuesto en las monografías de esta misma colección:

- Cálculo de trayectorias, realización de gráficos y utilización de programas matemáticos: [18];
- Resolución de ecuaciones (de una y más variables), relacionadas con la determinación de equilibrios: [18];
- Principio de inducción para determinar la expresión explícita de una trayectoria: [14, 17];
- Resolución de sistemas lineales y cálculo de valores propios, relacionado con la determinación de equilibrios y la naturaleza de estos (estabilidad): [9].

Los ejemplos tratados que abarcan todo el procedimiento: construcción del modelo y análisis, son los estudiados en la secciones 1.2 (evolución de una variable: máxima captura sustentable), 1.4 y 1.5 (evoluciones en varias variables: Romeo y Julieta; modelos en clases de edades). Estos pueden ser abordados separadamente sin necesidad de profundizar en el desarrollo teórico necesario (Sección 1.1 y parte de la Sección 1.4), si es que éste ya ha sido realizado en otras asignaturas.

Al final del capítulo se intenta hacer una conexión de los contenidos abordados con algunos de Educación Media, proponiendo al futuro profesor un contexto diferente para abordarlos.

### 1.1 Ecuaciones de recurrencia

Supongamos que la transición entre un periodo  $k$ -ésimo -que representa el instante de tiempo  $k\Delta t$  donde  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo en el cual ha sido establecida una transición- y el periodo  $k+1$ -ésimo, ya han sido establecidas, como en la introducción de este capítulo (ver modelo (MTD)), a través de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dando origen a la siguiente expresión

$$(1.2) \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esta se denomina ecuación de recurrencia, siendo  $x_0 \in \mathbb{R}$  un estado inicial del fenómeno en estudio.

En el estudio de un fenómeno, llegar a determinar la función  $f$  es un trabajo delicado que requiere de conocimientos propios a la disciplina en la cual se enmarca el análisis (biología, física, economía, etc.). Una buena parte del modelamiento consiste en poder encontrar una buena función  $f$  que describa lo más apropiadamente el problema a tratar.

Una solución de la ecuación de recurrencia (1.2) es una *sucesión*

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$$

la cual debe satisfacer

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) \\x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) \\x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) \\&\vdots \\x_k &= f(x_{k-1}) = f(f(x_{k-2})) = \cdots = f(f(f \cdots f(x_0))).\end{aligned}$$

Al escribir  $f^{(k)}$  la composición iterada de la función  $f$  una cantidad  $k$  de veces, es decir,

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{k \text{ veces}}(x),$$

con  $f^{(0)}(x) = x$ , la solución de la ecuación de recurrencia será

$$x_k = f^{(k)}(x_0).$$

Por ejemplo, si la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $f(x) = x^2$ , entonces  $f^{(k)}(x) = x^{2^k}$ . En este caso, si el modelo a estudiar viene dado por

$$x_{k+1} = (x_k)^2 \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

la solución estará dada por  $x_k = (x_0)^{2^k}$ .

En general, encontrar una expresión explícita para  $x_k$  en función de una condición inicial  $x_0$  (como en los ejemplos anteriores) no es una tarea fácil. Como veremos, éste no será el principal objetivo que abordaremos.

Uno de los aspectos que nos interesa estudiar es el comportamiento de soluciones para tiempo grandes. En matemática decimos que analizamos las soluciones  $x_k$  cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ . Observe que, en el ejemplo anterior, si la condición inicial es  $x_0 = 0$  entonces, para todo instante de tiempo  $k$  se tiene  $x_k = 0$ . Por otro lado, si la condición inicial satisface  $0 < x_0 < 1$ , entonces, para todo instante  $k$ , la solución  $x_k$  es estrictamente positiva y además  $x_k$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ . Así, a largo plazo, la solución va a estar cercana a cero. Si la condición inicial es igual a uno ( $x_0 = 1$ ) entonces,  $x_k = 1$  para todo  $k$ . Por último, si la condición inicial es mayor que uno ( $x_0 > 1$ ) se tendrá que  $x_{k+1} > x_k$  para todo  $k$  y más aún, se observa que en tal caso,  $x_k$  tiende a  $+\infty$  cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ .

Para estudiar el comportamiento a largo plazo de soluciones, introduciremos el concepto de equilibrio de un sistema a tiempo discreto, el cual es un *punto fijo* de la función  $f$  que define el modelo.

**Definición 1.1.** Un elemento  $x^* \in \mathbb{R}$  se denomina punto fijo de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$f(x^*) = x^*.$$



Al considerar el modelo a tiempo discreto

$$(1.3) \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

observe que si la condición inicial  $x_0$  resulta ser un punto fijo de la función  $f$ , entonces una solución del sistema anterior estará dada por  $x_k = x_0$  para todo periodo  $k$ . Si para algún periodo  $k_0$  llegamos a un punto fijo  $x^*$ , es decir,  $x_{k_0} = x^*$  con  $f(x^*) = x^*$  entonces, la solución o trayectoria a partir de este instante será igual a  $x^*$ . Es por ello que un punto fijo de la función  $f$  se denomina también un equilibrio de la ecuación de recurrencia (1.3).

**Ejercicio 1.3.** Interprete el hecho de que en los modelos, a tiempo discreto, presentados en la introducción de este capítulo (modelo de infección y de crecimiento en el Ejercicio 1.2), el nivel  $x^* = 0$  sea un punto fijo.

Gráficamente, la existencia de un punto fijo de  $f$  (o equilibrio de (1.3)) puede verse como la intersección de la curva que describe la función  $f$  con la de la función identidad  $I(x) = x$ , como se muestra en la Figura 1.3.

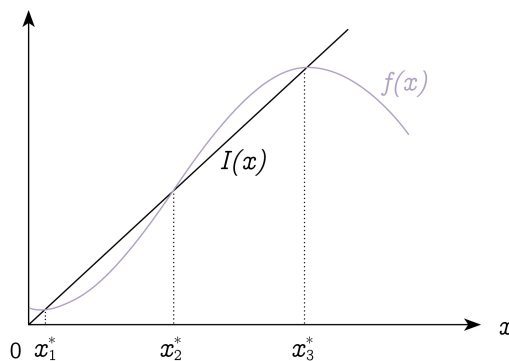


FIGURA 1.3. Puntos fijos de la función  $f(x)$ .

La Figura 1.3 muestra una función que tiene tres puntos fijos, mientras que la Figura 1.4 grafica una función que no tiene puntos fijos.

Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , determinar si existen y calcular explícitamente sus puntos fijos, puede llegar a ser un problema difícil de resolver, ya que esto involucra la resolución de una ecuación ( $x^* = f(x^*)$ ) eventualmente no lineal. En la monografía [18], de esta misma colección, se introducen métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales los cuales pueden ser utilizados para el cálculo de puntos fijos.

En el presente capítulo, veremos dos resultados que nos aseguran la existencia de puntos fijos para ciertas clases de funciones. Para el primer resultado, introduciremos

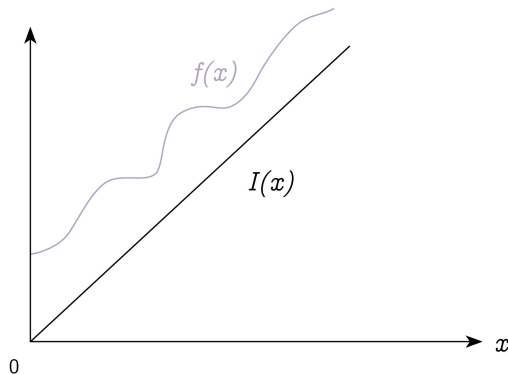


FIGURA 1.4. Gráfica de una función sin puntos fijos.

una propiedad inicialmente definida por el matemático alemán Rudolf Lipschitz (1832-1903), la cual ha llegado a ser de mucha utilidad en el análisis matemático y cuya relevancia se verá reflejada a lo largo del texto.

**Definición 1.2.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *Lipschitz*, si existe una constante  $L \geq 0$  (que llamaremos constante de Lipschitz de  $f$ ) tal que

$$(1.4) \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Si la constante verifica  $L < 1$ , se dice que la función es *contractante* o es una *contracción*.

Cuando la función  $f$  es derivable, una forma de calcular la constante  $L$  en la anterior definición es

$$L := \max_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)|$$

donde  $f'(z)$  representa la derivada de  $f$  en  $z \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, el máximo del valor absoluto de la derivada en ocasiones puede ser  $+\infty$ . Si así no fuese, el teorema del valor medio nos asegura que se tiene la relación (1.4) para tal constante  $L$ . De hecho, el teorema del valor medio señala que para todo  $x$  distinto de  $y$  en  $\mathbb{R}$  se tiene que existe  $c \in ]x, y[$  (suponiendo  $x < y$ ) tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y),$$

y por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| \leq \left( \max_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)| \right) |x - y|.$$

**Ejercicio 1.4.** Recordemos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice continua en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon,$$

y será continua si lo es para todo punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Lo anterior se puede ejemplificar simplemente diciendo que al dibujar el gráfico de la función, no hay necesidad de levantar el lápiz.

1. Discuta con sus compañeros(as) la pertinencia de considerar una función continua  $f$  en la descripción de una evolución  $x_{k+1} = f(x_k)$ .
2. Muestre que si una función es Lipschitz entonces es continua.

El siguiente teorema nos entrega una condición suficiente sobre la función  $f$  para tener la existencia y unicidad de un punto fijo.

**Teorema 1.3.** *Si una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es contractante, entonces existe un único elemento  $x^*$  tal que*

$$f(x^*) = x^*.$$

**Demostración.** Dado que la función es contractante, existe una constante positiva  $L$  menor que uno tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Al partir de un elemento  $x_0$  en  $\mathbb{R}$ , generemos la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) := f^{(2)}(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^{(2)}(x_0)) := f^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ x_k &= f^{(k)}(x_0). \end{aligned}$$

El objetivo es demostrar que la sucesión  $x_k$  converge a un punto fijo de la función  $f$ . Evaluemos los valores absolutos entre  $x_{k+1}$  y  $x_k$  utilizando el hecho que  $f$  es Lipschitz

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |f(x_0) - f(x_1)| \leq L|x_0 - x_1| \\ |x_2 - x_3| &= |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \leq L^2|x_0 - x_1| \\ |x_3 - x_4| &= |f(x_2) - f(x_3)| \leq L|x_2 - x_3| \leq L^3|x_0 - x_1| \\ &\vdots \\ |x_{k-1} - x_k| &= |f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})| \leq L|x_{k-2} - x_{k-1}| \leq L^{k-1}|x_0 - x_1| \\ |x_k - x_{k+1}| &= |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq L|x_{k-1} - x_k| \leq L^k|x_0 - x_1|. \end{aligned}$$

En general, para dos números naturales  $k$  y  $p$  se tendrá, gracias a la propiedad de valor absoluto, que

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+p}| &\leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_{k+2}| + |x_{k+2} - x_{k+3}| + \cdots + |x_{k+p-1} - x_{k+p}| \\ &\leq (L^k + L^{k+1} + L^{k+2} + \cdots + L^{k+p-1})|x_0 - x_1|. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de progresiones geométricas se obtiene así

$$\sum_{j=0}^{p-1} L^{k+j} = \frac{L^k(1-L^p)}{(1-L)} < \frac{L^k}{(1-L)},$$

y por lo tanto

$$(1.5) \quad |x_k - x_{k+p}| \leq \frac{L^k}{(1-L)} |x_0 - x_1|.$$

Dado que

$$\frac{L^k}{(1-L)} |x_0 - x_1| \rightarrow 0$$

cuando  $k$  tiende a  $+\infty$  (pues  $L < 1$ ), se tiene que los términos de la sucesión que hemos construido están cada vez más cerca entre ellos, puesto que la diferencia entre dos elementos de la sucesión  $x_{k+p}$  y  $x_k$  tiende a cero

$$|x_k - x_{k+p}| \rightarrow 0,$$

cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ . Si una sucesión tiene la propiedad de que el valor absoluto entre dos términos de la sucesión se hace cada vez más pequeño a medida que el índice de la sucesión avanza, se dice que la sucesión es de *Cauchy*. En  $\mathbb{R}$  toda sucesión de Cauchy es convergente.

De la relación (1.5) se deduce que la sucesión construida es de Cauchy y por lo tanto converge a un elemento  $x^*$ . Como la función  $f$  es continua (dado que es Lipschitz) se tiene que  $f(x_k)$  converge a  $f(x^*)$ . Por otro lado, como  $x_{k+1}$  converge a  $x^*$  se obtiene, de la relación  $x_{k+1} = f(x_k)$ , que  $f(x^*) = x^*$ .

Para finalizar veamos que este punto fijo es único. De hecho, si  $x_1^*$  y  $x_2^*$  son dos puntos fijos, se debe cumplir que  $f(x_1^*) = x_1^*$  y  $f(x_2^*) = x_2^*$  y además

$$(1.6) \quad |x_1^* - x_2^*| = |f(x_1^*) - f(x_2^*)| \leq L|x_1^* - x_2^*|.$$

Si  $x_1^*$  es distinto de  $x_2^*$  se tiene  $|x_1^* - x_2^*| > 0$  y por lo tanto de (1.6), teniendo presente  $L < 1$ , se concluye

$$|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|,$$

lo cual es una contradicción. □

El resultado anterior se conoce como el Teorema del punto fijo de Banach, en honor al matemático polaco Stefan Banach (1892-1945). El proceso iterativo detallado en la demostración se conoce como *iteraciones de Picard*. Detalles sobre algunos aspectos numéricos de este proceso iterativo, pueden ser encontrados en la monografía [18]. Este teorema, junto con el que veremos más adelante (Teorema 1.4), constituyen uno de los resultados más importantes en matemáticas aplicadas.

Antes de ver otras condiciones que nos aseguren también la existencia de un punto fijo, observando la demostración del teorema anterior nos percatamos de un resultado

bastante fuerte. Este dice que si  $f$  es contractante, a partir de cualquier punto inicial  $x_0$  se tiene que la sucesión construida, siguiendo el esquema

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) := f^{(2)}(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^{(2)}(x_0)) := f^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ x_k &= f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

converge al único punto fijo. De esta forma, si consideramos el sistema a tiempo discreto

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función contractante, entonces, la única solución, que estará dada por  $x_k = f^{(k)}(x_0)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  convergerá al único punto fijo de la función  $f$ . Es decir, si el sistema que estamos estudiando viene dado por una contracción, podremos asegurar que a largo plazo (cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ ) la solución estará cerca del único punto fijo de la función.

El siguiente resultado determina la existencia de un punto fijo para funciones continuas (no necesariamente Lipschitz) en intervalos de la forma  $[a, b]$ .

**Teorema 1.4.** *Considere una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si para un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  se tiene*

$$(1.7) \quad f(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$$

*entonces, existe un elemento  $x^*$  en  $[a, b]$  tal que*

$$f(x^*) = x^*.$$

**Demostración.** Considere la función  $g(x) = f(x) - x$  la cual, por la continuidad de  $f$ , resulta ser continua. Al evaluar  $g$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , por la propiedad (1.7) se obtiene  $g(a) \geq 0$  y  $g(b) \leq 0$ . Si  $g(a) = 0$  ó  $g(b) = 0$  entonces  $a$  ó  $b$  son puntos fijos de  $f$ . En caso contrario, dado que  $g$  es continua, debe existir  $x^* \in ]a, b[$  tal que  $g(x^*) = 0$  lo que implica  $x^* = f(x^*)$ .  $\square$

El resultado anterior es una herramienta muy útil a la hora de determinar la existencia de un punto fijo. A diferencia del primer resultado que vimos (Teorema 1.3), este último no nos asegura la unicidad del punto fijo como lo muestra la Figura 1.5

**Ejercicio 1.5.** Si la evolución de una población se modela a través de  $x_{k+1} = f(x_k)$ , ¿cómo se interpreta la condición (1.7)?

Un equilibrio de un modelo a tiempo discreto (o punto fijo de la función que lo define) puede clasificarse en **localmente estable** o **globalmente estable**. Sin embargo, puede que un equilibrio no sea ni lo uno ni lo otro.

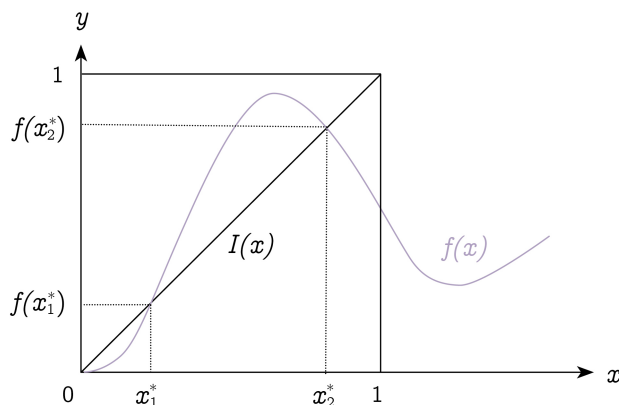


FIGURA 1.5. Gráfica de una función continua, que satisface (1.7) con  $[a, b] = [0, 1]$ , la cual tiene más de un punto fijo.

**Definición 1.5.** Dado un intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , un equilibrio  $x^* \in [a, b]$  de la ecuación de recurrencia

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se dice localmente estable en  $[a, b]$  si para toda condición inicial  $x_0$  en  $[a, b]$ , suficientemente cerca de  $x^*$ , se tiene  $x_k \rightarrow x^*$ . El equilibrio  $x^*$  es globalmente estable si para toda condición  $x_0$  en  $[a, b]$  la solución  $x_k$  converge a  $x^*$ .

Del Teorema 1.3 se obtiene que si la función  $f$  que define el sistema es contráctante, entonces el único punto fijo de la función es un equilibrio globalmente estable.

**Ejercicio 1.6.** Determine el único equilibrio del modelo a tiempo discreto presentado en la introducción de este capítulo, dado por (MTD), y determine si es local o globalmente estable.

En un modelo lineal, es decir, de la forma

$$x_{k+1} = \rho x_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\rho \in \mathbb{R}$  es una constante, se tiene que el punto  $x^* = 0$  es el único equilibrio si  $\rho \neq 1$ . Además, si  $|\rho| < 1$ , dado que la solución es  $x_k = \rho^k x_0$  se tiene que  $x^* = 0$  es globalmente estable. Este hecho es posible extenderlo a ecuaciones de recurrencia no lineales, pagando, por cierto, un precio por ello (obteniendo un resultado más débil).

**Teorema 1.6.** Considere el modelo a tiempo discreto siguiente

$$(1.8) \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable y su derivada, es una función continua. Si  $x^*$  es un punto fijo de  $f$  y el valor absoluto  $|f'(x)|$  de la derivada de  $f$  evaluada

en  $x^*$  es menor que uno, entonces  $x^*$  es un equilibrio localmente estable, es decir, si la condición inicial  $x_0$  está lo suficientemente cerca de  $x^*$ , se tendrá que la solución  $x_k = f^{(k)}(x_0)$  converge a  $x^*$  cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ .

**Demostración.** Sea  $x^* \in \mathbb{R}$  un punto fijo de  $f$  tal que  $|f'(x^*)| < 1$ . Como la derivada de  $f$  es una función continua, se tiene que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ . Por ser continua la derivada y su valor absoluto menor que uno en todo punto del intervalo  $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ , se tiene que existe una constante  $L \in [0, 1[$  tal que  $|f'(x)| \leq L$  para todo  $x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ .

Recordemos el teorema del valor medio el cual nos dice que para todo  $a$  distinto de  $b$  en  $\mathbb{R}$  se tiene que existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Si la condición inicial  $x_0$  está en  $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ , por ejemplo en  $[x^* - \varepsilon, x^*]$ , observamos que  $x_1 = f(x_0)$  y por lo tanto existe  $c_1 \in ]x_0, x^*[$  tal que

$$f(x^*) - f(x_0) = f'(c_1)(x^* - x_0).$$

Como  $x^*$  es un punto fijo de  $f$ , lo anterior implica que

$$|x^* - x_1| = |f'(c_1)||x^* - x_0| \leq L|x^* - x_0| \leq \varepsilon,$$

es decir,  $x_1$  está en el intervalo  $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ . De igual forma, utilizando el teorema del valor medio, existirá  $c_2$  entre  $x_1$  y  $x^*$  tal que

$$|x_2 - x^*| = |f'(c_2)||x^* - x_1| \leq L|x^* - x_1| \leq L^2|x^* - x_0| \leq \varepsilon.$$

De manera iterativa se prueba que

$$|x_k - x^*| \leq L^k|x^* - x_0| \leq \varepsilon,$$

y por lo tanto, como  $L < 1$ , se tiene  $|x_k - x^*| \rightarrow 0$ , es decir,  $x_k \rightarrow x^*$ .  $\square$

**Ejercicio 1.7.** Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, cuya derivada es una función continua, muestre utilizando el teorema del valor medio que, si  $|f'(x^*)| < 1$ , entonces la función  $f$  es contractante para valores cercanos a  $x^*$ , es decir,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in ]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$$

para cierto  $L \in [0, 1[$  y  $\varepsilon > 0$ .

**Ejercicio 1.8.** Considere el modelo del Ejercicio 1.2 y determine para que configuración de los parámetros  $p_{\Delta t}^M$  y  $p_{\Delta t}^N$  el punto  $x^* = 0$  es un equilibrio (¿global o local?) estable.

**Ejercicio 1.9.** Considere los siguientes modelos a tiempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \rho; \\ x_{k+1} &= \rho(x_k + \rho); \\ x_{k+1} &= (x_k)^\alpha. \end{aligned}$$

- A través del principio de inducción (ver monografías [14, 17]), determine en cada caso la trayectoria  $x_k$ .
- Haciendo un análisis de los parámetros y de la condición inicial establezca el comportamiento de  $x_k$  cuando  $k$  tiende a  $+\infty$ .

En las próximas secciones aplicaremos los contenidos vistos hasta ahora a modelos en tiempo discreto.

## 1.2 Máxima captura sustentable

El objetivo del análisis que realizaremos a continuación, es poder determinar una política óptima de extracción de un recurso renovable (e.g. especie forestal, vegetal, marina) en el sentido de obtener la mayor cantidad del recurso sin afectar la permanencia de éste en el ecosistema.

La variable de estado indicará la cantidad del recurso, representado por un número real positivo, en virtud de la unidad de medida considerada. Denotemos por  $x_k$  la cantidad del recurso en el periodo  $k$ , medido en años, meses o días. Lo primero que se debe imponer es que  $x_k$  sea siempre positivo puesto que está representando una cantidad.

Supondremos que el recurso natural a ser analizado se reproduce a una tasa  $\rho(x)$ , es decir, si en un instante dado, la cantidad que hay del recurso es  $x$ , entonces en el instante siguiente (año siguiente, temporada siguiente o mes siguiente) la cantidad del recurso será la cantidad del periodo precedente más  $\rho(x)x$ . En la introducción de este capítulo dedujimos un modelo donde la tasa de reproducción era constante, lo que equivaldría a  $\rho(x) = \rho$ . Esta suposición, en ciertas situaciones, carece de realismo pues implicará que el recurso crece en cantidad de manera muy rápida o se extingue de igual forma. A medida que la población de individuos (nivel del recurso) aumenta, la tasa de reproducción debiera ser más baja gracias a un proceso de regulación al interior de la especie. Esto se puede deber a que la cantidad de alimentos para ellos es limitada y por lo tanto no pueden crecer indefinidamente en número. La tasa de crecimiento decreciente en  $x$  que se propone es

$$\rho(x) = \rho \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde  $\rho$  y  $K$  son constantes propias a la especie y al entorno donde ella evoluciona. Parte del trabajo estadístico que se realiza en economía de recursos naturales es la determinación de las constantes  $\rho$  y  $K$ . De esta forma, el modelo a tiempo discreto estará dado por

$$(1.9) \quad x_{k+1} = f(x_k) = x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right).$$

Este modelo se conoce como modelo logístico. Fue introducido en la primera mitad del siglo XIX por Pierre Verhulst para dinámicas a tiempo continuo. La deducción de este modelo, en tiempo continuo, es abordada en el Capítulo 2. El modelo logístico



a tiempo discreto fue introducido por el biólogo australiano Robert May en el año 1976, el cual estudiaremos con un poco más de detalle en la próxima sección.

Para que el modelo sea realista, la función  $f$  debe ser tal que  $x_k$  sea siempre positivo. Si

$$x > K \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right),$$

se observa que  $f(x) = x + \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$  es negativo, por lo tanto el nivel del recurso nunca debe sobrepasar  $K(\frac{1+\rho}{\rho})$ . Como el máximo de la función  $f$  se alcanza en  $\bar{x} = K(\frac{1+\rho}{2\rho})$  tomando el valor

$$f(\bar{x}) = K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho},$$

para que siempre se obtengan valores positivos, se debe tener

$$(1.10) \quad K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \leq K \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right) \Rightarrow \rho \leq 3.$$

En tal situación ( $\rho \leq 3$ ), si  $x$  está en el intervalo  $[0, K(\frac{1+\rho}{\rho})]$  se tendrá que  $f(x)$  permanecerá en el mismo intervalo pues

$$0 \leq f(x) \leq f(\bar{x}) = K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \leq K \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right),$$

teniéndose entonces que la función  $f$  (que es continua) satisface

$$(1.11) \quad f(x) \in \left[ 0, K \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right) \right] \quad \forall x \in \left[ 0, K \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right) \right]$$

y, por el Teorema 1.4, se deduce entonces que existe al menos un punto fijo de  $f$  en  $[0, K(\frac{1+\rho}{\rho})]$ . La verdad es que en este caso resulta fácil determinar que existen dos puntos fijos, los cuales serán  $x^* = 0$  y el equilibrio positivo  $x^* = K$ .

Dependiendo de los valores de  $\rho$  y  $K$  el cero y el equilibrio positivo puede que sean estables o no.

Gracias a la propiedad (1.11), si la condición inicial  $x_0$  está en el intervalo  $[0, K(\frac{1+\rho}{\rho})]$ , podremos asegurar que las trayectorias  $x_k$  del sistema (1.9) permanecen por siempre en el mismo intervalo.

Agreguemos ahora un término de extracción. Si en el periodo  $k$  hay una cantidad  $x_k$  del recurso, éste evoluciona siguiendo la relación (1.9). Explotando, al **final** de cada periodo, una porción  $h < 1$  de éste, es decir, se extrae  $h(x_k + \rho x_k(1 - \frac{x_k}{K}))$ , el sistema estará dado por

$$x_{k+1} = (1-h) \left( x_k + \rho x_k \left( 1 - \frac{x_k}{K} \right) \right).$$

Para cada  $h < 1$ , un equilibrio no nulo del modelo con extracción será un nivel  $x_h^* \neq 0$  tal que

$$x_h^* = (1-h) \left( x_h^* + \rho x_h^* \left( 1 - \frac{x_h^*}{K} \right) \right),$$

donde el subíndice  $h$  en  $x_h^*$  lo hemos colocado para indicar la dependencia del equilibrio con respecto a la porción de explotación  $h$ .

El nivel  $x_h^*$  será positivo si  $h < \frac{\rho}{1+\rho}$  y en tal caso estará dado por

$$(1.12) \quad x_h^* = K \left( 1 - \frac{h}{\rho(1-h)} \right) < K.$$

Si definimos la función

$$g(x) = x + \rho x \left( 1 - \frac{x}{K} \right),$$

el modelo con extracción se escribe

$$x_{k+1} = (1-h)g(x_k),$$

siendo el equilibrio  $x_h^*$  un elemento que satisface

$$(1.13) \quad x_h^* = (1-h)g(x_h^*).$$

Dada una porción  $h$ , en el equilibrio se extraerá un cantidad  $\xi(h) := hg(x_h^*)$  del recurso la que, de (1.13), se deduce igual a  $\xi(h) = g(x_h^*) - x_h^*$ , obteniéndose

$$\xi(h) = \rho x_h^* \left( 1 - \frac{x_h^*}{K} \right).$$

Si la fracción de explotación  $h$  es tal que el equilibrio  $x_h^*$  coincida con el máximo de la función

$$(1.14) \quad x \mapsto \rho x \left( 1 - \frac{x}{K} \right),$$

se tendrá que para dicha tasa de explotación, la captura dada por  $\xi(h)$  se maximiza. Busquemos la fracción  $h$  con la cual se tiene lo anterior. Dado que el máximo de la función (1.14) se obtiene en  $\bar{x} = K/2$ , lo cual se deduce al derivar e igual a cero pues la función es una parábola negativa, debemos buscar  $h$  tal que

$$x_h^* = \frac{K}{2},$$

concluyendo de (1.12)

$$K \left( 1 - \frac{h}{\rho(1-h)} \right) = \frac{K}{2},$$

lo que implica

$$(1.15) \quad h = \frac{\rho}{2+\rho}.$$

Al decretar que la tasa de explotación sea la dada por (1.15), estaremos imponiendo que el sistema se estabilice (si el equilibrio resulta ser estable) en un nivel donde se obtiene la máxima extracción posible sin que el recurso se extinga. Es decir, se maximiza la extracción y esta actividad se ejerce de manera sustentable. Si se extrae una porción  $h$  mayor, puede que se tengan mayores ganancias económicas en un instante dado pero después el recurso disminuirá, pudiendo incluso extinguirse y, por lo tanto, también tendrá repercusiones de tipo económico para quien lo extrae.

La captura máxima obtenida, dada por  $\xi(h)$  con  $h$  definido por (1.15), se conoce como el *máximo rendimiento sustentable* denotado  $MSY$  por sus siglas en inglés (maximal sustainable yield). En la planificación para extracción de recursos naturales, buscar el  $MSY$  es una metodología actualmente utilizada para extraer de manera sustentable la mayor cantidad posible de un recurso. En el libro [5] es posible encontrar variados ejemplos de aplicación de éste y otros conceptos relativos a la sustentabilidad en la extracción de recursos naturales.

**Ejercicio 1.10.** Considere un modelo con extracción donde se explota una fracción  $h$  del recurso, pero dicha actividad se ejerce al comienzo de cada periodo. Para esta situación realice los siguientes procedimientos:

1. Escribir el modelo que representa la evolución del recurso.
2. Dada un tasa de explotación  $h$ , obtener el correspondiente equilibrio no nulo  $x_h^*$  e imponer una condición para que éste sea positivo.
3. Calcular el  $MSY$  y el nivel de extracción  $h$  donde se alcanza.

**Ejercicio 1.11.** Introduzca la siguiente modificación al sistema presentado en esta sección

$$x_{k+1} = x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) - h.$$

1. ¿Cómo justificaría este nuevo modelo?
2. Dada un tasa de explotación  $h$ , obtenga el correspondiente equilibrio no nulo  $x_h^*$  y determine una condición para que este sea positivo.
3. Calcule el  $MSY$  y el nivel de extracción  $h$  donde se alcanza.

### 1.3 Modelo logístico discreto

En esta sección ahondaremos un poco más en las propiedades de una evolución dada por el modelo logístico discreto

$$x_{k+1} = x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right).$$

En la Sección 1.2 vimos que si el parámetro  $\rho$  es menor o igual a tres, entonces el sistema es *invariante* en el intervalo  $[0, (\frac{1+\rho}{\rho})K]$ . Esto quiere decir que para cualquier condición inicial en dicho intervalo, la trayectoria  $x_k$  permanecerá ahí.

Un equilibrio del sistema es un nivel  $x^*$  tal que

$$x^* = x^* + \rho x^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right),$$

observándose que sólo existen dos equilibrios posibles, los cuales son  $x^* = 0$  y  $x^* = K$ .

Utilicemos el Teorema 1.6 para analizar la estabilidad de estos dos equilibrios. Recordemos que si el sistema a tiempo discreto viene dado por

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

$x^*$  es un equilibrio y  $|f'(x^*)| < 1$  entonces, el equilibrio será localmente estable. En nuestro caso la función  $f$  será

$$f(x) = x + \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) = (1 + \rho)x - \frac{\rho x^2}{K},$$

y su derivada estará dada por

$$f'(x) = 1 + \rho - \frac{2\rho x}{K}.$$

Evaluando la derivada en los puntos de equilibrio se tiene

$$f'(0) = 1 + \rho \quad \text{y} \quad f'(K) = 1 - \rho.$$

De esta forma, para  $\rho > 0$  el equilibrio  $x^* = 0$  es inestable<sup>1</sup>. Si  $\rho$  pertenece al intervalo  $]0, 2[$  entonces  $|f'(K)| = |1 - \rho| < 1$  y por lo tanto,  $x^* = K$  es localmente estable.

Por otro lado, siempre se tendrán las siguientes propiedades de monotonía en el intervalo  $[0, (\frac{1+\rho}{\rho})K]$  (suponiendo  $\rho > 0$ )

$$(1.16) \quad \begin{cases} x < K \Rightarrow x < f(x) \\ x > K \Rightarrow f(x) < x. \end{cases}$$

Consideremos la ecuación de segundo grado

$$(1.17) \quad K - f(x) = \frac{\rho x^2}{K} - (1 + \rho)x + K = 0,$$

que tiene por solución

$$x_1 = K \left( \frac{1 + \rho - |1 - \rho|}{2\rho} \right) \quad \text{y} \quad x_2 = K \left( \frac{1 + \rho + |1 - \rho|}{2\rho} \right).$$

Como ya vimos que si  $\rho \in ]0, 2[$  el equilibrio  $x^* = K$  es localmente estable, veamos si se puede decir algo más cuando  $\rho$  esté en el intervalo  $]0, 1[$ . En tal caso, las soluciones de la ecuación (1.17) serán

$$x_1 = K \quad \text{y} \quad x_2 = K/\rho > K,$$

teniéndose entonces

$$(1.18) \quad \begin{cases} K - f(x) > 0 & \forall x < x_1 = K \\ K - f(x) < 0 & \forall x \in ]x_1, x_2[ = ]K, K/\rho[. \end{cases}$$

Considerando las ecuaciones (1.16) y (1.18) se obtiene así

$$\begin{aligned} x < K &\Rightarrow x < f(x) < K \\ x > K &\Rightarrow K < f(x) < x. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Este concepto no ha sido introducido, pero en este contexto, indicará la no estabilidad del equilibrio.

Del desarrollo anterior se deduce que si  $\rho \in ]0, 1[$  entonces para cualquier condición inicial  $x_0$  en el intervalo  $]0, \left(\frac{K}{\rho}\right)[$  se tendrá convergencia al equilibrio  $x^* = K$  de manera creciente ( $x_{k+1} > x_k$ ) si se comenzó con una cantidad más pequeña a  $K$  o de manera decreciente ( $x_{k+1} < x_k$ ) si la condición inicial es mayor a  $K$ . Si la condición inicial es mayor a  $\frac{K}{\rho} > K$  pero menor a  $\left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)K$  entonces también se tendrá convergencia a  $K$  pero no será de manera decreciente.

Si el parámetro  $\rho$  está en el intervalo  $]1, 2[$  el equilibrio  $x^* = K$  sigue siendo localmente estable pero la convergencia no resulta ser creciente o decreciente. Produciéndose oscilaciones en torno a  $x^* = K$  (se toman valores mayores y menores a  $K$ ) convergiendo al equilibrio (ver Figura 1.6). En realidad, el equilibrio  $x^* = K$  resulta ser globalmente estable para cualquier condición inicial en  $]0, \left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)K[$  si el parámetro  $\rho$  está en  $]0, 2[$ .

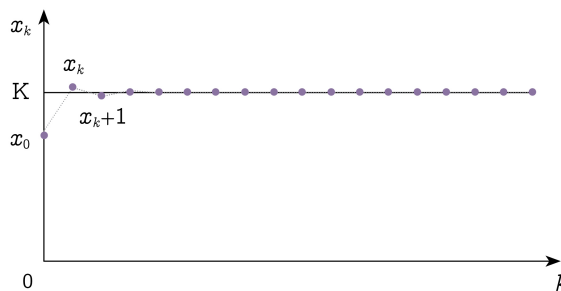


FIGURA 1.6. Trayectoria  $x_k$  para  $\rho \in ]1, 2[$ .

Veamos qué sucede cuando  $\rho > 2$ . En este caso se tiene que  $f'(K) = 1 - \rho < -1$  y por lo tanto el equilibrio  $x^* = K$  es inestable. De hecho, se puede observar que para valores de  $\rho$  mayores a 2 pero cercanos, a partir de una condición inicial en  $]0, \left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)K[$ , se converge<sup>2</sup> a un ciclo de periodo dos entorno al equilibrio  $K$ , estos es, que para  $k$  grande se tendrá

$$x_k \approx x_{k+2},$$

con  $x_k < K$  y  $x_{k+1} > K$  como se observa en la Figura 1.7

A medida que se hace crecer  $\rho$  se tendrá que se sigue manteniendo un ciclo de tamaño dos pero la amplitud, es decir, el valor  $x_{k+1} - x_k$  irá en aumento. Esto sucederá hasta que se alcance el valor de  $\rho = \sqrt{6}$  que es a partir de cuando las trayectorias  $x_k$

<sup>2</sup>El concepto convergencia sólo había sido utilizado para señalar que la trayectoria tiende a un punto específico. En este caso, quiere decir que la trayectoria, en tiempos grandes, tiene un comportamiento cíclico.

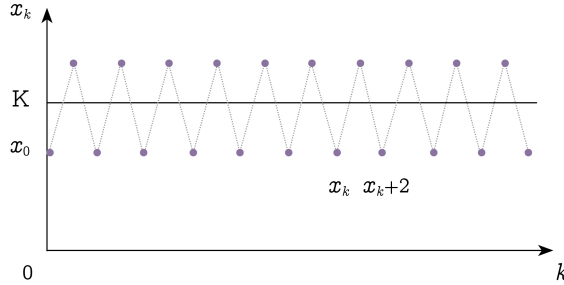


FIGURA 1.7. Trayectoria  $x_k$  con un ciclo de periodo 2.

tenderán a un ciclo de periodo cuatro en torno a  $K$ , es decir, que para valores de  $k$  grandes, se tendrá

$$x_k \approx x_{k+4},$$

como se señala en la Figura 1.8

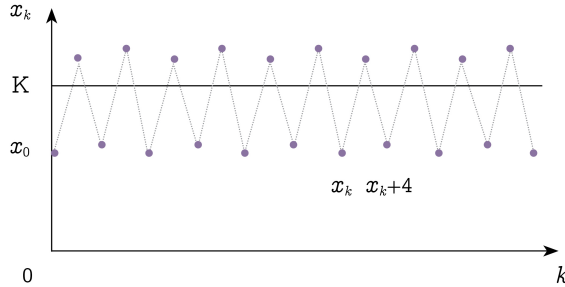


FIGURA 1.8. Trayectoria  $x_k$  con un ciclo de periodo 4.

A medida que se sigue aumentando el parámetro  $\rho$  se observa que el ciclo de periodo cuatro aumenta su amplitud hasta llegar a obtener (aumentando el valor de  $\rho$ ) un ciclo de periodo ocho en torno a  $K$  como se gráfica en la Figura 1.9.

Lo anterior se puede seguir realizando aumentando el parámetro  $\rho$  obteniendo ciclos de periodo  $2^n$ . Una vez que se tiene un ciclo de tamaño  $2^n$ , este comportamiento cualitativo se preservará hasta que el parámetro  $\rho$  llegue a un nivel  $\rho_n$  y cada vez que se aumenta, la amplitud de los ciclos asociados irá creciendo. Así, cuando  $\rho$  era mayor, pero cercano a dos, se tenía que se tendía a un ciclo de periodo dos hasta llegar a  $\rho_1 = \sqrt{6} > 2$ . A partir de ese valor, se tiene un ciclo de periodo cuatro hasta un valor de  $\rho_2 > \rho_1$ . Luego, en las figuras observamos que se tiene un ciclo de periodo ocho y

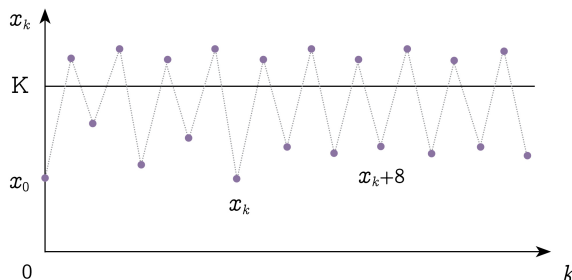


FIGURA 1.9. Trayectoria  $x_k$  con un ciclo de periodo 8.

esto sucederá hasta un valor de  $\rho_3 > \rho_2$ . Sucesivamente, lo anterior se va a tener para todo  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , pero los ciclos a partir de un instante tendrán un periodo de una potencia de base distinta a dos. Por otro lado, es posible observar que la diferencia entre los parámetros  $\rho_{n+1} - \rho_n > 0$  decae rápidamente teniendo una convergencia de  $\rho_n$  hacia  $\rho_\infty = 2,5699456\dots$ . Si el parámetro  $\rho$  de nuestro sistema a tiempo discreto es mayor a  $\rho_\infty$ , se pueden encontrar trayectorias que son llamadas *órbitas caóticas*. El término caótico se les asocia por dos razones. La primera es que no son trayectorias periódicas, es decir, no vuelven a tomar un valor cercano a uno alcanzado anteriormente de manera cíclica. Además, muestran una muy sensible dependencia con respecto a las condiciones iniciales. Esto implica que con dos condiciones iniciales muy cerca una de otra, las trayectorias generadas a partir de las dos serán completamente diferentes. Lo anterior puede ser muy dramático en la práctica ya que si se comete un error, por pequeño que sea, en la medición de la condición inicial, la trayectoria obtenida puede diferir bastante de aquella asociada a la verdadera condición inicial. En tales modelos, no será posible hacer proyecciones de largo plazo.

La Figura 1.10 muestra el comportamiento de una trayectoria para el valor de  $\rho = 3$ . La Figura 1.11 muestra la diferencia entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas para el mismo valor de  $\rho = 3$ .

Los comportamientos cíclicos y caóticos descritos, no tienen ninguna relación con lo que sucede en tiempo continuo para el modelo logístico, como se verá en el Capítulo 2. En ese contexto, para cualquier condición inicial positiva, la solución de la ecuación diferencial ordinaria asociada a la función logística converge a  $K$ . Éste es un claro ejemplo donde no hay concordancia entre un modelo a tiempo continuo y tiempo discreto, aunque las dinámicas estén definidas por la misma función.

Ya que el comportamiento caótico, presente en el modelo logístico a tiempo discreto, presenta gran sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, ¿cuáles son las implicancias biológicas de este tipo de resultado matemático?, ¿es razonable que una población pueda ser modelada por un sistema tan sensible?, ¿no será mejor incluir

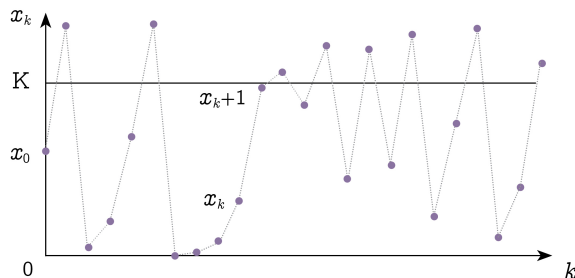


FIGURA 1.10. Trayectoria  $x_k$  para  $\rho = 3$ .

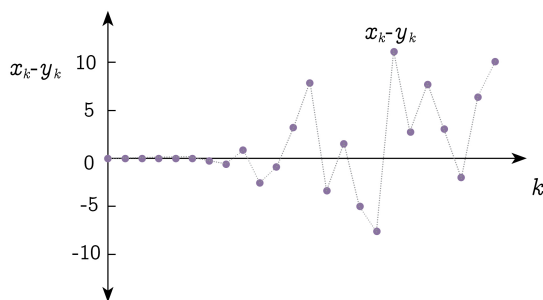


FIGURA 1.11. Diferencia  $x_k - y_k$  entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas, para  $\rho = 3$ .

aspectos aleatorios en el modelamiento? La predicción a largo plazo parece ser imposible en este tipo de modelos, siendo precisamente ésta una de las motivaciones del trabajo científico. Para quien tiene la tarea de modelar, analizar estos aspectos (sensibilidad del sistema con respecto a las condiciones iniciales, parámetros del modelo, incluir aleatoriedad) revierten una gran importancia.

Viendo lo que sucedía con el sistema a tiempo discreto dado por la función logística, se planteó la necesidad de validar experimentalmente (a través del seguimiento de una población biológica) el tipo de comportamientos señalados en esta sección. Esto fue logrado por Constantino, Desharnais, Cushing y Dennis el año 1997 estudiando la dinámica del *Tribolium*. Ellos analizaron un modelo un poco más sofisticado que el logístico pero que representa la misma transición entre un estado de equilibrio, ciclos y luego comportamientos caóticos haciendo variar los parámetros del modelo.

Volviendo a los coeficientes  $\rho_n$ , que representan aquellos valores donde el periodo de las trayectorias límites se duplicaban, es posible mostrar que el cociente



$\delta_n := \frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\rho_{n+1} - \rho_n}$ , que indica la tasa de convergencia de  $\rho_n$  a  $\rho_\infty$ , tiende al número  $\delta = 4,6692\dots$ . Este valor es conocido como una de las constantes de Feigenbaum-Coulet-Tresser, en honor al matemático y físico estadounidense Mitchell Feigenbaum, al físico Pierre Coulet y al matemático Charles Tresser, estos dos últimos de Francia, quienes demostraron en la década de los 70, que para una clase de sistemas dinámicos discretos en una dimensión (como la logística), los parámetros  $\rho_n$  que indican una duplicación del periodo de las trayectorias, van a satisfacer

$$\delta_n := \frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\rho_{n+1} - \rho_n} \rightarrow \delta = 4,6692\dots$$

es decir, el valor  $\delta$  no depende de la función en particular, siendo éste un número trascendente.

De manera paralela, Feigenbaum por un lado, Coulet y Tresser por otro, descubrieron un método para probar lo anterior. Durante muchos años, sólo se le dió crédito a Feigenbaum, pero hoy ya se reconoce a los tres. Cuando Coulet y Tresser hicieron el descubrimiento eran jóvenes, y el artículo con el resultado demoró en ser publicado. Pierre Coulet visita anualmente nuestro país, pues trabaja con el físico chileno Enrique Tirapegui y además varios físicos nacionales han realizado sus estudios bajo su dirección. En Chile se comenzó a dar justicia a la contribución de Coulet y Tresser, siendo en nuestro país la primera vez que coincidieron Coulet y Feigenbaum, cuando fueron invitados a una Escuela Latino Americana de Física en los años 80.

#### 1.4 Ecuaciones de recurrencia en varias variables

Nuestro objetivo a partir de ahora es estudiar evoluciones a tiempo discreto que involucren más de una variable. Para ello introduzcamos un ejemplo que consiste en estudiar la evolución en la relación de una pareja, a la cual llamaremos Romeo y Julieta para ser más gráficos, en referencia obvia a la obra de Shakespeare. Es bastante razonable (a riesgo de ser frívolos) pensar que los sentimientos mutuos en una pareja varían en el tiempo. El matemático estadounidense Steven Strogatz, introdujo en 1988 un modelo en tiempo continuo que daba cuenta de este fenómeno. La versión que abordaremos a continuación es a tiempo discreto y su formulación, con el respectivo desarrollo, puede encontrarse en [6].

Notemos por  $x_k$  el sentimiento amor/odio que Julieta tiene por Romeo el día  $k$  e  $y_k$  el sentimiento amor/odio que Romeo tiene hacia Julieta el día  $k$  (por razones evidentes, omitiremos la unidad de medida) e interpretemos que si  $x_k > 0$  Julieta ama a Romeo y si  $x_k < 0$  Julieta en realidad prefiere no verlo ese día (lo odia). Los valores absolutos  $|x_k|$  y  $|y_k|$  indicarán la intensidad de amor u odio según corresponda.

Asumamos que Romeo y Julieta responden linealmente a sus propios sentimientos lo que expresamos de la forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_J x_k \\ y_{k+1} &= a_R y_k. \end{aligned}$$

Puesto que Romeo y Julieta ya son pareja, parece razonable asumir que  $a_J$  y  $a_R$  son constantes positivas. La actitud romántica de cada miembro de la pareja puede expresarse en función de la magnitud de estos parámetros. Si ambos son menor que uno, entonces  $x_k$  e  $y_k$  convergen a cero lo que representa que el sentimiento inicial del uno al otro tiende a una actitud neutral (ni amor ni odio). Si  $a_J$  y  $a_R$  son mayores a uno entonces el sentimiento inicial se intensifica día a día.

Ahora agregaremos unos términos lineales que representen la respuesta de Romeo y Julieta respecto al sentimiento del otro. Esto lo escribimos como

$$(1.19) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= a_J x_k + p_J y_k \\ y_{k+1} &= a_R y_k + p_R x_k. \end{aligned}$$

Los parámetros  $p_J$  y  $p_R$  describen como los sentimientos cambian en respuesta del sentimiento actual del otro. El signo de estos parámetros representarán diferentes estilos dentro de una relación. Si  $p_R > 0$  entonces, Romeo tiende a amar más a Julieta si es que ella lo ama un determinado día ( $x_k > 0$ ) y la odiará más si es que ella ese día ha preferido no verlo ( $x_k < 0$ ). Por otro lado, si  $p_R < 0$  entonces, el odio (o indiferencia) de Julieta ( $x_k < 0$ ) hacia Romeo contribuye a que él la ame más y contrariamente, el amor de Julieta ( $x_k > 0$ ) hacia Romeo hace que el sentimiento de él decrezca.

De esta forma, la elección de los parámetros  $a_J$ ,  $a_R$ ,  $p_J$  y  $p_R$  representan el estilo de cada miembro en la pareja y cualitativamente, permiten estudiar su evolución a lo largo del tiempo. Para cuatro configuraciones de parámetros, en la Figura 1.12 se han graficado las evoluciones de  $x_k$  e  $y_k$  las cuales usted puede replicar utilizando una planilla de cálculo o un programa matemático. En la primera columna se ilustran las evoluciones de  $x_k$  e  $y_k$  en el transcurso del tiempo mientras que en la segunda se hace lo mismo en el plano  $x_k - y_k$ , conocido como diagrama de fase, cuyo concepto equivalente en tiempo continuo es abordado en el Capítulo 3, pero que se deja propuesto obtener a tiempo discreto en el Ejercicio 3.10. Herramientas para graficar diagramas de fase en tiempo discreto, pueden encontrarse en la monografía [9]. Observe en la Figura 1.12 que para ciertas elecciones de parámetros los sentimientos tienden a: aumentar, decrecer, mantenerse estables o a comportarse oscilatoriamente.

**Ejercicio 1.12.** Utilizando una planilla de cálculo o un programa matemático, para condiciones iniciales  $x_0 = y_0 = 1$  grafique  $x_k$ ,  $y_k$  para cada  $k$  y  $(x_k, y_k)$  del modelo (1.19) para las siguientes elecciones de parámetros  $a_J$ ,  $a_R$ ,  $p_J$  y  $p_R$ :

1.  $a_J = 1 = a_R = p_J = p_R = 1$ ;
2.  $a_J = 1$ ;  $a_R = 1$ ;  $p_J = p_R = -1$ ;
3.  $a_J = 1/10$ ;  $a_R = 2$ ;  $p_J = 1$ ;  $p_R = -1$ ;
4.  $a_J = 1$ ;  $a_R = 4$ ;  $p_J = 2$ ;  $p_R = -1$ ;
5.  $a_J = 3$ ;  $a_R = 1/10$ ;  $p_J = -2$ ;  $p_R = -1$ .

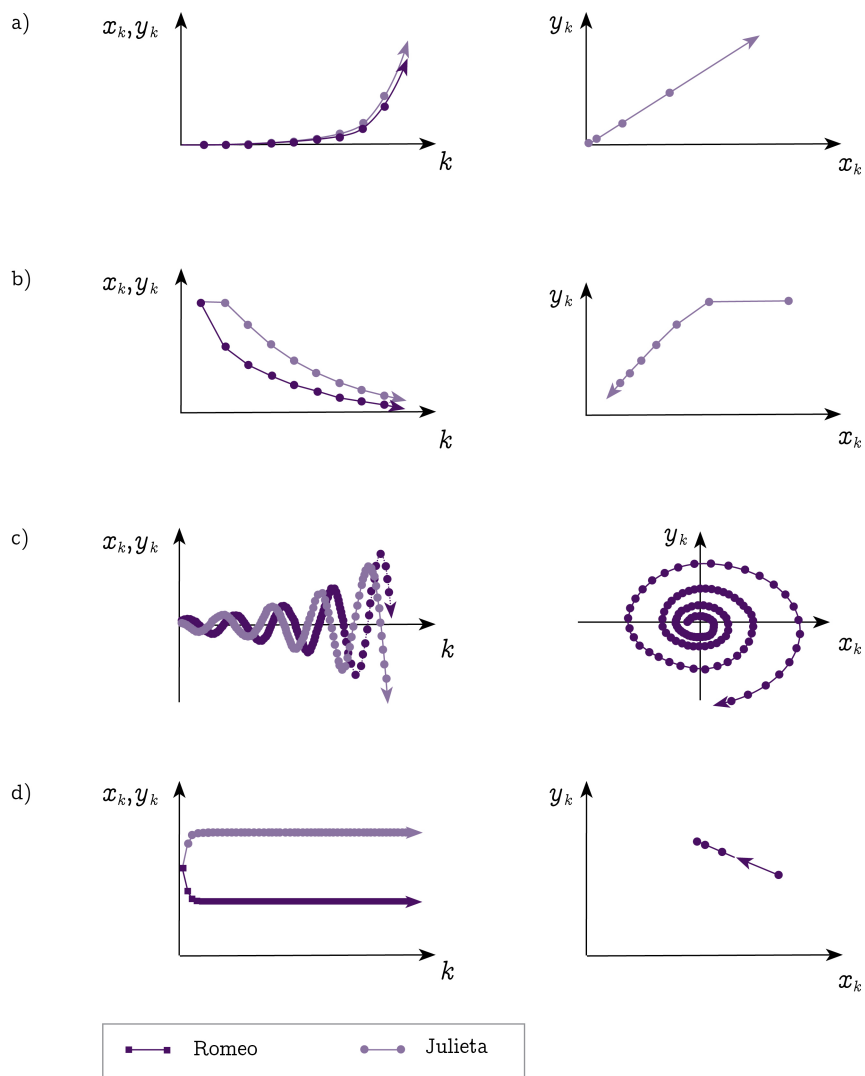


FIGURA 1.12. Trayectorias de la evolución entre Romeo y Julieta.

En fenómenos a tiempo discreto que involucren  $n \in \mathbb{N}$  variables, escribiremos un sistema de ecuación de recurrencias como

$$(1.20) \quad X_{k+1} = f(X_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde el vector  $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$  reagrupa las  $n$  variables en estudio y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la función de transición.

Análogamente al caso en que la variable en estudio es sólo una, diremos que un punto fijo o equilibrio del modelo (1.20) es un vector  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$  que satisface  $f(X^*) = X^*$ .

Por cierto, si para algún instante  $k_0$  llegamos a un punto fijo  $X^* \in \mathbb{R}^n$  entonces, la solución o trayectoria a partir de este instante será igual a  $X^*$ .

**Ejercicio 1.13.** Determine el o los equilibrios del modelo que describe los sentimientos de Romeo y Julieta (1.19). En dicho ejemplo, el vector  $X_k = (x_k, y_k)$  es de dos variables.

Resolver el sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $f(X^*) = X^*$  donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en general, es un problema difícil. Incluso si  $f$  es una función lineal, la resolución de tal sistema puede ser compleja desde el punto de vista numérico ([18]). Tal como se tenía en una dimensión, si la función  $f$  es contractante, podremos asegurar la existencia un único punto fijo, en el cual, la iteración

$$X_{k+1} = f(X_k)$$

provee la sucesión  $X_k$  que converge a él. Para poder definir qué significa el que una función de varias variables sea contractante, o más generalmente ésta sea Lipschitz, debemos considerar una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, notando  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se puede trabajar con

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|X\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{ó} \quad \|X\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Así, elegida una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$ , diremos que la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz, si existe  $L \geq 0$  tal que

$$\|f(X) - f(Y)\| \leq L\|X - Y\| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

y si  $L < 1$ , diremos que la la función es contractante.

De esta forma, realizando el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 1.3 podemos asegurar que si  $f$  es contractante, entonces, existe un único punto fijo. El desarrollo de este procedimiento en varias variables es abordado en [9].

Para establecer un resultado que generalice el Teorema 1.4 al caso de varias variables es necesario recordar, que un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice convexo si para todo par de puntos  $X, Y$  en  $C$  se tiene que el trazo que los une, está contenido en  $C$ , es decir,

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

como se muestra en la Figura 1.13.

En  $\mathbb{R}$  los conjuntos convexos se reducen a los intervalos. Para mayores detalles sobre conjuntos convexos y sus propiedades, ver la monografía [8]. Por otro lado, un

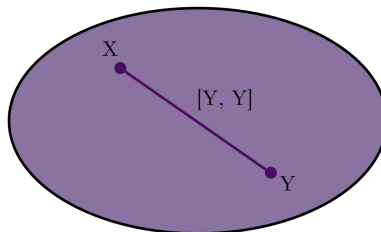


FIGURA 1.13. Conjunto convexo: para todo  $X, Y$  en el conjunto, el intervalo  $[X, Y] := \{\lambda X + (1 - \lambda)Y : \lambda \in [0, 1]\}$  está contenido en  $C$ .

conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice acotado, si existe  $r > 0$  tal que

$$C \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| \leq r\},$$

y se dirá cerrado si para toda sucesión en  $C$  que converge, su límite también está en  $C$ . En  $\mathbb{R}$  los conjuntos convexos, cerrados y acotados son los intervalos de la forma  $[a, b]$ .

Introducidos los conceptos necesarios, podemos presentar el siguiente teorema que nos asegura la existencia de un punto fijo para funciones continuas.

**Teorema 1.7.** *Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, si para un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  convexo, cerrado y acotado, se satisface*

$$f(X) \in C \quad \forall X \in C$$

*entonces, existe un elemento  $X^*$  en  $C$  tal que*

$$f(X^*) = X^*.$$

El anterior resultado es conocido como el teorema del punto fijo de Brouwer en honor al matemático holandés Luitzen Brouwer quien lo demostró el año 1909 para el caso  $n = 3$  y en 1912 para el caso general. Este teorema, de gran importancia en la actualidad, fue generalizado por el matemático japonés Shizuo Kakutani a mediados del siglo XX y celebradamente usado por el estadounidense John Nash, en la introducción del equilibrio que lleva su nombre en teoría de juegos.

Tal como se hizo en modelos que involucran una sola variable, un punto fijo (equilibrio)  $X^*$  de  $f$  que pertenece a un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice localmente estable en  $C$  si para toda condición inicial  $X_0 \in C$  suficientemente cerca de  $X^*$  se tiene  $X_k \rightarrow X^*$  donde  $X_{k+1} = f(X_k)$ . El equilibrio  $X^*$  es globalmente estable si para toda condición  $X_0 \in C$  la sucesión  $X_k$  converge a  $X^*$ .

En un sistema en varias variables lineal, es decir, uno que viene dado por

$$(1.21) \quad X_{k+1} = AX_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times n$  (como en el modelo de Romeo y Julieta), se observa que el vector  $X^* = (0, 0, \dots, 0)$  es un equilibrio del sistema. Conociendo el módulo de los valores propios de  $A$  es posible determinar si  $X^* = (0, 0, \dots, 0)$  es un equilibrio globalmente estable, como se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 1.8.** *Considere el sistema de ecuaciones de recurrencias lineal dado por (1.21). Si el módulo de todos los valores propios de  $A$  es menor que uno, entonces, para cualquier condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  se tendrá  $X_k \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$ .*

**Demostración.** Dado que la solución del sistema (1.21) estará dada por

$$X_k = A^k X_0$$

lo cual puede ser probado por inducción, se tiene que si los valores propios de  $A$  tienen módulo menor que uno, entonces  $A^k \rightarrow 0$  (matriz nula), resultado clásico del álgebra lineal posible de encontrar en la monografía de esta misma colección [9].  $\square$

En el texto [9] se introduce una metodología para calcular las potencias  $A^k$  de una matriz  $A$ . Para ello, la herramienta fundamental, propia al álgebra lineal, que se utiliza en el mencionado texto es la de obtener la descomposición de Jordan de una matriz para calcular sus potencias. Esta consiste en, dada una matriz cuadrada  $A$ , encontrar una matriz invertible  $P$  y una matriz  $D$  tal que

$$A = PDP^{-1},$$

teniéndose

$$A^k = PD^k P^{-1}.$$

La idea de realizar esta descomposición es que calcular las potencias de la matriz  $D$  resultará más fácil que calcular las potencias de  $A$ . De hecho, si la matriz  $A$  es diagonalizable, propiedad que se verifica si todos los valores propios de  $A$  son reales y distintos, se tiene que  $D$  es una matriz diagonal cuyos coeficientes son precisamente los valores propios de  $A$ .

**Ejercicio 1.14.** Dado el sistema lineal en dimensión dos

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

a través del cálculo de valores propios (ver monografía [9]) establezca una condición necesaria y suficiente que involucre los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  para que el equilibrio  $x^* = (0, 0)$  sea globalmente estable y determine condiciones para que exista un equilibrio diferente de  $(0, 0)$ . Aplique lo obtenido anteriormente en el modelo lineal de Romeo y Julieta deduciendo las condiciones para que el equilibrio  $(0, 0)$  (estado que representa la indiferencia de ambas partes), sea globalmente estable.

En sistemas no lineales, tendremos que analizar los valores propios de la matriz Jacobiana (definida más abajo) de la función  $f$  evaluada en un equilibrio  $X^*$  para poder determinar si este es localmente estable.

Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde

$$f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

la *Matriz Jacobiana* es aquella que agrupa las derivadas parciales (cuando existen) de las funciones  $f_i$  con respecto a las variables  $x_j$ . Esta matriz la notaremos  $Df(X)$  y está dada por

$$(1.22) \quad Df(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

En  $\mathbb{R}$ , la matriz Jacobiana de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se reduce a su derivada  $f'(x)$ .

Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice de *clase  $C^1$*  si todas las derivadas parciales existen y estas son continuas, es decir, si la función  $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n \times n}$  a valores en las matrices cuadradas de dimensión  $n \times n$  que a cada  $X \in \mathbb{R}^n$  le asocia la matriz  $Df(X)$  dada por (1.22), es una función continua. Si la función  $f$  es lineal, es decir,  $f(X) = AX$  donde  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ , entonces la matriz Jacobiana de  $f$  en todo punto  $X$  es la matriz  $A$  ( $Df(X) = A$ ). En el Capítulo 2 se introduce también la matriz Jacobiana para el análisis de estabilidad de equilibrios en modelos a tiempo continuo.

El estudio de los valores propios de la matriz Jacobiana, nos entregará una condición suficiente para determinar si un equilibrio es localmente estable como lo señala el siguiente resultado.

**Teorema 1.9.** *Considere el sistema a tiempo discreto siguiente*

$$(1.23) \quad X_{k+1} = f(X_k) \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

*cuya condición inicial es  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$  y  $X^* \in \mathbb{R}^n$  es un punto fijo de  $f$  tal que el módulo de todos los valores propios de la matriz Jacobiana  $Df(X^*)$  es menor que uno, entonces  $X^*$  es un equilibrio localmente estable.*

Una motivación importante de considerar modelos a tiempo discreto en varias variables, es el estudio de fenómenos que presentan retardos. Por ejemplo, si se desea estudiar la evolución de una población, en determinadas ocasiones es más natural pensar que el número de individuos al instante  $k+1$  no sólo depende de los individuos al instante  $k$  si no que también de los individuos en un instante  $k - k_0$ . Si la unidad de tiempo que consideramos es un mes y el proceso de gestación de la especie a estudiar demora nueve meses, la cantidad de individuos en el décimo mes no depende de la cantidad que había en el noveno mes, si no que más bien de la cantidad que existía en el primer mes. Un ejemplo clásico de un modelo con retardo, es aquel que da origen a los conocidos *números de Fibonacci*, cuya obtención es ejemplificada a través de la evolución en una población de conejos. Este ejemplo es abordado ampliamente (introducción, antecedentes históricos y desarrollo) en la monografía [9].

De manera general, si  $x_k \in \mathbb{R}$  representa la cantidad de efectivos en el instante  $k$ , entonces supondremos que la cantidad en el instante  $k + 1$  depende de  $x_k$  y  $x_{k-k_0}$  donde  $k_0$  es un número natural positivo (fijo). Esto lo formalizamos diciendo que existe una función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-k_0}).$$

El sistema dado por la anterior ecuación de recurrencia se dice que tiene retardo  $k_0 \in \mathbb{N}$ .

Comencemos analizando un sistema con retardo igual a  $k_0 = 1$  (como Fibonacci) dado por la siguiente ecuación de recurrencia

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}).$$

Para poder determinar la trayectoria o solución del sistema, no bastará con conocer un instante inicial  $x_0$ . Se deberá explicitar el estado del sistema en el instante  $k = 0$  y  $k = 1$ . De esta forma, si conocemos  $x_0$  y  $x_1$  entonces, podemos determinar el valor de  $x_k$  para todo  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$  de manera similar que en ausencia de retardo haciendo el proceso iterativo

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, x_0) = f(x_1, x_0) \\ x_3 &= f(x_2, x_1) = f(f(x_1, x_0), x_1) \\ x_4 &= f(x_3, x_2) = f(f(f(x_1, x_0), x_1), f(x_1, x_0)) \\ x_5 &= f(x_4, x_3) = f(f(f(f(x_1, x_0), x_1), f(x_1, x_0)), f(f(x_1, x_0), x_1)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por ejemplo, si la función  $f$  está dada por  $f(x, y) = axy$  donde  $a$  es una constante, entonces

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, x_0) = f(x_1, x_0) = ax_1x_0 \\ x_3 &= f(x_2, x_1) = f(f(x_1, x_0), x_1) = f(ax_1x_0, x_1) = a^2x_1^2x_0 \\ x_4 &= f(x_3, x_2) = f(a^2x_1^2x_0, ax_1x_0) = a^4x_1^3x_0^2 \\ x_5 &= f(x_4, x_3) = f(a^4x_1^3x_0^2, a^2x_1^2x_0) = a^7x_1^5x_0^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, en presencia de retardo se hace menos evidente poder determinar la solución de manera explícita, presentando los sistemas con retardo, en tiempo continuo y discreto, mayores dificultades para su análisis. Sin embargo, utilizando algunos resultados vistos hasta ahora, introduciremos una condición para que un equilibrio del sistema (que aún no lo definimos en este nuevo contexto) sea localmente estable.

Para analizar un sistema con retardo igual a uno, realizaremos el siguiente truco que consiste en ver el sistema como uno de dimensión superior sin retardo. Si  $x_k$  es



un número real que representa el estado del sistema en el instante  $k$ , definimos la variable

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

y así el sistema

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}),$$

puede ser escrito de manera equivalente como

$$X_{k+1} = F(X_k),$$

donde la nueva función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define por

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(y, x) \end{pmatrix}.$$

Lo anterior es debido a que

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ f(x_k, x_{k-1}) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = F(X_k).$$

De esta manera hemos pasado de un sistema con retardo en una dimensión a un sistema sin retardo en dos dimensiones.

Un punto de equilibrio del sistema será entonces un punto fijo de la nueva función  $F$ , es decir, un vector  $(x^*, y^*)$  tal que

$$F \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^* \\ f(y^*, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, encontrar un vector  $(x^*, y^*)$  punto fijo de  $F$  se reduce a encontrar un  $x^*$  tal que  $f(x^*, x^*) = x^*$  y en tal caso el punto fijo de  $F$  será  $(x^*, y^*) = (x^*, x^*)$ .

Supongamos que en el primer instante se alcanza el valor  $x^*$  el cual es un equilibrio. Como estamos trabajando en un sistema con retardo, si la condición inicial es  $x^*$ , a diferencia de un sistema sin retardo, nada nos asegura que en el instante siguiente permanezcamos en el mismo nivel  $x^*$ . De hecho,  $x_2 = f(x_1, x_0) = f(x^*, x_0)$  que eventualmente es diferente de  $x^*$  pues sólo sabemos que  $f(x^*, x^*) = x^*$ . Sin embargo, en un sistema con retardo igual a uno, si en dos instantes sucesivos se alcanza el equilibrio  $x^*$ , entonces ahí si el sistema permanecerá por siempre en ese nivel.

Gracias al Teorema 1.9 sabemos que si la matriz Jacobiana de  $F$  evaluada en el punto  $(x^*, x^*)$  tiene valores propios cuyos módulos son menor que uno, entonces el equilibrio  $(x^*, x^*)$  es localmente estable.

La matriz Jacobiana de la función  $F$  estará dada por

$$DF(x^*, x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*, x^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*, x^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*, x^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, x^*)}{\partial y} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y \\ f_2(x, y) &= f(y, x). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$DF(x^*, x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz anterior son aquellos valores  $\lambda$  soluciones de la ecuación

$$(1.24) \quad P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial y} = 0.$$

Si las dos soluciones de esta ecuación tienen módulo menor que uno, entonces el equilibrio es localmente estable.

Asumamos que el sistema viene dado por

$$x_{k+1} = \rho x_{k-1},$$

es decir, el estado en el instante  $k + 1$  depende sólo, y de manera lineal, del instante  $k - 1$ . Si escribimos

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}),$$

la función  $f$  estará dada por  $f(x, y) = \rho y$  y la función  $F$  por

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(y, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \rho x \end{pmatrix}.$$

Observe que en este ejemplo, la función  $F$  es lineal, de hecho

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \rho x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho & 0 \end{pmatrix} X.$$

Un equilibrio del sistema con retardo es un punto  $x^*$  tal que  $f(x^*, x^*) = \rho x^* = x^*$ . Por lo tanto,  $x^* = 0$  es un equilibrio. Si  $\rho = 1$  todos los reales son un equilibrio (¿es lógico que suceda esto?, ¿cómo se interpreta en función de los valores y vectores propios de la matriz?). Si  $\rho \neq 1$  entonces el cero es el único equilibrio y de la ecuación (1.24), los valores propios de la matriz que define a  $F$  serán  $\lambda_1 = -\sqrt{\rho}$  y  $\lambda_2 = \sqrt{\rho}$  cuando  $\rho > 0$ . De esta forma, si  $|\rho| < 1$ , debido al Teorema 1.8, el equilibrio será globalmente estable.

Si el sistema presenta un retardo mayor, por ejemplo

$$(1.25) \quad x_{k+1} = f(x_k, x_{k-k_0})$$

con  $k_0 \geq 2$ , se realiza un procedimiento similar. En tal caso, se pasará a un sistema de dimensión  $k_0 + 1$  sin retardo definiendo la variable de estado  $X_k$  por

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{k-k_0} \\ x_{k-k_0+1} \\ x_{k-k_0+2} \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_0+1},$$

y la función  $F : \mathbb{R}^{k_0+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{k_0+1}$  a través de

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k_0} \\ x_{k_0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{k_0+1} \\ f(x_{k_0+1}, x_1) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, el sistema con retardo  $k_0$  dado por (1.25) se escribe de manera equivalente

$$X_{k+1} = F(X_k).$$

Dado un equilibrio, que de igual manera verifica ser un vector  $(x^*, x^*, \dots, x^*) \in \mathbb{R}^{k_0+1}$  donde  $x^*$  satisface  $f(x^*, x^*) = x^*$ , se tendrá que los valores propios de la matriz Jacobiana asociada a la función  $F$  evaluada en el punto  $(x^*, x^*, \dots, x^*)$ , serán aquellos valores  $\lambda$  soluciones de la ecuación

$$P(\lambda) = \lambda^{k_0+1} - \lambda^{k_0} \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*, x^*)}{\partial y} = 0.$$

**Ejercicio 1.15.** En el modelo de crecimiento del Ejercicio 1.2, en su versión a tiempo discreto, considere que en el instante actual nace una proporción (fija) de los individuos que había en tres periodos anteriores.

1. Establezca el modelo  $X_{k+1} = F(X_k)$  donde  $X_k \in \mathbb{R}^n$  y  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $n$  elegido apropiadamente;
2. Establezca condiciones sobre los parámetros con tal de tener siempre que las coordenadas de  $X_k$  sean positivas;
3. Calcule el o los equilibrios;
4. ¿Para qué combinaciones de parámetros el equilibrio  $x^* = 0 \in \mathbb{R}$  es globalmente estable?
5. Con ayuda de un programa matemático o una planilla de cálculo, grafique la trayectoria  $x_k \in \mathbb{R}$  en función de  $k$  y compare con las trayectorias obtenidas cuando el retardo en el nacimiento no era considerado.

**Ejercicio 1.16.** Considere el siguiente sistema de dimensión dos con retardo igual a 1.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, y_{k-1}) \\ y_{k+1} &= g(y_k, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Realizando un proceso similar al ya efectuado, escriba el anterior sistema como uno sin retardo y analice la estabilidad de los puntos de equilibrio para las funciones  $f(a, b) = ae^{\rho(1-b)}$  y  $g(a, b) = \frac{\rho a^2}{1+\gamma b^2}$ , donde los parámetros  $\rho$  y  $\gamma$  son positivos.

## 1.5 Modelos en clases de edades

En la presente sección estudiaremos una clase de modelos que es posible formular en varias variables. Estos estarán motivados por el estudio de la evolución de una población donde se hace distinción en las edades de los individuos. El estado del sistema al instante  $k$  será un vector  $X_k$  de dimensión  $n \geq 2$  donde  $n$  representa la cantidad de años a la cual llega la población en estudio. De esta forma,

$$X_k = \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ \vdots \\ N_n(k) \end{pmatrix},$$

donde  $N_1(k)$  representa la cantidad de individuos en el año  $k$  que tienen entre 0 y un año. En general,  $N_a(k)$  representa la cantidad de individuos en el año  $k$  entre  $a - 1$  y  $a$  años. La clase de modelos matriciales (con estructuras de edades, tamaño u otras) en dinámica de poblaciones es desarrollada cabalmente en [3] y abordada también en [11]. Es en base a este tipo de modelos que hoy en día son analizadas la mayor cantidad de pesquerías en el mundo, siendo también los recursos forestales un posible campo de aplicación.

Hasta ahora se está suponiendo implícitamente que no hay individuos mayor a una edad  $n$ . Esto es posible de corregir al decir que  $N_n(k)$  representa el número de individuos en el año  $k$  de una edad mayor a  $n - 1$ .

Intentemos establecer una relación que nos indique cómo evoluciona el *vector de edades*  $X_k$ . En general, se supone que los individuos en el año  $k + 1$  cuya edad esté entre  $a - 1$  y  $a$  es una proporción de los individuos que el año anterior (en  $k$ ) tenían un año menos, es decir, una proporción de  $N_{a-1}(k)$ . El por qué no se dice simplemente  $N_a(k + 1) = N_{a-1}(k)$  es debido a que dependiendo la edad, la especie puede morir por causas naturales propias a su naturaleza o al entorno en el que se encuentra. Por ejemplo, si estamos pensando en peces, a edades pequeñas es más probable que los individuos sean comidos por otros peces y a edades grandes es más probable que se mueran por causa natural. De esta forma, para las edades  $a = 2, 3, \dots, n - 1$  diremos que la cantidad de individuos al instante  $k + 1$  será una porción  $\alpha_a$  de los individuos que el año anterior tenía un año menos. Por lo tanto,

$$N_a(k + 1) = \alpha_a N_{a-1}(k) \quad a = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Si asumimos que la especie no vive más allá de  $n$  años, entonces se tendrá

$$N_n(k + 1) = \alpha_n N_{n-1}(k).$$

Sin embargo, si consideramos  $N_n(k)$  la cantidad de individuos que tienen edad mayor a  $n - 1$  se tiene

$$(1.26) \quad N_n(k + 1) = \alpha_n N_{n-1}(k) + \gamma N_n(k),$$

puesto que debemos agregar una porción de aquellos que en el año anterior ya tenían edad mayor a  $n - 1$  y por lo tanto en el año  $k + 1$  tendrán más de  $n$  años, siendo  $\gamma \geq 0$

la fracción de individuos de edad mayor a  $n - 1$  que sobrevive de un año a otro. En lo que sigue supondremos que la especie no vive más allá de  $n$  años para simplificar el estudio ( $\gamma = 0$ ).

Falta ver cuántos serán los individuos entre 0 y 1 año en el año  $k + 1$ . Ésta es considerada la parte más delicada en biología, a la hora de establecer un modelo. De hecho, en el caso de algunas especies marinas, no existe un conocimiento (estimación) de, dado un vector de edades, cuántos serán los individuos nacidos durante el año. Claramente este factor es de vital importancia para el análisis, puesto que la evolución del sistema estará dada por la capacidad de reproducción que tenga la especie.

A modo de simplificación consideraremos sólo dos casos, que incluso a pesar de su simplicidad es posible encontrar en modelos actualmente utilizados. El primero es suponer que siempre existe una cantidad constante de individuos de edad entre 0 y 1, es decir,  $N_1(k) = R > 0$  en cada año  $k$ . El otro caso, es suponer que cada individuo de edad  $a$  aporta una cantidad  $\beta_a$  de huevos fértiles (en el caso de peces), crías (en el caso de mamíferos) o semillas (si se trata de una especie vegetal), que darán origen a un nacimiento (suponiendo que nadie se los come antes de que nazcan). De esta forma,

$$N_1(k + 1) = \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \cdots + \beta_n N_n(k).$$

Los factores  $\beta_a$  dependen de cada especie en particular. En el caso del ser humano sabemos que en los primeros años no se es fértil, es decir,  $\beta_a = 0$  para  $a$  pequeño ocurriendo también esto, para los últimos años de vida. En la naturaleza es posible encontrar especies en que  $\beta_1 > 0$  lo que significa que individuos de entre 0 y 1 año aportan una cantidad de nuevos individuos al año siguiente.

Escribamos la evolución del vector de edades para los casos en que la cantidad de nacimientos es constante y para aquella en que ésta es una proporción de todos los individuos. En el caso de nacimientos (también llamada *reclutamiento*) constante igual a  $R$  se tiene que

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \\ \vdots \\ N_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \alpha_2 N_1(k) \\ \alpha_3 N_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_n N_{n-1}(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ \vdots \\ N_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si definimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema se escribe como

$$(1.27) \quad X_{k+1} = AX_k + b.$$

**Ejercicio 1.17.** Considere el vector de estado

$$X_k = \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ \vdots \\ N_n(k) \end{pmatrix}$$

que se rige por la siguiente dinámica a tiempo discreto

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix} X_k + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que el vector

$$X^* = \begin{pmatrix} R \\ \alpha_2 R \\ \alpha_2 \alpha_3 R \\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 R \\ \vdots \\ \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n R \end{pmatrix},$$

es un equilibrio del sistema a tiempo discreto y que para cualquier condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $X(n) = X^*$ , concluyendo así que es un equilibrio globalmente estable.

Veamos el caso en que la cantidad de nacimientos no es constante y viene dada por

$$N_1(k+1) = \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \cdots + \beta_n N_n(k).$$

En esta situación la evolución del vector de edades estará dada por

$$\begin{aligned}
 X_{k+1} &= \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \\ \vdots \\ N_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \cdots + \beta_n N_n(k) \\ \alpha_2 N_1(k) \\ \alpha_3 N_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_n N_{n-1}(k) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ \vdots \\ N_n(k) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Si definimos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que el sistema es lineal y se escribe

$$X_{k+1} = \overline{A}X_k.$$

La matriz escrita anteriormente es conocida como *matriz de Leslie* (o modelo de Leslie) en honor al investigador P.H. Leslie (1900-1974) quien en 1945 publicara sobre las aplicaciones de matrices en el estudio de poblaciones.

Observe que, dada una distribución de edades inicial  $X_0$ , al igual que en una dimensión es posible probar (utilizando inducción) que la estructura de edades en el período  $k$  estará dado por  $X_k = (\overline{A})^k X_0$ , donde las potencias de la matriz  $\overline{A}$  pueden ser calculadas utilizando la descomposición de Jordan, técnica introducida en [9].

Veamos ahora un ejemplo en que una especie no vive más allá de tres años.<sup>3</sup> Si la porción de ejemplares que sobrevive de un año a otro es la mitad y para el nacimiento de individuos sólo aportan aquellos que tienen entre uno y dos años, siendo el aporte de estos la mitad, es decir, entre dos individuos se da origen a un nacimiento. Traduciendo lo anterior para escribir el modelo se tiene que  $\alpha_2 = 1/2$ ,  $\alpha_3 = 1/2$ ,  $\beta_1 = \beta_3 = 0$  y  $\beta_2 = 1/2$ . El modelo se escribe entonces como

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 N_2(k) \\ 1/2 N_1(k) \\ 1/2 N_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Para cierta clase de Anchovetas ésta es la edad que se considera.

Es posible mostrar (ver monografía de algebra lineal [9]) que los valores propios de la matriz

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1/2$  y  $\lambda_3 = 1/2$ . Todos éstos tiene valor absoluto menor que uno y, por lo tanto, gracias al Teorema 1.8, para una condición inicial  $X_0$ , la trayectoria que estará dada por  $X_k = (\overline{A})^k X_0$  convergerá a  $X^* = (0, 0, 0)$ , es decir, si las condiciones mencionadas anteriormente (las referidas a natalidad y sobrevivencia) son las que rigen la evolución de la especie, esta se extinguirá.

Para finalizar el capítulo veamos un resultado referente a la estabilización en un modelo de clases de edades. Para ello, debemos introducir una propiedad que involucra los valores propios de una matriz, la cual es demostrada en la monografía [9].

**Proposición 1.10.** *Si los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de una matriz cuadrada  $\overline{A}$  (de  $n \times n$ ) satisfacen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

*y  $\lambda_1$  es real, entonces para todo vector  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  existe un vector (propio asociado a  $\lambda_1$ )  $X^*$  tal que*

$$\overline{A}X^* = \lambda_1 X^* \quad y \quad \frac{1}{\lambda_1^k} (\overline{A})^k X_0 \rightarrow X^*.$$

Introduzcamos un ejemplo donde al modelo (matriz) resultante se le pueda aplicar e interpretar el resultado anterior.

Considere una población que no vive más de tres años en la cual, los individuos que sobreviven luego del primer año es la mitad y los que sobreviven, luego del segundo año, es un cuarto. Los efectivos fértiles de esta población serán aquellos de dos y tres años aportando cuatro y tres individuos cada uno respectivamente. La matriz de Leslie asociada a la población descrita corresponde a

$$(1.28) \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

El valor propio de mayor módulo de esta matriz es  $\lambda = 3/2$ , con un vector propio

$$(1.29) \quad \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,24 \\ 0,04 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la Proposición 1.10 encontramos que este modelo predice que la población tenderá a distribuirse por edades en las proporciones dadas por (1.29), y que el número total de individuos fértiles crecerá en una forma muy aproximada a una progresión geométrica con razón  $3/2$ .



Así, para una matriz de Leslie con un valor propio dominante (que satisface las propiedades de la Proposición 1.10) el modelo de población propuesto por Leslie predice que

- la distribución por edades tiende a estabilizarse;
- asintóticamente, la población crece o decrece en proporción geométrica, con una tasa igual al valor propio dominante.

**Ejercicio 1.18.** Utilizando una planilla de cálculo o un programa matemático, en el ejemplo anterior calcule  $(\bar{A})^k X_0$  para distintos valores de  $k$  y diferentes condiciones iniciales  $X_0$ . Verifique si los resultados obtenidos están acorde a lo estipulado anteriormente (Proposición 1.10 y (1.29)).

**Ejercicio 1.19.** El objetivo de este ejercicio es generalizar el modelo en clases de edades presentado. Para ello, comencemos asumiendo que la especie eventualmente vive más de  $n$  años lo que implica considerar  $\gamma \in ]0, 1[$  en (1.26). Para un vector de abundancia  $X = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ , supondremos que la generación de nuevos individuos en el periodo siguiente es una función de la cantidad

$$SSB(X) = \sum_{a=1}^n w_a N_a,$$

que representa la masa total de huevos (en el caso de peces) aportada por la población, donde  $w_a$  son parámetros positivos mayores o igual a cero. La función que transforma el total de la masa de huevos en número de individuos será  $\varphi$  definida por

$$\varphi(S) = \frac{S}{a_B + b_B S},$$

donde  $S$  es la variable (que representará la masa de huevos) y  $a_B, b_B$  son constantes positivas. De esta forma, la cantidad de nuevos individuos en el periodo  $k + 1$  estará dada por

$$N_1(k+1) = \varphi(SSB(X_k)) = \frac{SSB(X_k)}{a_B + b_B SSB(X_k)}.$$

Observe que si  $a_H = 0$  se obtiene que la generación de individuos es constante y si  $b_H = 0$  es lineal, lo cual generaliza los dos casos estudiados.

1. Para los supuestos realizados, defina una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de manera tal que el modelo se pueda escribir como

$$X_{k+1} = f(X_k).$$

2. Definiendo el vector  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  donde

$$s_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ \alpha_a s_{a-1} & \text{si } a = 2, \dots, n-1 \\ \frac{\alpha_n s_{n-1}}{1-\gamma} & \text{si } a = n \end{cases}$$

y la cantidad

$$spr = \sum_{a=1}^n w_a s_a,$$

muestre que el vector  $X^* = (N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*)$  definido por

$$N_a^* = z s_a \quad a = 1, 2, \dots, n$$

donde

$$z = \max \left\{ 0, \frac{spr - a_B}{b_B spr} \right\}$$

es un equilibrio del modelo.

**Indicación:** De la ecuación  $X^* = f(X^*)$  escribir cada coordenada de  $X^* = (N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*)$  en función de la primera coordenada  $N_1^*$ , para luego resolver la ecuación  $N_1^* = \varphi(SSB(X^*))$ .

## 1.6 Relación con contenidos de Educación Media

- **Progresiones geométricas y aritméticas** son contenidos que se pueden contextualizar como la modelación de un fenómeno en evolución a tiempo discreto. Dado una ecuación de recurrencia lineal  $x_{k+1} = \rho x_k$ , la que puede representar:

- La evolución de una población de bacterias: *cada un segundo las bacterias se duplican* ( $\rho = 2$ ) ó *el antibiótico hace que cada minuto las bacterias disminuyan un tercio* ( $\rho = 1/3$ );
- La difusión de un rumor: *una vez que alguien sabe la noticia, en un día, esta se la cuenta a 5 amigos* ( $\rho = 5$ );
- La fórmula de interés compuesto: *el dinero es depositado a una tasa  $r$  de interés mensual* ( $\rho = 1 + r$ );

es posible proponer a los estudiantes ejercicios del tipo:

- Dada una condición inicial, ¿cuantos periodos deben pasar para obtener el doble (o la mitad) de esta cantidad?, ¿la respuesta depende de la condición inicial considerada? (requiriendo conocimientos de función logaritmo).
- Bajo qué condiciones se tiene que la variable en estudio se acerca a cero o tiende a  $+\infty$  (requiriendo conocimientos de límite).

Los modelos a tiempo continuo presentados en el próximo capítulo, también pueden ser tratados con los estudiantes en su versión a tiempo discreto. En particular, en la sección de este mismo nombre del Capítulo 2, se presenta el modelo de isótopos radioactivos el cual en su versión discreta es posible de introducir en Educación Media.

- **La resolución de sistemas lineales** puede ser motivada como el cálculo de equilibrios de un fenómeno que involucra más de una variable (como el de Romeo y Julieta). De igual manera, el cálculo de una ecuación (de una o más variables) puede ser presentada de esta forma.

- **La modelación** de fenómenos que se representen por una sola variable, por complicada que sea (o uno imagine) la función  $f$  de transición, es un procedimiento que se puede replicar en el aula. Para aquellos modelos (funciones  $f$ ) en que resulte atingente hacerlo, será factible realizar algunos de los procedimientos de análisis indicados en el capítulo: cálculo de equilibrios, determinación de la naturaleza (estabilidad) de éstos, pronóstico a largo plazo, así como el graficar, con la ayuda de una planilla de cálculo, las trayectorias obtenidas para distintas elecciones de parámetros y condiciones iniciales.



## Capítulo 2: Evoluciones a tiempo continuo de una variable



En el transcurso de este capítulo, abordaremos fenómenos para los cuales, en virtud de la unidad de tiempo y del periodo en el cual puedan ser descritas sus variaciones, será adecuado asumir la variable temporal como una cantidad continua. Esto lo formalizamos diciendo que el tiempo, denotado por  $t$ , será considerado un número real positivo ( $t \in [0, +\infty[$ ). En la introducción del Capítulo 1 se hace una discusión sobre la pertinencia de considerar la variable temporal de manera continua o discreta.

Si la variable en estudio, que denotaremos por  $x$  (posición de un objeto, cantidad de individuos de una población, cantidad o valor de algún bien, masa de una población, etc), puede expresarse como un número real, denotaremos por  $x(t)$  la cantidad de dicha variable en el instante  $t \in [0, +\infty[$ . Poder expresar la variable en estudio (variable de estado)  $x(t)$  como un número real, puede justificarse a través de la elección de unidad en la cual es medida (ver la introducción del Capítulo 1).

De esta manera, la evolución de la variable queda descrita por la función (que notaremos de igual forma)  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen una herramienta muy útil en el modelamiento de fenómenos de evolución, cuando las variables en estudio así como el tiempo a través del cual transcurre el fenómeno, son consideradas continuas. Las ecuaciones diferenciales de primer orden, que son las que nosotros abordaremos principalmente, plantean relaciones entre una determinada variable  $x$  y su velocidad (tasa, ritmo) de crecimiento, es decir, su derivada con respecto al tiempo.

Supongamos que estamos interesados en estudiar la evolución de una población que posee un gran número de individuos, procediendo de la siguiente manera:

**A1** Realizar la aproximación de considerar la variable como un número real (esto podría justificarse debido a la unidad considerada) notando  $x(t)$  a la cantidad de individuos, expresada en la unidad elegida, al instante  $t$ .

**H1** Asumir la existencia de una escala de tiempo tal que si  $\Delta t$  es un intervalo de tiempo pequeño (por ejemplo, 0,01 de la unidad considerada), entonces

$$(2.1) \quad x(t + \Delta t) \approx x(t) + \rho(t)x(t)\Delta t,$$

donde  $\rho(t)$  es la tasa de proporcionalidad que eventualmente puede depender del instante de tiempo  $t$ . Si en un principio suponemos  $\rho(t) \equiv \rho$  (constante), esta hipótesis puede interpretarse como el hecho de que, para intervalos de tiempo pequeños, el crecimiento (eventualmente negativo) es proporcional a la cantidad de individuos de

la población. La relación descrita más arriba la escribimos

$$(2.2) \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \rho x(t).$$

**A2** Realizar la aproximación que consiste en reemplazar la igualdad aproximada por la ecuación diferencial ordinaria (haciendo tender  $\Delta t$  a cero)

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t),$$

donde  $\frac{d}{dt}x(t)$  es la derivada con respecto a la variable  $t$  (tiempo) de la función  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , en el instante  $t$ , definida por

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (2.3), como deduciremos en la próxima sección, es la función

$$(2.4) \quad x(t) = x(0)e^{\rho t},$$

donde  $x(0)$  representa el estado de la variable  $x$  en el instante inicial  $t = 0$ .

El modelo anterior predice que la población en estudio crece o decrece exponencialmente. ¿Es realista este modelo? Si así lo fuese, se deduce que pasado un instante de tiempo grande, se tendrá una cantidad considerablemente mayor o menor (dependiendo del signo de  $\rho$ ) de la cantidad inicial  $x(0)$ . Si no es realista el resultado del modelo, quiere decir entonces que las aproximaciones A1 y A2 o la hipótesis H1 no son representativas en su totalidad del fenómeno en estudio.

Cuando se considera una población de bacterias poco numerosas al inicio (en  $t = 0$ ), la experiencia muestra que el modelo exponencial (modelo (2.3) de solución (2.4)) es correcto si es que los nutrientes disponibles en el medio son abundantes. Esto se puede justificar debido a que no hay limitaciones de espacio para que la población crezca (en este caso se considera  $\rho$  positivo). Pero claramente este modelo no puede ser válido hasta el *fin de los tiempos* debido a que, de una manera u otra, hay limitaciones de espacio y de alimentos por lo que la población no puede crecer indefinidamente. Es por esta razón que rápidamente se buscó la manera de modificar el modelo (intervenir las aproximaciones A1, A2 o la hipótesis H1) con tal de expresar el freno que se observa en la reproducción de los individuos cuando el tamaño de la población aumenta.

El modelo exponencial, anteriormente presentado, está basado en la proporcionalidad con respecto a la población existente, del nacimiento y muerte de los individuos. La evolución (2.4) obtenida, predice una explosión o extinción (según el signo de  $\rho$ ) de la población a velocidad exponencial. Esta aproximación de la realidad fue hecha por Thomas Malthus (1766-1834) quien en su momento predijo diversas catástrofes (epidemias, hambrunas,...) debido a que, según él, el crecimiento de la especie humana era exponencial, mientras que el de los recursos, principalmente alimenticios, no es más que polinomial.

La idea para dotar de más realismo al modelo (2.3) es reemplazar la constante  $\rho$  por una función  $\rho(x)$  que decrece cuando  $x$  aumenta y que incluso llega a ser negativa. De esta manera, la población tiene una tasa de crecimiento que disminuye a medida que la población aumenta. Por ejemplo, a las células, a medida que van aumentando, les cuesta más reproducirse (menos nutrientes en el medio para cada una); es decir, la tasa de reproducción es menor al punto de que, en cantidades demasiado abundantes, éstas comienzan a morir (no hay suficientes nutrientes para todas), lo que se representa por una tasa de reproducción negativa.

La función  $\rho$  más simple que satisface con lo anteriormente mencionado es la función lineal (afín)

$$\rho(x) = \rho \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde  $\rho$  y  $K > 0$  son constantes. Si  $\rho > 0$ , la interpretación de la constante  $K > 0$  es el de máxima capacidad en el cual la población se reproduce, es decir, para una cantidad de individuos menor que  $K$  la población tiende a aumentar y para una cantidad superior a  $K$  la población tiende a disminuir.

El modelo que se obtiene considerando esta nueva función es el modelo logístico

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La función logística, que define el modelo anterior es

$$f(x) = \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

la cual se grafica en la Figura 2.1

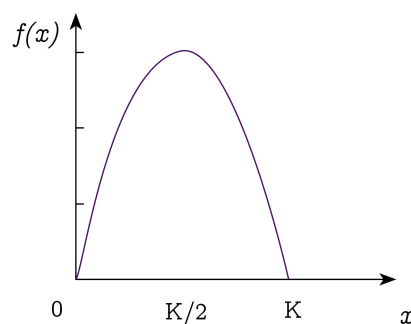


FIGURA 2.1. Función logística.

Claramente hemos realizado bastantes suposiciones al crear este modelo. Una muy clara, es asumir que los individuos son sexualmente maduros a partir de su nacimiento, ya que hemos señalado que la cantidad de nuevos individuos es proporcional

a la cantidad de individuos existentes. Además, hemos supuesto el hecho de que la población no interactúa con otra especie. Así, el crecimiento de ésta sólo depende de ella misma. A medida que empezamos a hacer consideraciones que hemos obviado, el modelo que vayamos creando será cada vez más complicado (cambiar la función  $f$ , pasar de una ecuación diferencial a un sistema diferencial, considerar la distribución espacial de los individuos, considerar que los individuos demoran un tiempo hasta su madurez sexual, etc.). Uno de los objetivos cuando estamos modelando es poder analizar, en primera instancia, modelos simples y ver si la información que éste nos entrega, guarda alguna relación con lo que se puede observar en la realidad.

El modelo logístico se le atribuye a Pierre Verhulst (1804-1849) el cual planteó, que el crecimiento de una población debía estar limitado, dando origen a esta representación. Basándose en tal modelo, predijo que la población belga no debería exceder los 9,4 millones de habitantes en 1994. Ese año, la población fue de 10,1 millones.

**Ejercicio 2.1.** Siguiendo los pasos descritos anteriormente, construya un modelo, asumiendo que la madurez sexual de los individuos no es alcanzada al momento de nacer; es decir, existe un tiempo  $\tau > 0$  tal que un individuo sólo pasado este tiempo, desde el momento en que nació, puede generar otros individuos.

Modelos que traten evoluciones en tiempo continuo, dan origen a ecuaciones diferenciales como (2.3) y (2.5). Durante éste y el próximo capítulo, trataremos sólo modelos que involucren la derivada con respecto a una variable, que en la mayoría de las veces, será el tiempo. Este tipo de ecuaciones recibe el nombre de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Luego de describir algunas metodologías para la resolución de ciertas clases de EDO, y estudiar diferentes propiedades, aplicaremos los contenidos al estudio de la evolución de un recurso natural sometido a extracción y a la evolución de un bien económico.

## Hoja de ruta

El objetivo de este capítulo es introducir al lector en la modelación de fenómenos cuyas transiciones puedan ser descritas, considerando el tiempo, como una variable continua.

Todo lo referente a la modelación de un fenómeno que involucre una sola variable en estudio, puede ser tratado en cursos con alumnos de primer año de pedagogía. Si bien la herramienta fundamental es la derivada, los alumnos de primer año tendrán la oportunidad de relacionar su utilización, de manera paralela a como profundizarán en este concepto durante el primer curso de cálculo.

En la Sección 2.1 se aborda la resolución de las primeras ecuaciones diferenciales que debieran ser vistas en un curso que trate este tópico. Esta parte puede considerarse de manera independiente para tal curso, aprovechando la contextualización del modelamiento de fenómenos que evolucionan en el tiempo. En caso que los estudiantes



aún no hayan cursado una asignatura que trate la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, es posible saltarse la Sección 2.1 y sólo hacer un análisis cualitativo de los modelos, como se muestra en la Sección 2.2.

Independientemente del grado de formación que tengan los estudiantes, creemos importante hacer énfasis en el proceso de modelación de un determinado fenómeno. La discusión sobre la pertinencia de considerar el tiempo como una variable discreta o continua, determinar la o las variables en estudio, describir la transición de un estado a otro, son procedimientos propicios para hacer participar a todos los estudiantes. Una vez acordado el modelo, dependerá de los conocimientos de cada alumno obtener la mayor información posible a partir de él.

Los siguientes contenidos, tratados en el capítulo, pueden ser complementados con lo expuesto en las monografías de esta misma colección:

- Cálculo de trayectorias, realización de gráficos y utilización de programas matemáticos: [18];
- Resolución de ecuaciones, relacionadas con la determinación de equilibrios: [18];
- Integración, relacionado con la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: [1].

Los ejemplos tratados que abarcan todo el procedimiento: construcción del modelo y análisis, son los estudiados en la secciones 2.3 y 2.4. Estos pueden ser abordados separadamente sin necesidad de profundizar en el desarrollo teórico necesario (Secciones 2.1 y 2.2), si es que éste ya ha sido realizado en otras asignaturas.

Al final del capítulo se intenta hacer una conexión de los contenidos abordados con algunos de Educación Media, proponiendo al futuro profesor un contexto diferente para abordarlos.

## 2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

El modelo (2.3) presentado en la introducción, que da como resultado una solución de tipo exponencial, es tal vez el más simple que uno puede formular. Se dice que éste es un *modelo lineal autónomo*, dado que la velocidad (ritmo, tasa) de crecimiento de la variable en estudio depende proporcionalmente del valor de la variable y no depende explícitamente del tiempo. Cuando la variable a considerar es sólo una, escribiremos de manera general la ecuación diferencial ordinaria siguiente

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde  $x(t)$  indica el estado (cantidad) de la variable al instante  $t \in [0, +\infty[$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$  es el estado en el instante inicial. La anterior ecuación se dice *no autónoma* dado que la función  $f$  que la describe depende además de la variable  $t$ . Si la función  $f$  no

depende de  $t$ , el modelo se escribe

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

y se dice que es una ecuación diferencial *autónoma*.

De esta manera, un modelo lineal autónomo, como el presentado en la sección introductoria, es aquél en que la función  $f$  es lineal y no depende de  $t$

$$f(x) = \rho x$$

para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ .

En el primer modelo de evolución presentado (ver (2.1)), si asumimos que la tasa de proporcionalidad depende del instante de tiempo en el que nos encontramos, tendríamos que considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho(t)x(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La anterior ecuación también se dice lineal, dado que la función que la define en cada instante de tiempo  $t$  lo es. En este caso, la ecuación no será autónoma.

La ecuación diferencial (2.6) proviene de haber asumido que la tasa de proporcionalidad en la evolución de una población varía en el tiempo, lo que parece ser más realista que suponer ésta constante. Por ejemplo, es sabido que muchas especies marinas a lo largo de nuestras costas ven afectados sus niveles de reproducción en presencia del fenómeno del Niño. Sería, por lo tanto, más ajustado a la realidad si tales variaciones en la capacidad reproductiva se vieran reflejadas en un modelo que pretenda estudiar la evolución de dichas especies. Así, la ecuación (2.6) captura en parte la variabilidad en el tiempo. En particular, generaliza el primer modelo presentado pues para obtener aquél, basta considerar  $\rho(t) = \rho$ .

Obtengamos una solución de la ecuación (2.6) la cual, dada la observación anterior, nos entregará también una solución de la ecuación (2.3).

En caso de que la condición inicial sea  $x_0 = 0$ , una solución (posteriormente argumentaremos que es la única) es  $x(t) = x_0$ , para todo  $t \geq 0$ . De hecho,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 0 = \rho(t)x_0 = \rho(t)x(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si la condición inicial  $x_0$  es positiva, más adelante veremos (ver Proposición 2.1), que para esta ecuación podemos asegurar que la solución  $x(t)$  será siempre positiva. Dividiendo por  $x(t)$  a ambos lados, se obtiene

$$\left( \frac{1}{x(t)} \right) \frac{d}{dt}x(t) = \rho(t), \quad t > 0.$$

Utilizando la regla de la cadena, observamos que el lado izquierdo de la ecuación puede escribirse

$$\left(\frac{1}{x(t)}\right) \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \ln(x(t)),$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \ln(x(t)) = \rho(t), \quad t > 0.$$

Integrando a ambos lados en la variable temporal, que ahora denotaremos  $s$ , entre  $s = 0$  y  $s = t$  y utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo (ver [1]), obtenemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \ln(x(s)) ds = \ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = \int_0^t \rho(s) ds$$

lo que implica

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \rho(s) ds}.$$

Observe que en el caso particular  $\rho(t) = \rho$  se tiene  $\int_0^t \rho(s) ds = \rho t$ , obteniéndose la solución dada en (2.4).

**Ejercicio 2.2.** Los siguientes ejercicios tienen por objetivo poner en práctica la resolución de ecuaciones diferenciales lineales del tipo (2.6):

1. Asuma que la tasa de proporcionalidad de una especie es decreciente en el tiempo y viene dada por la función

$$\rho(t) = \frac{\rho_{max}}{1+t}$$

donde  $\rho_{max}$  es una constante. Obtenga la función  $x(t)$  que describe la evolución de dicha especie. Si  $\rho_{max} > 0$  ¿qué puede decirse de  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ ?

2. Se desea describir la evolución de una especie marina en costas chilenas y peruanas que se ve afectada por el fenómeno del Niño, el cual asumiremos aparece cada 10 años. El efecto de dicho fenómeno lo modelaremos asumiendo que la tasa de reproducción de la especie varía de la siguiente forma

$$\rho(t) = \rho_{max} \cos\left(\frac{2\pi t}{10}\right),$$

donde  $\rho_{max}$  es una constante positiva y la variable temporal  $t$  estará medida en años. De esta manera, la tasa de reproducción varía entre  $-\rho_{max}$  y  $\rho_{max}$ , obteniéndose estos valores (mínimo y máximo respectivamente) cada 10 años. Muestre que la evolución de la especie es periódica de periodo 10 años, es decir, si  $x(t)$  es la función que describe la evolución, se tendrá  $x(t+10) = x(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Veamos ahora la siguiente ecuación diferencial

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho(t)x(t) + h(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

la cual es más general que (2.6). De hecho, tomando  $h(t) \equiv 0$  en (2.7), se obtiene (2.6). Esta ecuación, muy similar a la ecuación lineal (2.6), se denomina *lineal afín*, dado que la función que la define, para cada instante de tiempo  $t$ , es lineal afín en el estado  $x(t)$ .

Siguiendo con la motivación del estudio en evolución de poblaciones, la anterior ecuación podría representar un modelo que es posible justificar diciendo que en cada instante  $t$ , hay una tasa (positiva o negativa)  $h(t)$  de una cantidad que se suma (o extrae) a la población en estudio y que no depende del estado actual de la población (de  $x(t)$ ). Por ejemplo, si se desea estudiar la evolución de una especie en una reserva natural, podría conocerse la tasa de inmigración a tal reserva en función del tiempo (i.e. conocer la función  $h(t)$  en todo instante  $t$ ), la cual puede ser independiente del nivel de la población en la reserva (no depende de  $x(t)$ ). En este caso, la ecuación (2.7) parece ajustada a dicha situación.

Para obtener una solución de la ecuación (2.7), supongamos que ésta viene dada por

$$(2.8) \quad x(t) = \frac{a(t) + C}{b(t)},$$

donde  $a(t)$ ,  $b(t)$  son funciones a determinar y  $C$  es una constante que debemos calcular. Partamos por esto último. Si la expresión dada por (2.8) es solución de la ecuación (2.7), entonces se debe tener  $x(0) = x_0$  y, por lo tanto,

$$x_0 = \frac{a(0) + C}{b(0)}.$$

Si en la búsqueda de las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$  imponemos  $a(0) = 0$  y  $b(0) = 1$  obtendremos que la constante  $C$  debe ser igual a  $x_0$ .

Ahora, derivemos con respecto al tiempo la expresión (2.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \left( \frac{1}{b^2(t)} \right) \left( b(t) \frac{d}{dt}a(t) - (a(t) + C) \frac{d}{dt}b(t) \right) = \\ \left( \frac{1}{b(t)} \right) \frac{d}{dt}a(t) - \left( \frac{a(t) + C}{b^2(t)} \right) \frac{d}{dt}b(t) &= \left( \frac{1}{b(t)} \right) \frac{d}{dt}a(t) - \left( \frac{x(t)}{b(t)} \right) \frac{d}{dt}b(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si encontramos dos funciones  $a(t)$  y  $b(t)$  tales que

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) = -\rho(t)b(t), & t > 0, \\ b(0) = 1, \end{cases}$$

y

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) = b(t)h(t), & t > 0, \\ a(0) = 0, \end{cases}$$

obtendremos que  $x(t)$  dado por (2.8) es solución de (2.7). Para realizar lo anterior, observe que la ecuación (2.9) es exactamente del tipo (2.6), es decir, lineal no autónoma

y, por lo tanto, la solución estará dada por

$$(2.11) \quad b(t) = e^{-\int_0^t \rho(s)ds}.$$

Ya conocida la función  $b(t)$  que nos sirve, obtenemos la función  $a(t)$  simplemente integrando entre 0 y  $t$  la ecuación (2.10)

$$(2.12) \quad a(t) = \int_0^t b(s)h(s)ds.$$

De esta manera, la solución de la ecuación (2.7) es

$$x(t) = \frac{a(t) + x_0}{b(t)},$$

donde  $b(t)$  viene dado por (2.11) y  $a(t)$  por (2.12).

Observe que si  $h(t) = 0$ , entonces  $a(t) = 0$  y, por lo tanto,

$$x(t) = \frac{x_0}{b(t)} = x_0 e^{\int_0^t \rho(s)ds},$$

recuperando así la solución obtenida en el caso lineal.

**Ejercicio 2.3.** Considere una especie cuya tasa de proporcionalidad es decreciente, la cual es modelada por la función

$$\rho(t) = \frac{\rho_{max}}{1+t^2},$$

donde  $\rho_{max}$  es una constante positiva. Si en cada instante  $t$  existe una tasa de inmigración  $h(t)$  dada por

$$h(t) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

muestre que dada una condición inicial  $x_0$ , la función  $x(t)$  que describe la evolución, satisface

$$e^{-\rho_{max}\pi} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) + x_0 e^{-\rho_{max}\frac{\pi}{2}} \leq x(t) \leq e^{\rho_{max}\pi} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) + x_0 e^{\rho_{max}\frac{\pi}{2}}.$$

Motivados por el estudio de fenómenos que evolucionan, hemos considerado que el argumento de las soluciones es el tiempo notado por  $t \in [0, +\infty[$ . Los procedimientos realizados no son restrictivos a este hecho (positividad de la variable con respecto a la cual se deriva). A modo de ejercicio, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias donde el argumento de la función buscada (incógnita) no necesariamente es una variable en  $[0, +\infty[$ , sino en  $\mathbb{R}$ . Es decir, dada una función  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se desea encontrar la solución de la ecuación

$$(2.13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \phi(x) = \rho(x)\phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \phi(x_0) = \phi_0. \end{cases}$$

La solución será una función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la cual se le pide demostrar que es igual a

$$\phi(x) = \phi_0 e^{\int_{x_0}^x \rho(z)dz}.$$

De igual manera, resuelva

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\phi(x) = \rho(x)\phi(x) + h(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \phi(x_0) = \phi_0. \end{cases}$$

A lo largo del capítulo, generalmente asumiremos que el argumento de la función que estamos buscando es el tiempo, pues nuestro objetivo es introducir al lector en el modelamiento de fenómenos que varían temporalmente. Sin embargo, en ocasiones será necesario tratar ecuaciones diferenciales donde el argumento de la solución buscada no necesariamente es una variable que está en  $[0, +\infty]$ , sino que podría estar en todo  $\mathbb{R}$ .

Hasta el momento, hemos obtenido soluciones de ecuaciones diferenciales lineales y lineales afín. Otro tipo de ecuación, en el cual podemos obtener una solución explícita, es la siguiente

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho(t)f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no necesariamente lineal. Veamos una metodología para poder resolver esta clase de ecuaciones. En particular, tal procedimiento nos será de utilidad para obtener la solución del modelo logístico (2.5) presentado en la introducción del capítulo.

La idea es realizar un cambio de variable  $z = \phi(x)$ , es decir, para cada instante de tiempo  $t$ , considerar  $z(t) = \phi(x(t))$ , con tal de obtener

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = \rho(t)z(t), & t > 0, \\ z(0) = \phi(x_0), \end{cases}$$

cuya solución, la cual ya dedujimos, viene dada por

$$z(t) = z(0)e^{\int_0^t \rho(s)ds},$$

donde  $z(0) = \phi(x(0)) = \phi(x_0)$ . Si la función  $\phi$  que permite hacer el cambio de variable es biyectiva, obtendremos que la solución de (2.14) es

$$x(t) = \phi^{-1}(z(t)).$$

Por lo tanto, todo se reduce a encontrar la función  $\phi$  que nos permita obtener (2.15). Si  $z(t) = \phi(x(t))$ , derivando con respecto al tiempo y utilizando la regla de la cadena, se deduce

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \frac{d}{dx}\phi(x(t)) = \rho(t)f(x(t)) \frac{d}{dx}\phi(x(t)).$$

De esta manera, si la función  $\phi$  satisface

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \left( \frac{1}{f(x)} \right) \phi(x)$$

se tendrá

$$\frac{d}{dt}z(t) = \rho(t)z(t).$$

Si imponemos  $\phi(x_0) = 1$ , la función  $\phi$  es la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$(2.16) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\phi(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)\phi(x), \\ \phi(x_0) = 1, \end{cases}$$

la cual, por lo realizado anteriormente, sabemos viene dada por la expresión

$$(2.17) \quad \phi(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}}.$$

En resumen, el procedimiento para encontrar una solución de la ecuación (2.14) se traduce en:

1. Encontrar una función  $\phi$  que resuelva (2.16);
2. Hacer el cambio de variable  $z(t) = \phi(x(t))$ ;
3. Resolver (2.15), obteniéndose la solución  $z(t)$ ;
4. Obtener  $x(t)$  mediante  $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$ .

Obviamente, para poder realizar todo lo anterior, debemos asumir diversas hipótesis que hasta el momento hemos omitido. La primera, es que la función  $\phi$  dada por (2.17) exista, es decir, que la cantidad

$$(2.18) \quad \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

tenga sentido. En ocasiones, sin conocer la solución explícita de una ecuación diferencial, podremos argumentar que la solución  $x(t)$  permanece en una determinada región (ver Proposición 2.1 más adelante). Si para  $x$  en tal región, la cantidad (2.18) está bien definida, entonces la función  $\phi$  lo estará también. Con similares argumentos, a veces también es posible mostrar que la función  $\phi$  es biyectiva.

Utilicemos el anterior procedimiento para resolver el modelo logístico (2.5). En tal caso,  $\rho(t) = \rho$  y

$$f(x) = x \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Para obtener la función  $\phi$  dada por (2.17), observe que

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}.$$

Así, la función  $\phi$  que se obtiene de (2.17), será

$$\phi(x) = \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) \left(\frac{x}{K - x}\right).$$

Haciendo el cambio de variable  $z(t) = \phi(x(t))$ , se llega a la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = \rho z(t), & t > 0, \\ z(0) = \phi(x_0) = 1, \end{cases}$$

la cual tiene por solución

$$z(t) = e^{\rho t}.$$

Para finalizar, dado que  $z(t) = \phi(x(t))$ , se tiene

$$\left( \frac{K - x_0}{x_0} \right) \left( \frac{x(t)}{K - x(t)} \right) = e^{\rho t} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0 K}{e^{-\rho t}(K - x_0) + x_0}.$$

Observe que si la constante  $\rho$  es positiva y la condición inicial  $x_0 > 0$ , entonces  $x(t) \rightarrow K$ . La Figura 2.2 muestra distintas trayectorias  $x(t)$  para diferentes condiciones iniciales  $x_0$ .

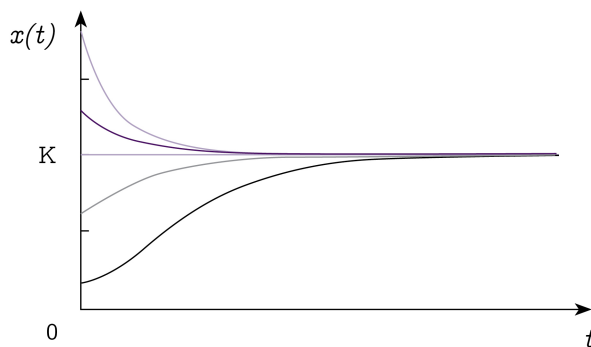


FIGURA 2.2. Trayectoria de  $x(t)$  en el caso  $\rho > 0$  para diferentes condiciones iniciales  $x_0$ .

Por otro lado, si  $\rho < 0$ , de la expresión obtenida de la solución, se deduce  $x(t) \rightarrow 0$ .

**Ejercicio 2.4.** Siguiendo los pasos indicados anteriormente, establezca la metodología para resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \phi(x) = \rho(x) f(\phi(x)) & x \in \mathbb{R} \\ \phi(x_0) = \phi_0, \end{cases}$$

cuya función incógnita  $\phi$  tiene como argumento  $x \in \mathbb{R}$ .

Hasta el momento hemos podido determinar las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, lineales afín y determinar una metodología para obtener una solución de ecuaciones como (2.14). Una ecuación diferencial<sup>1</sup> en su forma general se escribe de la forma

$$(2.19) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)) & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Omitiremos decir *ecuación diferencial ordinaria de primer orden*, que en estricto rigor es la terminología que corresponde, debido a que involucra sólo la derivada de orden uno.



donde  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función que define el modelo a analizar. En la siguiente sección, sin resolver explícitamente la ecuación diferencial en estudio, mencionaremos algunas condiciones que nos aseguren la existencia y unicidad de soluciones.

### 2.1.1 Existencia y unicidad

El estudio de evoluciones continuas no lineales presenta diversas dificultades. De partida, no podemos asegurar, contrariamente al caso lineal (o lineal afín), que las soluciones del sistema (2.19) existen. Una vez que el modelo está establecido (hechas las suposiciones y obtenida la función  $f$ ), la primera pregunta que uno debiese hacer es si tal modelo tiene solución.

Si el modelo es producto de una representación de la realidad, la intuición nos indica que debiera tener solución. Sin embargo, si la representación que hemos hecho no es tan ajustada al fenómeno en estudio, podría suceder que el modelo planteado no tenga solución. Otra pregunta también relevante es, en caso de existir solución, saber si ésta es única.

Un tercer concepto de gran interés cuando nos vemos enfrentados a un modelo, es el de estabilidad. Esta noción dice relación con el comportamiento de la variable  $x(t)$  a tiempos grandes ( $t \rightarrow +\infty$ ). Claramente este concepto tiene validez sólo si existe al menos una solución del sistema (2.19) para todo  $t > 0$ . En la presente y próxima sección abordaremos las temáticas que acabamos de mencionar.

Para poder responder las primeras preguntas, El Teorema 3.1 (el cual aborda el caso de varias variables) del Capítulo 3, entrega condiciones que aseguran la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación a valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

En un contexto general podemos mencionar dos nociones de existencia de soluciones de un sistema diferencial, éstas son la *existencia local y global*. La primera dice relación con la existencia de una solución solamente en un intervalo de tiempo  $[0, T[$ , y la otra, con la existencia de una solución definida en todo el intervalo de tiempo  $[0, +\infty[$ .

Debido a que uno de nuestros intereses es estudiar el comportamiento de soluciones para tiempos grandes ( $t \rightarrow +\infty$ ), es el concepto de existencia global el que requeriremos.

Una condición que asegurará la existencia de una solución global (ver comentario siguiente al Teorema 3.2 del Capítulo 3), es que de obtener una solución  $x(t)$  con  $t \in [0, T[$ , para un cierto  $T > 0$ , se determine que ésta permanece acotada, es decir, existe un intervalo  $[a, b]$  tal que  $x(t) \in [a, b]$  para todo  $t \in [0, T[$ . El siguiente resultado provee una herramienta para poder determinar esta propiedad.

**Proposición 2.1.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(t, a) \geq 0$  y  $f(t, b) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Si para toda condición

inicial  $x_0 \in [a, b]$ , la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución local en un intervalo de tiempo  $[0, T[$  entonces, la solución  $x(t)$  satisface  $x(t) \in [a, b]$  para todo  $t \in [0, T[$ . En particular, existirá una única solución global  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface también  $x(t) \in [a, b]$  para todo  $t \geq 0$ .

**Demostración.** Sea  $x : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  la solución local de la ecuación

$$(2.20) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t \in ]0, T[, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si existe  $\bar{t} \in ]0, T[$  tal que  $x(\bar{t}) = a$ , considerando la hipótesis  $f(t, a) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ , uno de los siguientes dos casos debe ocurrir:

1. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t, a) > 0$  para  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon[$ ;
2. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t, a) = 0$  para  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon[$ ;

En el primer caso, por continuidad de la solución  $x(t)$  y de la función  $f$ , se deduce que existe  $\delta > 0$  (que podemos tomar menor que  $\varepsilon$ ) tal que para  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$  se tiene  $f(t, x(t)) > 0$ . Para cualquier  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$ , si se aplica el teorema del valor medio a la función  $x(\cdot)$  entre  $\bar{t}$  y  $t$ , se obtiene que existe  $t' \in ]\bar{t}, t[$  tal que

$$x(t) - x(\bar{t}) = x(t) - a = \delta \frac{d}{dt}x(t') = \delta f(t', x(t')) > 0$$

y, por lo tanto,  $x(t) > a$  para todo  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$ . Esto nos indica que en los instantes inmediatamente posteriores a  $\bar{t}$  la solución es mayor a  $a$ .

Si se está en el segundo caso, es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t, a) = 0$  para  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon[$  entonces, dado que la solución  $x(t)$  es única, su expresión para los instantes  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon[$  será  $x(t) = a$ .

En ambos casos, hemos probado que si la solución  $x(\cdot)$  alcanza el nivel  $a$ , en los instantes  $t$  inmediatamente posteriores se tiene  $x(t) \geq a$ . Por lo tanto, dado que la condición inicial  $x_0$  es mayor que  $a$ , nunca se tendrá  $x(t) < a$ . De manera análoga se prueba que si  $x_0 \leq b$ , entonces  $x(t) \leq b$ .

Así, se ha probado que  $x(t) \in [a, b]$  para todo  $t \in [0, T[$  y, por consiguiente,  $x(t)$  es acotada (superior e inferiormente).

De esta forma, para todo tiempo  $T > 0$  tal que existe solución en el intervalo  $[0, T[$  ésta permanece acotada, de hecho  $x(t) \in [a, b]$ . Dado que para toda condición inicial en  $[a, b]$  asumimos que existe una única solución local en un intervalo de tiempo  $[0, T[$  y hemos demostrado que ésta permanece acotada, podremos asegurar la existencia global de la solución (ver comentario siguiente al Teorema 3.2 del Capítulo 3).

□

Considerando la proposición anterior, en caso de obtener que existe una solución local de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde la función  $f$  satisface algunas propiedades, podremos establecer que en efecto, se tiene una solución global, lo cual para nosotros será de gran interés para estudiar el comportamiento de ésta cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esto es mostrado en el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.** *Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua la cual es localmente Lipschitz<sup>2</sup> en la segunda componente y satisface  $f(t, a) \geq 0$  y  $f(t, b) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces, para toda condición inicial  $x_0 \in [a, b]$ , se tiene que existe una única solución global de la ecuación*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

la cual satisface  $x(t) \in [a, b]$  para todo  $t \geq 0$ .

**Demostración.** Basta utilizar la Proposición 2.1. La única diferencia en las hipótesis, es que no se asume la existencia de soluciones locales. Esto se obtendrá gracias al Teorema 3.1, introducido en el Capítulo 3, debido a que  $f$  es localmente Lipschitz (en la segunda componente).  $\square$

Otra condición que nos asegura existencia de una única solución global (definida para todo tiempo  $t \in [0, +\infty[$ ) a partir de una condición inicial  $x_0$ , es asumir que la función  $f$  es Lipschitz en la segunda componente y que  $f(t, x_0)$  permanece acotada para todo  $t \in [0, +\infty[$ . Este resultado también es establecido en el Teorema 3.1 del Capítulo 3 donde se aborda el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales en varias variables.

En el modelo logístico ya introducido

$$(2.21) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que define la ecuación diferencial es

$$f(x) = \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Dado que esta última no depende del tiempo, la ecuación diferencial (2.21) es autónoma. Además,  $f$  es de clase  $C^1$ , lo que asegura la existencia y unicidad de soluciones locales (ver Teorema 3.1). Por otro lado, observe que  $f(0) = f(K) = 0$  y, por lo tanto, de la Proposición 2.1, se tiene que si la condición inicial  $x_0$  está en el intervalo  $[0, K]$ ,

---

<sup>2</sup>Esta propiedad se describe en el Capítulo 3, la cual será utilizada para determinar la existencia de soluciones locales (ver Teorema 3.1).

entonces existe una única función diferenciable  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  solución global de (2.21). Esta solución va a satisfacer  $x(t) \in [0, K]$  para todo  $t \geq 0$ .

La existencia de una solución global, en este ejemplo, nosotros ya la habíamos determinado (indirectamente), puesto que encontramos una solución explícita de la ecuación (2.21) la cual está dada por

$$(2.22) \quad x(t) = \frac{x_0 K}{e^{-\rho t}(K - x_0) + x_0}.$$

Sin embargo, no teníamos las herramientas para poder asegurar que ésta fuese la única solución. Al conocer explícitamente la solución, también podíamos afirmar que si la condición inicial está en el intervalo  $x_0 \in [0, K]$ , entonces  $x(t) \in [0, K]$ . De hecho,  $x_0 \in [0, K]$  implica  $x_0 K \geq 0$  y  $e^{-\rho t}(K - x_0) + x_0 \geq 0$  (independiente del signo de  $\rho$ ) concluyendo

$$0 \leq \frac{x_0 K}{e^{-\rho t}(K - x_0) + x_0} \leq K.$$

El objetivo de la Proposición 2.1 es, cuando sea posible, determinar dónde estará la solución (por ejemplo en un intervalo) sin conocerla explícitamente.

En el caso del modelo logístico, puesto que la función logística no es (globalmente) Lipschitz, no es posible determinar de inmediato la existencia de una solución global. En general, asumir que una función no lineal sea Lipschitz es demasiado restrictivo. No así pedir que sea localmente Lipschitz, pues las funciones de clase  $C^1$  lo satisfacen.

Otra propiedad que tiene la solución de la ecuación logística (2.21) es la convergencia cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Si  $\rho > 0$ , de la expresión de la solución (2.22), se deduce que  $x(t)$  converge a  $K$  (ver también Figura 2.2), la cual en el modelo corresponde a la máxima capacidad de crecimiento que podía tener tal población. Si  $\rho < 0$ , de (2.22) se tiene que  $x(t)$  converge a 0. En uno u otro caso la solución converge a algunas de las soluciones de la ecuación

$$f(x) = \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0,$$

las cuales son denominadas equilibrios o puntos estacionarios.

A continuación nos interesaremos en este tipo de análisis. Poder establecer, dada una condición inicial de la ecuación diferencial, cómo evoluciona la solución (en caso de existencia y unicidad) cuando  $t \rightarrow +\infty$  sin necesidad de conocerla explícitamente. Para ello introduciremos los conceptos de equilibrio y estabilidad.

## 2.2 Equilibrio y estabilidad

En esta sección nos concentraremos en ecuaciones diferenciales autónomas del tipo

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad t > 0.$$

Diremos que un punto  $x^*$  es un *equilibrio* o *punto estacionario* de la ecuación (2.23) si se tiene  $f(x^*) = 0$ .

El término equilibrio es debido a que en este estado, la velocidad de crecimiento (o decrecimiento) de la variable es nula y, por lo tanto, permanece constante. De hecho, si se considera la ecuación diferencial

$$(2.24) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

y la condición inicial  $x_0$  es un punto de equilibrio, entonces la función  $x(t) = x_0$  (función constante) es una solución, ya que

$$\frac{d}{dt}x(t) = 0 = f(x_0) = f(x(t))$$

y  $x(0) = x_0$ .

El concepto de estabilidad dice relación con la convergencia de la solución hacia un punto de equilibrio, como vimos sucede en el modelo logístico. Para introducir este concepto, consideraremos ecuaciones diferenciales que posean una única solución sobre el intervalo total de tiempo  $[0, +\infty[$  (solución global). En la sección precedente vimos algunas condiciones suficientes para poder asegurar precisamente esto.

Sea  $x^*$  un equilibrio de la ecuación diferencial (2.23) que pertenece a un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}$ . Este se dirá **localmente estable** en  $C$ , si para toda condición inicial  $x_0 \in C$  suficientemente cerca de  $x^*$  se tiene que la única solución (global)  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , asociada a la condición inicial, satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . El equilibrio  $x^*$  se denomina **globalmente estable** en  $C$ , si para toda condición inicial  $x_0 \in C$  (no necesariamente suficientemente cerca de  $x^*$ ) se tiene que la única solución (global)  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , asociada a la condición inicial, satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

En el modelo logístico

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

se tiene que los puntos de equilibrio son  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = K$ . Si la constante  $\rho$  es positiva, en la sección precedente vimos que  $x_2^*$  era globalmente estable en  $]0, +\infty[$ , es decir, para todo condición inicial  $x_0 \in ]0, +\infty[$  se tiene que la única solución, dada por la expresión

$$x(t) = \frac{x_0 K}{e^{-\rho t}(K - x_0) + x_0},$$

satisface  $x(t) \rightarrow K = x_2^*$ . Si el parámetro  $\rho$  es negativo, se tiene que el equilibrio  $x_1^* = 0$  es globalmente estable.

El análisis que haremos a continuación tiene por objetivo determinar si un equilibrio  $x^*$ , es decir, una solución de la ecuación  $f(x) = 0$ , es localmente estable o globalmente estable. De esta forma, cuando ya hemos podido establecer nuestro modelo a tiempo continuo vía una ecuación diferencial, podremos decir, en alguna medida, cómo se va a comportar la solución para tiempos grandes ( $t \rightarrow +\infty$ ) sin necesidad de conocer explícitamente la solución de (2.23).

Si conocemos los signos de la función que define nuestro modelo, la proposición siguiente nos dice cómo se comporta la solución (sin conocerla) dependiendo de la condición inicial.

**Proposición 2.3.** *Considere la ecuación diferencial ordinaria siguiente:*

$$(2.25) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continuamente derivable (de clase  $C^1$ ). Si  $x^* \in \mathbb{R}$  es un equilibrio ( $f(x^*) = 0$ ), entonces:

- si  $x_0 < x^*$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in [x_0, x^*[$  se tendrá que la única solución de (2.25) con condición inicial  $x_0$  es estrictamente creciente y satisface  $x(t) \rightarrow x^*$ .
- si  $x^* < x_0$  y  $f(x) < 0$  para todo  $x \in ]x^*, x_0]$  se tendrá que la única solución de (2.25) con condición inicial  $x_0$  es estrictamente decreciente y satisface  $x(t) \rightarrow x^*$ .

**Demostración.** Probemos sólo la primera parte ya que la segunda es análoga. Si  $f(x^*) = 0$  y  $x_0 < x^*$  entonces, gracias a la Proposición 2.1, tomando como intervalo  $[a, b] = [x_0, x^*]$  se observa que  $f(x_0) \geq 0$  y  $f(x^*) = 0$ . Por lo tanto, la única solución permanece en el intervalo  $[x_0, x^*]$ . Además, debido a que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in [x_0, x^*[$ , la única solución de la ecuación diferencial ordinaria  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente creciente ya que su derivada con respecto al tiempo es positiva ( $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) > 0$ ). De esta forma,  $x(t)$  es una función creciente (con respecto al tiempo  $t$ ) y acotada superiormente por  $x^*$  (debido a la Proposición 2.1) deduciendo así, que el límite de  $x(t)$ , cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ , existe. Utilizando de nuevo el hecho que  $f$  es positiva en el intervalo  $[x_0, x^*[$  no es difícil concluir que el límite debe ser  $x^*$ .  $\square$

Observe que cuando analizamos el modelo logístico estábamos en la situación anterior. Si la constante  $\rho$  era positiva y la condición inicial también, entonces se deducía que la solución  $x(t) \rightarrow K$  debido a que si  $x_0 < K$  la función  $f$  es positiva en  $[x_0, K[$  y si la condición inicial es mayor que  $K$  la función  $f$  es negativa en  $]K, x_0]$ . La convergencia en el modelo logístico la habíamos establecido previamente gracias a que conocemos explícitamente la solución. El objetivo de la proposición anterior es poder determinar el mismo comportamiento sólo haciendo un análisis del signo de la función  $f$  y de la condición inicial  $x_0$ .

Cuando la función  $f$  es de clase  $C^1$  y la derivada en un punto de equilibrio  $x^*$  es negativa, podemos decir algo similar.

**Teorema 2.4.** *Considere la ecuación diferencial ordinaria siguiente:*

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad t > 0,$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ . Si  $x^* \in \mathbb{R}$  es un equilibrio y la derivada<sup>3</sup> en tal punto satisface  $f'(x^*) < 0$  entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $x_0$  está en el intervalo  $]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ , se tiene que la única solución de la ecuación diferencial ordinaria con condición inicial

$$(2.26) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Demostración.** Si  $f(x^*) = 0$  y  $f'(x^*) < 0$ , como  $f$  es de clase  $C^1$ , es decir,  $f'$  es una función continua, se tiene que existirá  $\varepsilon > 0$  tal que  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in ]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ .

Aplicando el teorema del valor medio a  $f(\cdot)$  entre  $x \in ]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$  y  $x^*$ , se obtiene que existe  $\xi$  entre  $x^*$  y  $x$  tal que

$$f(x) - f(x^*) = (x - x^*)f'(\xi).$$

Dado que  $f(x^*) = 0$  y  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in ]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$  se tiene, gracias al teorema del valor medio, que

$$(2.27) \quad x^* - \varepsilon < x < x^* \Rightarrow f(x) > f(x^*) = 0$$

y

$$(2.28) \quad x^* < x < x^* + \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x^*) = 0.$$

De esta manera, obtendremos

- $f(x) > 0$  si  $x \in ]x^* - \varepsilon, x^*[$ ,
- $f(x) < 0$  si  $x \in ]x^*, x^* + \varepsilon[$ .

Si la condición inicial  $x_0 \in ]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$  se estará en una de las dos situaciones anteriores, por lo que, aplicando la Proposición 2.3, concluimos  $x(t) \rightarrow x^*$ .  $\square$

**Ejercicio 2.5.** Considere una ecuación diferencial no autónoma de la forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0,$$

1. ¿Cómo definiría un equilibrio de la anterior ecuación diferencial?
2. Si  $f(t, x) = \rho(t)x$ , determine un equilibrio.
3. ¿Qué condición debe satisfacer la función  $\rho : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  para poder asegurar que dada una condición inicial, la solución de la ecuación diferencial (con  $f(t, x) = \rho(t)x$ ), converge al equilibrio encontrado en el punto anterior?

<sup>3</sup>Se utilizará la notación  $f'$  para la derivada de la función  $f$  con respecto a  $x$  con tal de evitar confusiones con la derivada respecto al tiempo.

Los anteriores teoremas nos proveen condiciones para poder determinar si un equilibrio es localmente estable (Teorema 2.4) o globalmente estable (Proposición 2.3). En las próximas dos secciones, nos enfocaremos en el modelamiento de dos fenómenos utilizando los contenidos vistos hasta el momento.

### 2.3 Extracción de un recurso natural renovable

Considere una población que evoluciona según el modelo logístico ampliamente tratado en las secciones precedentes. Si la población la consideramos como un recurso explotable, por ejemplo un valioso recurso pesquero, para analizar cómo será la evolución, tendremos que hacer una leve modificación al modelo ya estudiado.

Si en un instante  $t$  hay una cantidad  $x(t)$  del recurso a explotar y suponemos que en un intervalo pequeño<sup>4</sup> de tiempo  $\Delta t$  se extrae una proporción constante de los recursos disponibles, tendremos la relación:

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \rho(x(t))x(t) - \Delta t h x(t),$$

donde la constante  $h > 0$  representa la proporción que se extrae del recurso. Esta suposición da origen a la ecuación diferencial ordinaria autónoma

$$(2.29) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - hx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De esta manera, la función que definirá nuestro modelo es:

$$f(x) = \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - hx.$$

La primera parte de la función (la parte logística) y la segunda (parte lineal) se pueden apreciar en la Figura 2.3.

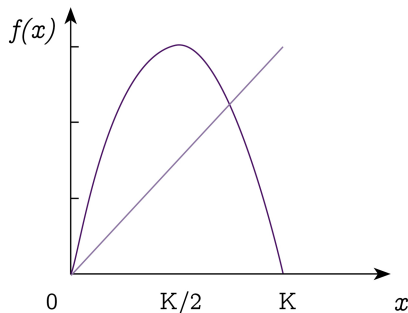


FIGURA 2.3. Gráfico de la función logística y de la función lineal con pendiente  $h$ .

<sup>4</sup>Con respecto a la unidad en que se está midiendo el tiempo.



Claramente  $x^* = 0$  es un equilibrio del sistema. Observe que la otra intersección de la recta con la curva logística es precisamente un punto de equilibrio  $x^*$  positivo, el cual satisface

$$\rho \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) = h.$$

Si la proporción  $h$  que se extrae es demasiado grande, se tiene que la recta intersecta la curva logística solo en el punto  $x^* = 0$ . En tal caso, la función  $f$  será negativa para todo  $x > 0$  y gracias a la Proposición 2.3 tendremos que  $x(t) \rightarrow 0$ , lo que representa la extinción del recurso. Una condición para que la recta y la curva logística se intersecten en un punto positivo, es que la derivada de la función logística en  $x = 0$  sea mayor que la pendiente de la recta, es decir,

$$\rho > h.$$

Bajo la anterior hipótesis, el equilibrio estará dado por

$$x^* = K \left( \frac{\rho - h}{\rho} \right) \in ]0, K[.$$

Por otro lado, observe que se tendrá:

- $f(x) > 0$  si  $x \in ]0, x^*[$
- $f(x) < 0$  si  $x \in ]x^* + \infty[$ .

La Proposición 2.3 nos dice que si la condición inicial  $x_0$  es positiva, entonces la única solución  $x(t)$  del modelo (2.29) es siempre positiva. Además, dado el análisis del signo de la función  $f$  se tendrá que  $x(t) \rightarrow x^*$ .

De esta manera, hemos podido determinar una condición para que el recurso no se extinga. Esta condición es que la proporción  $h$  que se extrae del recurso debe ser menor a  $\rho$ . Por otro lado, como la evolución del recurso converge al equilibrio  $x^*$ , pasado un tiempo considerable, podemos suponer que el recurso estará en un nivel cercano a  $x^*$ . Si nosotros fuéramos quienes regulan la extracción del recurso, es fácil ver que, imponiendo una proporción de extracción  $h$  (una cuota), podríamos imponer un nivel del recurso en el largo plazo. Por ejemplo, si queremos que el recurso en el largo plazo esté en un nivel cercano a  $(3K/4)$ , tenemos que elegir  $h$  de tal forma que

$$x^* = \frac{3K}{4} = K \left( \frac{\rho - h}{\rho} \right),$$

lo que nos entrega una proporción de extracción

$$h = \frac{\rho}{4}.$$

Si fuéramos *menos conservadores* y nos contentamos con que el nivel del recurso sea  $K/10$ , entonces la proporción que se debe extraer deberá ser mayor, de hecho

$$x^* = \frac{K}{10} = K \left( \frac{\rho - h}{\rho} \right) \Rightarrow h = 9\rho.$$

Establecido un modelo es importante poder *jugar* con los parámetros que en él intervienen. Observe que el análisis realizado anteriormente no requirió el conocimiento de la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial ordinaria (2.29). Ver cómo, el o los equilibrios de un modelo varían en función de los parámetros, provee una herramienta muy útil, por ejemplo, en la toma de decisiones. En el caso que estudiamos de la explotación de un recurso natural, observamos que mediante la imposición de una cuota (proporción  $h$ ) influíamos en la evolución de la especie en el largo plazo. Hoy en día esta clase de modelos, con variadas modificaciones, son utilizados por economistas para poder establecer rangos en el establecimiento de cuotas de captura de un recurso pesquero. En la Sección 1.2 del capítulo anterior, se estudió la variante a tiempo discreto del modelo que acabamos de analizar.

**Ejercicio 2.6.** Justifique que existe una única solución global de la ecuación diferencial (2.29), encuentre su expresión y con la ayuda de un programa matemático grafique la solución en función del tiempo.

**Ejercicio 2.7.** Haciendo la analogía con el modelo, a tiempo discreto, introducido en la Sección 1.2, para cada nivel de captura  $h$ , determine la cantidad que es extraída en el equilibrio y encuentre el valor de  $h$  que maximiza tal extracción.

**Ejercicio 2.8.** Considere la ecuación diferencial que modela la evolución de un recurso natural del cual se extrae en cada instante de tiempo una cantidad constante  $h > 0$ , situación representada por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

- ¿Cómo podría explicarse este modelo?
- Para diversos valores de  $h > 0$  calcule los equilibrios (cuando existan) y determine si se converge o no a ellos.

**Ejercicio 2.9.** Considere una población que evoluciona de tal forma, que en cantidades pequeñas, su tasa de reproducción es negativa. Esto es conocido como el *efecto Allee* en honor al ecólogo norteamericano Warder Clyde Allee (1885-1955) quien observó experimentalmente este efecto en algunas especies.

Una forma de representar el efecto Allee es considerar una leve modificación al modelo logístico, donde la función  $f$  que define la ecuación diferencial estará dada por

$$f(x) = \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m),$$

la cual se representa en la Figura 2.4.

- Utilizando la Proposición 2.3, analice la estabilidad de los equilibrio 0 y  $K$ .
- Justifique la existencia y unicidad de una solución global de la ecuación diferencial

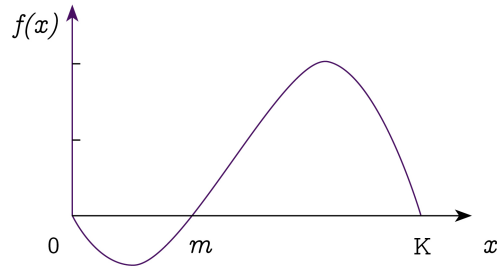


FIGURA 2.4. Gráfica de una función de reproducción con valores negativos para niveles pequeños.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

- Sin resolver la ecuación diferencial del punto anterior, determine a dónde converge la solución  $x(t)$  si la condición inicial  $x_0$  está en  $]0, m[$ .
- Dada una condición inicial, obtenga la solución de la ecuación diferencial.

## 2.4 Modelo de crecimiento económico

Estudiemos ahora un problema de naturaleza económica en el cual, sin embargo, no profundizaremos demasiado en sus terminologías.

Dado un sector productivo (textil, energético, servicios, etc..) se desea estudiar la producción a lo largo del tiempo. Se asume que la producción del bien en cuestión es función del trabajo (horas hombre) y del capital (valor de la infraestructura, dinero disponible producto de las ventas, dinero disponible acumulado, etc.). Supondremos que la producción, el trabajo y el capital están medidos en variables continuas, por ejemplo, si se piensa en su equivalente en dinero. Llamaremos  $y$  a la producción,  $w$  al trabajo y  $k$  al capital. Lo dicho anteriormente se traduce en la existencia de una función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$y = F(w, k).$$

Además asumiremos que se tiene

$$F(\alpha w, \alpha k) = \alpha F(w, k) \quad \text{para todo } \alpha \geq 0.$$

Esta suposición es denominada como *rendimientos de escala constante*, es decir, si varía el trabajo y el capital en una proporción  $\alpha$ , entonces la producción aumentará o disminuirá en igual proporción. En particular, se tendrá que si no hay capital y no hay trabajo, entonces no hay producción.

En un instante  $t$  diremos que para intervalos de tiempo pequeño  $\Delta t$ , el capital en el instante  $t + \Delta t$  varía de la forma

$$k(t + \Delta t) \approx k(t) + \Delta t ay(t) - \Delta t \mu k(t).$$

Es decir, el capital que se genera en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es proporcional al intervalo de tiempo  $\Delta t$ , a la producción en  $t$  (se produjo  $y(t)$  por lo que el ahorrar lo obtenido produce una ganancia) y a la depreciación a la cual el capital es afectado (e.g. un computador no vale lo mismo hoy que el próximo año). La constante  $a > 0$  es la tasa de ahorro y  $\mu$  la tasa de depreciación. La relación anterior nos entrega la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dt}k(t) = ay(t) - \mu k(t).$$

Si el trabajo aumenta de manera proporcional, es decir,

$$w(t + \Delta t) \approx w(t) + r\Delta tw(t),$$

tendremos que la disponibilidad de trabajo (horas hombre traducidas en dinero) y, por lo tanto, trabajo creado, es proporcional al tiempo y a la cantidad de trabajo existente. De esta forma

$$\frac{d}{dt}w(t) = rw(t),$$

con  $r > 0$ . La solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior es  $w(t) = w(0)e^{tr}$  (la cantidad de trabajo disponible-creado crece exponencialmente). Así  $w(t) > 0$  para todo  $t$ . Si consideramos la variable  $x(t) = k(t)/w(t)$ , derivando con respecto al tiempo (utilizando la regla de la cadena), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{\frac{d}{dt}k(t)}{w(t)} - k(t)\frac{\frac{d}{dt}w(t)}{w^2(t)} = a\frac{F(w(t), k(t))}{w(t)} - \mu\frac{k(t)}{w(t)} - r\frac{k(t)}{w(t)} = \\ &= aF(1, k(t)/w(t)) - \mu\frac{k(t)}{w(t)} - r\frac{k(t)}{w(t)} = aF(1, x(t)) - (\mu + r)x(t). \end{aligned}$$

La variable  $x(t) = k(t)/w(t)$  es el capital por unidad de trabajo. Dado que  $w$  representa las horas hombre, entonces  $w$  es proporcional al tamaño de la fuerza laboral y, por lo tanto,  $x = k/w$  sería el *capital per cápita*, cantidad que nos interesa conocer su evolución. Por otro lado, introducir esta variable nos hace considerar, a partir de dos ecuaciones diferenciales que describen la evolución de  $k(t)$  y  $w(t)$ , una sola ecuación diferencial para determinar como varía  $x(t)$ .

Si definimos la función

$$f(x) = F(1, x)$$

el modelo a estudiar es

$$(2.30) \quad \frac{d}{dt}x(t) = af(x(t)) - (\mu + r)x(t).$$

Si asumimos

- $f(0) = 0$  (cuando no hay capital no hay producción)

- $f$  es estrictamente creciente (mayor capital por unidad de trabajo implica mayor producción)
- la productividad media  $f(x)/x$  es decreciente

se tiene que claramente  $x^* = 0$  es un equilibrio de la ecuación anterior. La existencia de un equilibrio positivo  $x^* > 0$  para el modelo (2.30), es decir,  $af(x^*) = (\mu + r)x^*$  ocurrirá si y solamente si

$$\lim_{x \rightarrow 0} a \frac{f(x)}{x} = af'(0) > \mu + r \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a \frac{f(x)}{x} < \mu + r,$$

como lo muestra la Figura 2.5

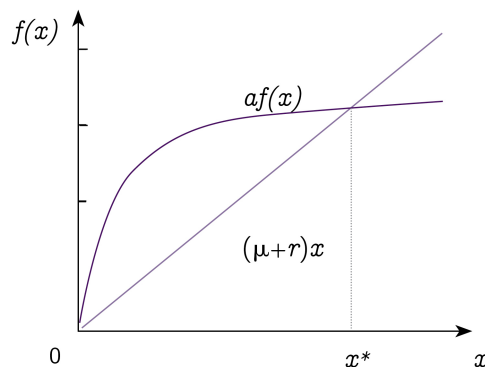


FIGURA 2.5. Equilibrio en modelo de crecimiento económico.

En tal caso, gracias a la Proposición 2.3, se prueba que, dada cualquier condición inicial  $x_0 = k_0/w_0$ , la solución  $x(t) = k(t)/w(t)$  converge a  $x^*$ , ya que

- $af(x) - (\mu + r)x > 0$  si  $x \in ]0, x^*[$
- $af(x) - (\mu + r)x < 0$  si  $x \in ]x^*, +\infty[$ .

El análisis anterior nos muestra que sin conocer ni siquiera la función  $f$  que interviene en el modelo, sino sólo asumiendo hipótesis que pudiesen ser razonables, es posible determinar el comportamiento cualitativo de las variables en estudio.

Este modelo es atribuido a Solow y Swan y es conocido como *modelo de crecimiento neoclásico* establecido a mediados del siglo XX. Robert Solow (1924 - ) obtuvo en 1987 el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la Teoría del crecimiento económico. Trevor Swan (1918-1989) trabajó en modelos de crecimiento económico encargado por diversos departamentos gubernamentales de Australia en los cuales, paralelamente, llegó a predecir comportamientos similares, a los obtenidos por Solow, para la economía de su país.

**Ejercicio 2.10.** En el anterior modelo, dado por la ecuación diferencial (2.30), considere la función

$$(2.31) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \rho x \ln\left(\frac{K}{x}\right) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde  $\rho$  y  $K$  son constantes positivas.

1. Verifique que la función  $f$  satisface todas las hipótesis asumidas en el desarrollo anterior y determine el equilibrio positivo.
2. Si se tiene una condición inicial positiva, justifique que existe una única solución global de la ecuación diferencial (2.30) con la función  $f$  dada en (2.31).
3. Encuentre la solución de la ecuación diferencial (2.30) con la función  $f$  dada en (2.31).
4. Conocida explícitamente la solución de (2.30), para una condición inicial positiva, verifique que ésta converge al equilibrio positivo.

## 2.5 Relación con contenidos de Educación Media

- **La definición de derivada**, en los cursos más avanzados de Educación Media, es posible de motivar y contextualizar mediante el proceso de modelación realizado en la introducción del capítulo. Un ejemplo de interés, complementario al de la evolución de poblaciones, que se puede abordar en aula es el de la desintegración de isótopos radioactivos<sup>5</sup>. Basado en que las sustancias radioactivas decaen de manera espontánea y que la tasa de decaimiento es proporcional a la masa de la sustancia, si lo que se desea es estudiar la evolución de la masa, denotada por  $m(t)$ , es posible justificar la aproximación

$$m(t + \Delta t) \approx m(t) - \rho m(t) \Delta t,$$

donde  $\rho > 0$  es la constante de proporcionalidad, la cual da origen a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}m(t) = -\rho m(t)$$

que tiene por solución  $m(t) = m(0)e^{-t\rho}$ .

Discutida la obtención del modelo, y verificando (mediante simple derivación) que la solución es la exponencial, el siguiente ejercicio puede ser abordado con los estudiantes.

- Ejercicio 2.11.** 1. Si se sabe que la vida media de una sustancia radioactiva es  $T^*$ , lo cual representa el tiempo requerido para que una masa  $m_0$  se desintegre a la mitad, calcule el parámetro  $\rho$  en función de  $T^*$ . O inversamente, dado  $\rho > 0$  que rige la evolución de una sustancia radioactiva, calcule la vida media  $T^*$  de éste. Al percatarse que  $T^*$  no depende de la masa inicial  $m_0$  que se comienza a desintegrar, éste será un valor propio a la sustancia radiactiva.

---

<sup>5</sup>Se agradece al Profesor Joaquim Barbe haber sugerido la introducción de este ejemplo.

2. Dado que la vida media de una sustancia radioactiva es  $T^*$ , la masa inicial es  $m_0$  y para un determinado tiempo  $\bar{t}$  se conoce el valor de  $m(\bar{t})$ , determine el tiempo  $\bar{t}$ .

En este contexto, relacionado con el ejercicio anterior, resulta interesante el caso del Carbono 14, dado que es utilizado para poder datar cualquier fósil animal o vegetal, así como cualquier objeto que contenga materia orgánica.

El principio se basa en que en todo ser vivo hay un equilibrio entre la fracción de Carbono 14 (radioactivo) y el Carbono 12 (no radioactivo). Sin embargo, cuando se muere, el equilibrio se rompe dado que el Carbono 14 se empieza a desintegrar de forma tal que la cantidad de átomos radioactivos se reduce a la mitad en un determinado tiempo. Para el Carbono 14 dicho tiempo (vida media  $T^*$ ) es de 5730 años. De ese modo, midiendo la fracción de Carbono 14 (midiendo  $m(\bar{t})$ ) que contiene el fósil (o fibra vegetal o animal) a estudiar, es posible estimar con relativa precisión (ya que se estima la fracción inicial  $m_0$  midiendo el Carbono 12) el siglo (o milenio) en que el ser vivo falleció, y con ello determinar la antigüedad de dicho fósil.

El anterior ejemplo requiere de conocimientos de función logaritmo y exponencial. Si estos aún no han sido introducidos, se propone tratar este modelo en su versión a tiempo discreto aunque, para poder calcular los tiempos o periodos, se necesitará de todas maneras utilizar el logaritmo de alguna base.

- **La resolución de ecuaciones no lineales** ( $f(x) = 0$ ) puede ser motivada como el cálculo de equilibrio de un fenómeno en evolución. Si el modelo involucra parámetros, es posible plantear qué valores deben tener éstos para obtener un equilibrio deseado (determinado a priori) como se muestra en el ejemplo de la Sección 2.3.
- **La modelación** de fenómenos que se representen por una sola variable, por complicada que sea (o uno imagine) la función  $f$  de transición, es un procedimiento que se puede replicar en el aula. Para aquellos modelos (funciones  $f$ ) en que resulte atingente hacerlo, será factible realizar algunos de los procedimientos de análisis indicados en el capítulo: cálculo de equilibrios, determinación de la naturaleza (estabilidad) de éstos, pronóstico a largo plazo, así como el graficar, con la ayuda de una planilla de cálculo (discretizando el tiempo) o programa matemático, las trayectorias obtenidas para distintas elecciones de parámetros y condiciones iniciales.





### Capítulo 3: Evoluciones a tiempo continuo de varias variables



En el presente capítulo abordaremos la evolución en el tiempo, considerado como una variable continua, de fenómenos que son descritos por más de una variable. Un ejemplo clásico que cae en este contexto, es el denominado *modelo presa-predador de Lotka-Volterra*, nombre debido a que fue propuesto casi simultáneamente por Vito Volterra (1860-1940) y Alfred Lotka (1880- 1949). Después de la Primera Guerra Mundial, periodo en el que disminuyeron considerablemente los recursos pesqueros en el Mar Adriático y la proporción relativa de predadores con respecto a las presas aumentó significativamente, Volterra comienza el estudio de modelos matemáticos que representen lo que indicaban las observaciones, las cuales daban cuenta de comportamientos oscilatorios.

Como veremos más adelante, a partir del modelo propuesto por Lotka y Volterra se deducirán los comportamientos oscilatorios en las poblaciones de presas y predadores, los cuales pueden explicarse debido sólo a la interacción de ambas especies y no a factores externos.

La representación que establece el modelo está basada en las siguientes hipótesis:

- en ausencia de predadores, la población de presas crece de manera exponencial;
- en ausencia de presas, la población de predadores decrece de manera exponencial;
- la tasa de desaparición de presas es proporcional al número de encuentros presa-predador, la cual se asume proporcional al producto de ambas poblaciones;
- la tasa de crecimiento de los predadores es igualmente proporcional al número de encuentros presa-predador, la cual se asume proporcional al producto de ambas poblaciones.

Como lo hemos discutido en el Capítulo 2, las hipótesis anteriores no siempre son realistas (pues implican un crecimiento y decrecimiento exponencial de las poblaciones). El objetivo no es entregar una representación detallada de la realidad sino que, con un número mínimo de parámetros, poder representar ciertos comportamientos cualitativos, como el de oscilaciones periódicas que es posible observar en la naturaleza. Por oscilaciones periódicas de una solución  $(x(t), y(t))$  de dos variables, nos referimos a que, para cierto periodo  $T > 0$  se tiene  $(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$  para todo  $t \geq 0$ . Dicho comportamiento lo ilustra la Figura 3.1.

Si notamos por  $x(t)$  a la población de presas e  $y(t)$  a la de predadores en el instante  $t \geq 0$  (ambas cantidades consideradas en  $\mathbb{R}_+$  debido a la unidad en la cual se

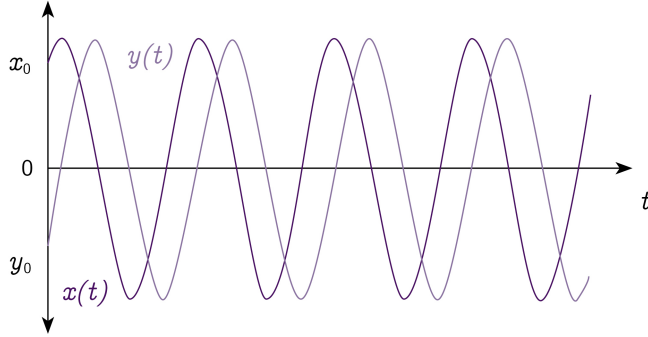


FIGURA 3.1. Solución  $(x(t), y(t))$  que presenta un comportamiento oscilatorio.

estén midiendo), las hipótesis anteriores se traducen en las siguientes aproximaciones para intervalos de tiempos pequeños  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &\approx x(t) + \Delta t \alpha_1 x(t) - \Delta t \beta_1 x(t) y(t) \\ y(t + \Delta t) &\approx y(t) - \Delta t \alpha_2 y(t) + \Delta t \beta_2 x(t) y(t), \end{aligned}$$

donde los parámetros (constantes de proporcionalidad  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ ) son positivos. Estas aproximaciones dan origen (haciendo tender  $\Delta t$  a 0) al sistema diferencial

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t) y(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t) y(t). \end{cases}$$

Si definimos el estado compuesto de dos variables  $X(t) = (x(t), y(t))$  y la función

$$f(X) = f(x, y) = (\alpha_1 x - \beta_1 xy, -\alpha_2 y + \beta_2 xy),$$

se tiene que el sistema (3.1) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} X(t) = f(X(t)).$$

En el transcurso de este capítulo veremos que este modelo posee una única solución la cual presentará oscilaciones periódicas.

Por cierto, el estudio de varias cantidades que evolucionan en el tiempo motivan el estudio de un sistema diferencial pero, otro gran campo de aplicación, es aquel en que se desea estudiar el comportamiento de una sola variable, notémosla  $z(t)$ , cuya evolución está descrita por una ecuación diferencial que involucra derivadas de orden superior. Por ejemplo,

$$(3.2) \quad \frac{d^2}{dt^2} z(t) = g(t, z(t)).$$

En caso que  $z(t)$  describa la distancia de una partícula a un punto de referencia, entonces  $\frac{d}{dt}z(t)$  representa la velocidad y  $\frac{d^2}{dt^2}z(t)$  su aceleración.

Si bien se trata de una sola variable en estudio, los contenidos del Capítulo 2 no nos son útiles para analizar la anterior ecuación diferencial. Sin embargo, si definimos  $(x(t), y(t))$  donde

$$\begin{aligned}x(t) &= z(t) \\ y(t) &= \frac{d}{dt}z(t)\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}z(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{d^2}{dt^2}z(t) = g(t, z(t)) = g(t, x(t))\end{aligned}$$

y, por lo tanto, la ecuación (3.2) se escribe de manera equivalente como

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t))$$

donde  $X = (x, y)$  y  $f(t, X) = f(t, x, y) = (y, g(t, x))$ .

Antes de pasar a la introducción de algunos resultados teóricos para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales, estudiemos el modelo que describe la caída libre de un objeto, contenido que es abordado en Educación Media, y para el cual se debe proceder (transformar una ecuación diferencial de segundo grado en un sistema diferencial de primer grado) como acabamos de indicar.

Considere un objeto de masa  $m$  que es soltado desde una altura  $h > 0$ . La única (simplificación mediante al no considerar la fricción) fuerza que actúa sobre él es la gravitacional la que tiene una expresión  $F = mg$  donde  $g$  es el valor de la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra, el cual se aproxima a  $g = 9,81 \text{ m/s}$ . Si el sistema de coordenada elegido es la vertical, con el origen en el suelo, y la distancia del objeto al suelo en el tiempo  $t$  la denotamos por  $z(t)$ , como se indica en la Figura 3.2, se tiene que la ecuación que regirá la caída del objeto es

$$(3.3) \quad \frac{d^2}{dt^2}z(t) = -g.$$

Al definir  $(x(t), y(t)) = (z(t), \frac{d}{dt}z(t))$ , estaremos denotando por  $y(t)$  la velocidad a la cual el objeto está cayendo. Dado que éste fue soltado en un comienzo, se tiene que  $y(0) = 0$ . Además, como inicialmente el objeto estaba a una altura  $h$ , se obtiene  $x(0) = z(0) = h$ . De esta forma, escribiendo la ecuación (3.3) como un sistema de

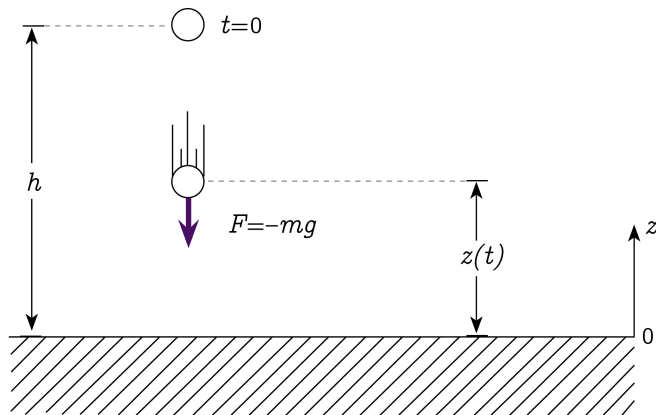


FIGURA 3.2. Esquema para la caída libre de un objeto.

primer orden nos lleva a considerar

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}z(t) = y(t), \quad x(0) = h,$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) = -g, \quad y(0) = 0,$$

sistema que puede ser resuelto utilizando los contenidos introducidos en la Sección 2.1 del Capítulo 2 o simplemente integrando respecto al tiempo. La segunda ecuación tendrá por solución  $y(t) = -tg$  y, por lo tanto, la solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t) = -tg$$

con condición inicial  $x(0) = h$ , es

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + h.$$

En la Sección 3.5 y al final de este capítulo, veremos un par de ejemplos donde se deberá realizar un procedimiento similar al mostrado anteriormente: reducir una ecuación diferencial que involucra la derivada de orden dos a un sistema diferencial de orden uno. Estos ejemplos serán el de la dinámica de un péndulo simple (Sección 3.5) y el del lanzamiento de un proyectil (Sección 3.6).

**Ejercicio 3.1.** Si en el anterior ejemplo, el objeto fue lanzado desde una altura  $h > 0$  con una velocidad vertical  $v_0$  (positiva si se lanzó hacia arriba, negativa si fue hacia abajo) determine el tiempo (en función de  $h$ ,  $v_0$  y  $g$ ) que demora en llegar al suelo.

**Ejercicio 3.2.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^n}{dt^n} z(t) = g \left( t, z(t), \frac{d}{dt} z(t), \frac{d^2}{dt^2} z(t), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) \right)$$

de incógnita  $z : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $n$  es un número natural mayor que uno y  $g : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Motivado por los ejemplos anteriores, defina una nueva variable  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  y escriba la ecuación diferencial como un sistema diferencial de primer orden, es decir,

$$\frac{d}{dt} X(t) = f(t, X(t))$$

donde usted debe encontrar la apropiada función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Hoja de ruta

El objetivo de este capítulo es introducir al lector en la modelación de fenómenos cuyas transiciones puedan ser descritas por varias variables, considerando el tiempo como una cantidad continua.

Todo lo referente a la modelación de un fenómeno que involucre varias variables en estudio, puede ser tratado en cursos con alumnos de primer año de pedagogía. Si bien la herramienta fundamental es la derivada, los alumnos de primer año tendrán la oportunidad de relacionar su utilización, de manera paralela a como profundizarán en este concepto durante el primer curso de cálculo. Sin embargo, para hacer un análisis más profundo de los modelos que resulten, será requisito que los estudiantes hayan cursado o estén realizando cursos donde se vean los primeros conceptos de álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables.

No siendo el eje del capítulo la introducción de metodologías para la resolución de sistemas diferenciales, en la Sección 3.3 se aborda la resolución de sistemas diferenciales lineales de tamaño dos. La técnica ahí indicada, complementada a la del cálculo de matrices exponenciales, materia expuesta en la monografía [9], debieran ser vistas en el primer curso que trate la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta parte puede considerarse de manera independiente para tal curso, aprovechando la contextualización del modelamiento de fenómenos que evolucionan en el tiempo. En el caso de que los estudiantes aún no hayan cursado una asignatura que trate la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, pero sí tengan las primeras nociones de diferenciabilidad en varias variables y álgebra lineal, es posible saltarse la Sección 3.1, la cual principalmente aborda los resultados de existencia y unicidad para sistemas diferenciales, y sólo hacer un análisis cualitativo de los modelos como se muestra en las secciones 3.2 y 3.3.

En el caso de que el texto sea utilizado para un curso de cálculo en varias variables, se recomienda comenzar con el ejemplo de motivación de Lotka-Volterra y el de caída libre y, una vez que los estudiantes ya conozcan las definiciones de continuidad, diferenciabilidad, matriz Jacobiana y valores propios, los apliquen a los ejemplos para determinar los resultados de existencia, unicidad y estabilidad.

Independientemente del grado de formación que tengan los estudiantes, creemos importante hacer énfasis en el proceso de modelación de un determinado fenómeno. La discusión sobre la pertinencia de considerar el tiempo como una variable discreta o continua, determinar la o las variables en estudio, describir la transición de un estado a otro, son procedimientos propicios para hacer participar a todos los alumnos. Una vez acordado el modelo, dependerá de los conocimientos de cada estudiante obtener la mayor información posible a partir de él.

Los siguientes contenidos, tratados en el capítulo, pueden ser complementados con lo expuesto en las monografías de esta misma colección:

- Cálculo de valores y vectores propios, cambios de sistema de coordenadas, descomposición de Jordan de una matriz, cálculo de matrices exponenciales: [9];
- Cálculo de trayectorias, realización de gráficos y utilización de programas matemáticos: [18];
- Resolución de sistemas de ecuaciones, relacionadas con la determinación de equilibrios: [18];
- Integración, relacionado con la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: [1].

Los ejemplos tratados que abarcan el procedimiento de construcción del modelo y análisis, son los estudiados en la secciones 3.4 y 3.5. Estos pueden ser abordados separadamente sin necesidad de profundizar en el desarrollo teórico necesario (secciones 3.1 y 3.2), si es que éste ya ha sido realizado en otras asignaturas. Sin embargo, a partir de los ejemplos presentados en la introducción, en las secciones donde se hace un desarrollo más teórico, éstos se siguen abordando, por lo que se recomienda considerar esas partes.

Al final del capítulo se intenta hacer una conexión de los contenidos abordados, con algunos de los tratados en Educación Media, proponiendo al futuro profesor un contexto diferente para abordarlos. En esta última sección se presenta el ejemplo del lanzamiento de un proyectil, materia tratada en la asignatura de Física, la cual se propone presentar, deducir, resolver y analizar.

### 3.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Comencemos asumiendo que la evolución de un fenómeno que evoluciona en el tiempo involucra varias variables y su descripción conlleva a establecer un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el que escribiremos de manera general

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) & i = 1, 2, \dots, n, & t > 0, \\ x_i(0) = x_0^i, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

donde las funciones  $f_i$  estarán definidas de  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n$  a valores en  $\mathbb{R}$ . Las relaciones escritas en (3.4) son denominadas un sistema diferencial no autónomo debido a la dependencia de las funciones  $f_i$  con respecto al tiempo. Si todas las funciones  $f_i$

no dependen explícitamente del tiempo, se dice que (3.4) es un sistema diferencial autónomo.

Observe que el sistema (3.4) puede ser descrito mediante una sola ecuación diferencial de la forma

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), & t > 0, \\ X(0) = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n), \end{cases}$$

donde la variable de estado  $X$  tendrá  $n$  componentes:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y la función  $f$  estará definida por

$$f(t, X) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(t, X), f_2(t, X), \dots, f_n(t, X)),$$

con  $f_i : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

El sistema diferencial (3.5) se dice lineal si la función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal, es decir, para cada  $t \in [0, +\infty[$  existe una matriz cuadrada  $A(t)$  de dimensión  $n \times n$  ( $A(t) \in M_{n \times n}$ ) tal que  $f(t, X) = A(t)X$ . De esta forma escribimos

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t), & t > 0, \\ X(0) = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n). \end{cases}$$

Al igual que en una dimensión, es posible probar que el sistema (3.6) tiene una solución de tipo exponencial. Si el sistema es lineal autónomo, es decir, existe una matriz cuadrada  $A$  (independiente del tiempo  $t$ ) tal que  $f(t, X) = AX$  entonces, la solución del sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = AX(t), & t > 0, \\ X(0) = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = X_0 \end{cases}$$

estará dada por

$$X(t) = e^{tA}X_0$$

donde, para una matriz cuadrada  $B$ , la expresión  $e^B$  representa la matriz exponencial de  $B$ , la cual es posible obtener a través de la descomposición de Jordan introducida en la monografía [9] de esta misma colección. La resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es abordada en la Sección 3.3.

Como mencionamos, cuando estudiamos ecuaciones diferenciales ( $n = 1$ ), poder asegurar la existencia y luego la unicidad de soluciones es un aspecto fundamental a la hora de analizar un modelo. En el caso de sistemas diferenciales, introduciremos resultados de existencia y unicidad posibles de aplicar a ecuaciones diferenciales como las vistas en el Capítulo 2. Para mencionar algunos de ellos, considere una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$  y recordemos que una función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice:

- *Localmente Lipschitz* en  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  si existe  $\varepsilon > 0$  y  $L \geq 0$  tales que

$$(3.7) \quad \|f(t, X) - f(t, Y)\| \leq L\|X - Y\|$$

para todo  $t \in [0, +\infty[$ , y para todo  $X, Y \in B(X_0, \varepsilon) := \{Z \in \mathbb{R}^n : \|Z - X_0\| \leq \varepsilon\}$ .

- *Lipschitz o globalmente Lipschitz* si se tiene (3.7) para todo  $t \in [0, +\infty[$ , y para todo  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

El teorema siguiente entrega tres resultados de existencia y unicidad. Como en el Capítulo 2, la existencia de una solución local dice relación con la existencia de una solución solamente en un intervalo de tiempo  $[0, T[$  y la de solución global para todo tiempo  $t \geq 0$ .

**Teorema 3.1** (Existencia y unicidad). *Considere el sistema diferencial con condición inicial siguiente*

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = f(t, X(t)) & t > 0 \\ X(0) = X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n). \end{cases}$$

Si

1. la función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, entonces existe  $T > 0$  y una función  $X : [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que es solución del sistema (3.8) para  $t \in [0, T[$ . Este resultado es conocido como el Teorema de Peano.
2. la función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en la condición inicial  $X_0$ , entonces existe  $T > 0$  y una **única** función  $X : [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que es solución del sistema (3.8) para  $t \in [0, T[$ . Este resultado es conocido como el Teorema de Cauchy-Lipschitz o también como el de Picard-Lindelöf.
3. la función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es globalmente Lipschitz y existe  $\gamma \geq 0$  tal que

$$\|f(t, X_0)\| \leq \gamma \quad \forall t \geq 0$$

entonces, existe una **única** función  $X : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que es solución del sistema (3.8) para  $t \geq 0$ .

Los resultados 2 y 3 del anterior teorema son posibles de demostrar a través del Teorema del punto fijo de Banach (el cual es introducido en el Capítulo 1) para funciones definidas en espacios de dimensión infinita.

La demostración puede encontrarse en numerosos textos de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo [12, 21, 23]) incluso bajo hipótesis más débiles (e.g.  $f(\cdot, x)$  continua por intervalos).

Si la función  $f(\cdot, \cdot)$  es sólo continua (no necesariamente satisface (3.7)) se tiene que existe una solución local (como establece el resultado 1 del teorema) la cual no necesariamente es única. Este resultado es conocido como el Teorema de Peano en honor al matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) quien lo demostrara el año 1890.

Poder determinar que existe una sola solución de una ecuación diferencial es fundamental para nuestros propósitos. Si hemos modelado un fenómeno obteniendo una ecuación diferencial y a la vez una solución, no podemos inferir mucho sobre la evolución de la variable en estudio si no sabemos que la solución obtenida es la única.



Por ejemplo, si se considera la ecuación diferencial (de una sola variable) con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = t\sqrt{x(t)} & t > 0 \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

una solución es  $x(t) = 0$ . Por otro lado, utilizando el procedimiento introducido en la Sección 2.1 del Capítulo 2, es posible determinar que  $x(t) = \frac{t^4}{16}$  es también solución, lo cual se verifica simplemente derivando. Si quisiéramos estudiar la evolución de una población cuyo modelo viene dado por esta ecuación, ¿qué solución vamos a considerar?

Lo que está sucediendo, en el ejemplo anterior, es que la función  $f(t, x) = t\sqrt{x}$  no verifica la condición (3.7) (considerando  $|\cdot|$  como norma en  $\mathbb{R}$ ) en  $x_0 = 0$ .

Así, el Teorema 3.1 nos da una condición (la propiedad (3.7)) con tal de poder asegurar, además de la existencia, la unicidad de soluciones.

**Ejercicio 3.3.** Considere el sistema diferencial lineal afín siguiente

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) + h(t),$$

y asuma que existe  $L \geq 0$  tal que la función  $A : [0, +\infty[ \rightarrow M_{n \times n}$  satisface

$$\|A(t)X\| \leq \|X\| \quad \forall t \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

1. Pruebe que existe una única solución local del sistema diferencial.
2. Si para algún  $\gamma \geq 0$  se tiene además que  $\|A(t)X_0\| \leq \gamma\|X_0\|$  y  $\|h(t)\| \leq \gamma$  para todo  $t \geq 0$ , argumente que existe una única solución global del sistema diferencial. En particular, justifique la existencia de una única solución global del sistema

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t).$$

La tercera parte del Teorema 3.1 nos entrega condiciones para poder asegurar la existencia de una solución global. En general, la hipótesis de Lipschitzianidad para una función no lineal es bastante restrictiva. No así la Lipschitzianidad local, pues las funciones cuyas derivas parciales son funciones continuas satisfacen dicha propiedad.

En el caso de una función definida sobre varias variables,  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$f(t, X) = (f_1(t, X), \dots, f_n(t, X)) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)),$$

para cada  $t \in [0, +\infty[$  se denomina *matriz Jacobiana* de  $f$  en  $(t, X)$  a la matriz que agrupa las derivadas parciales (cuando existen) de las funciones  $f_i$  con respecto a las variables  $x_j$ . Esta matriz la notamos  $Df(t, X)$  y está dada por

$$Df(t, X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t, X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(t, X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t, X)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(t, X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

El *Jacobiano* en  $t$  será la función  $Df(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{n \times n}$  definida sobre  $\mathbb{R}^n$  a valores en las matrices cuadradas de dimensión  $n \times n$  que a cada  $X \in \mathbb{R}^n$  le asocia la matriz  $Df(t, X)$  dada por (3.1). En el Capítulo 1 se introdujo de manera similar la matriz Jacobiana, pero para funciones que no dependen explícitamente del tiempo.

Una función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  se dirá de *clase  $C^1$*  con respecto a las variables de estado  $X \in \mathbb{R}^n$  si todas las derivadas parciales existen y éstas son continuas. Esto es equivalente a decir que la función Jacobiano  $Df(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{n \times n}$  es una función continua.

Como consecuencia del Teorema 3.1 es posible obtener el siguiente resultado de existencia y unicidad para sistemas donde la función  $f$  es de clase  $C^1$  con respecto a las variables de estado.

**Teorema 3.2.** *Considere el sistema diferencial con condición inicial siguiente*

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), & t > 0, \\ X(0) = X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n). \end{cases}$$

Si la función  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  en  $X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ , entonces existe  $T > 0$  y una única función  $X : [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que es solución del sistema (3.9) para  $t \in [0, T[$ .

**Demostración.** La demostración está basada en que una función que es de clase  $C^1$ , en un punto dado, es localmente Lipschitz en dicho punto y, por lo tanto, es posible aplicar el Teorema 3.1.  $\square$

Para poder determinar que existe una solución global de un sistema diferencial sin pedir Lipschitzianidad de la función  $f$ , se debe asegurar que la solución local, definida para  $t \in [0, T[$ , dada por los teoremas anteriores, no explote cuando  $t \rightarrow T$ . Dicho de otra manera, si  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  es una solución entonces, tendríamos que asegurar que la cantidad  $\|X(t)\|$  permanezca acotada cuando  $t \rightarrow T$  siendo  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ , por ejemplo,

$$\|X\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Si así fuese, no es complicado demostrar, utilizando la continuidad de la solución, que podemos definir  $X(t)$  para  $t = T$  como el límite de  $X(t)$  cuando  $t$  tiende a  $T$ , notándolo  $X_T = (x_T^1, x_T^2, \dots, x_T^n)$ , el cual existirá debido a lo anterior. En tal caso, aplicamos el resultado de existencia local nuevamente al sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), & t > T, \\ X(T) = X_T = (x_T^1, x_T^2, \dots, x_T^n). \end{cases}$$

y, por consiguiente, si  $f$  es de clase  $C^1$  se tendrá que existe un tiempo  $\tilde{T} > T$  y una solución definida en el intervalo  $[T, \tilde{T}[$ . De esta manera, tendremos ahora una solución definida en el intervalo  $[0, \tilde{T}[$ .

Un caso particular en el que se puede asegurar que toda solución permanece acotada es el que se señala en la siguiente proposición, la cual es análoga a la Proposición 2.1 y Corolario 2.2 establecidos para ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Proposición 3.3.** *Considere el sistema diferencial siguiente*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), & t > 0, \\ X(0) = X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n), \end{cases}$$

donde  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  en la variable de estado  $X \in \mathbb{R}^n$ . Si se asume que la condición inicial  $X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$  pertenece al producto de intervalos

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

es decir,  $x_0^i \in [a_i, b_i]$ , y para  $t \in [0, +\infty[$  se tiene que

- $f_i(t, X) \geq 0$ ,  $\forall X \in R$  tal que  $x_i = a_i$ ;
- $f_i(t, X) \leq 0$ ,  $\forall X \in R$  tal que  $x_i = b_i$ ,

entonces, existe una única solución definida en  $[0, +\infty[$ . Si  $X = (x_1, \dots, x_n) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la solución, se tendrá además que  $x_i(t) \in [a_i, b_i]$  para todo  $t \geq 0$ .

El anterior resultado nos dice que si se satisface una condición sobre la función  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , la cual define el sistema diferencial, entonces existe una única solución y ésta permanece en el producto de intervalos  $R$ . Esta condición se interpreta como el hecho de que en los bordes del rectángulo  $R$ , la función  $f$ , y por ende, la velocidad  $\frac{d}{dt}X(t)$ , tiene dirección hacia el interior de  $R$ , como se ilustra en la Figura 3.3 para el caso de dos dimensiones. Es precisamente esta propiedad la que nos asegura que la solución  $X(t)$  no saldrá de la región  $R$ .

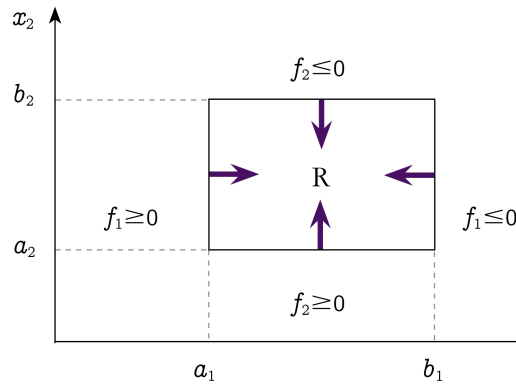


FIGURA 3.3. Propiedad de la función  $f = (f_1, f_2)$  en la Proposición 3.3.

### 3.2 Equilibrio y estabilidad

En el estudio de sistemas diferenciales también nos interesaremos por el comportamiento de soluciones cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Para ello, de manera análoga al caso de ecuaciones diferenciales, comenzaremos definiendo lo que es un punto de equilibrio de un sistema diferencial autónomo y luego entregaremos algunos resultados referentes a la estabilidad de dichos puntos.

Considere el sistema diferencial autónomo siguiente

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)), \quad t > 0,$$

donde la variable de estado  $X$  tendrá  $n$  componentes:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y la función  $f$  estará definida por

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)).$$

Un equilibrio del sistema (3.10) es un elemento  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(X^*) = (0, \dots, 0)$ , es decir,  $f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Claramente, si se considera el sistema

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)), & t > 0, \\ X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \end{cases}$$

y la condición inicial  $X_0$  es un punto de equilibrio, entonces la función  $X(t) = X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$  (función constante) es una solución, ya que

$$\frac{d}{dt}X(t) = (0, \dots, 0) = f(X_0) = f(X(t))$$

y  $X(0) = X_0$ .

En el modelo de Lotka-Volterra

$$(3.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t), \end{cases}$$

el cual escribimos,

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)),$$

donde  $X = (x, y)$  y  $f$  es definida por

$$f(X) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (\alpha_1 x - \beta_1 xy, -\alpha_2 y + \beta_2 xy),$$

se tiene que los equilibrios del sistema diferencial son los estados  $X^* = (x^*, y^*)$  solución del sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 x - \beta_1 xy &= 0 \\ -\alpha_2 y + \beta_2 xy &= 0. \end{aligned}$$

Una solución del anterior sistema está dada por  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  la cual representa ausencia absoluta de presas y predadores. La otra solución será

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)$$

la cual es positiva en sus dos componentes.

Un punto de equilibrio  $X^*$  que pertenece a un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se dirá **localmente estable** en  $C$  si para toda condición inicial  $x_0 \in C$  suficientemente cerca de  $X^*$  se tiene que la única solución global (cuando exista)  $X : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , asociada a la condición inicial, satisface  $X(t) \rightarrow X^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . El equilibrio  $X^*$  se dice **globalmente estable** en  $C$  si para toda condición inicial  $X_0 \in C$  se tiene que la única solución global  $X : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , asociada a la condición inicial, satisface  $X(t) \rightarrow X^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Dado un sistema diferencial

$$(3.13) \quad \frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)), \quad t > 0,$$

encontrar los puntos de equilibrio se reduce a resolver el sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas, con  $n$  incógnitas, siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ 0 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ 0 &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como ya hemos mencionado, en la monografía [18] se describen algunos métodos numéricos para estos propósitos.

Si el sistema a estudiar es lineal autónomo de la forma

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t),$$

donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , el punto  $X^* = (0, \dots, 0)$  es por cierto un equilibrio. La estabilidad global de este punto será determinada por el signo de la parte real de los valores propios de  $A$  como se presenta en el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.** *Si la parte real de todos los valores propios de la matriz  $A$  es negativa, entonces, para cualquier condición inicial  $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ , se tiene que la única solución global  $X(t)$  del sistema*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = AX(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

*satisface  $X(t) \rightarrow X^* = (0, \dots, 0)$ .*

**Demostración.** Una forma de demostrar el anterior resultado es haciendo utilización de la solución explícita de la solución, la cual estará dada por  $X(t) = e^{tA}X_0$ . La exponencial de una matriz  $B$ , similarmente al caso de números reales, está definida por

$$e^B = \sum_{k \geq 0} \frac{B^k}{k!},$$

resultando ser una matriz de  $n \times n$ . Remitámonos sólo al caso en que una matriz  $A$  es diagonalizable y, por lo tanto, todos sus valores propios serán reales (en la Sección 3.3 se detalla la resolución de sistemas diferenciales lineales en el caso de dos dimensiones). Recordemos que  $v \in \mathbb{R}^n$  es un vector propio de una matriz, de  $n \times n$ ,  $B$  asociada al valor propio real  $\lambda$  si

$$Bv = \lambda v.$$

Si la matriz  $A$  es diagonalizable, entonces lo será también  $tA$  para todo  $t \geq 0$ . Si  $v$  es vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda$ , entonces  $v$  será vector propio de  $tA$  asociado al valor propio  $t\lambda$  teniéndose  $(tA)^k v = (t\lambda)^k v$  y, por lo tanto, la matriz exponencial  $e^{tA}$  aplicada a  $v$  será

$$e^{tA}v = \sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k v}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(t\lambda)^k v}{k!} = e^{t\lambda}v.$$

Dado que  $A$  es diagonalizable, se tiene que existen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores propios de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  respectivamente, tales que el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  conforman una base de  $\mathbb{R}^n$ , y por lo tanto, para la condición inicial  $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ , existen coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tales que

$$X_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Aplicando la exponencial de  $tA$  a  $X_0$  se tendrá

$$X(t) = e^{tA}X_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{tA}v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{t\lambda_i}v_i$$

implicando que, si todos los valores propios  $\lambda_i$  son negativos (hemos asumido que son todos reales), se tendrá  $X(t) \rightarrow 0$ .

□

El interés del resultado que se presenta a continuación, el cual es una especie de generalización de la Proposición 3.4, es que dado un equilibrio  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , es posible determinar si es localmente estable sin necesidad de conocer la solución explícita del sistema (3.13), por ejemplo, cuando éste no es lineal. De esta forma, cuando ya hemos podido establecer nuestro modelo a tiempo continuo vía un sistema diferencial, podremos decir, en alguna medida, cómo se va a comportar la solución para tiempos grandes ( $t \rightarrow +\infty$ ) sin haber obtenido tal solución.

**Teorema 3.5.** *Considere el sistema diferencial autónomo siguiente:*

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) \quad t > 0,$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$ . Si  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  es un equilibrio ( $f(X^*) = 0$ ) y la parte real de los  $n$  valores propios de la matriz Jacobiana  $Df(X^*)$  es negativa, entonces, dado  $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  suficientemente cerca de  $X^*$ , se tiene que la única solución del sistema diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) & t > 0 \\ X(0) = X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n). \end{cases}$$

satisface  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \rightarrow (x_1^*, \dots, x_n^*) = X^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Cuando  $n = 1$  la matriz Jacobiana de la función  $f$  se reduce a su derivada. El signo de la parte real del valor propio de la matriz Jacobiana en el equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}$  no es más que el signo de la derivada de  $f$  en  $x^*$ . Por lo tanto, el resultado anterior es una extensión a dimensiones superiores del Teorema 2.4.

**Ejercicio 3.4.** Demuestre la Proposición 3.4 utilizando el Teorema 3.5. Para ello utilice el hecho que si  $X(t)$  es una solución del sistema diferencial lineal que converge a cero, entonces, para  $\varepsilon > 0$ , la función  $Z(t) = \varepsilon \frac{X(t)}{2\|X_0\|}$  también es una solución que converge a cero y su condición inicial está a distancia  $\varepsilon/2$  del origen.

En estos tres primeros capítulos hemos introducido los conceptos de equilibrios localmente y globalmente estables para modelos (en una y varias variables) a tiempo discreto y continuo. En general, existen más definiciones para los equilibrios de un sistema dinámico, puesto que dado un equilibrio  $X^*$ , podría suceder que la solución del sistema no converja a  $X^*$ , pero sin embargo esté, a partir de un instante, muy cerca de él. También podría ocurrir que una solución en ciertos instantes esté cerca del equilibrio y en otros no. Estos comportamientos que no han sido abordados pueden ser considerados como un tipo de estabilidad.

Una herramienta para determinar si el equilibrio de un sistema a tiempo continuo o discreto es globalmente estable, son las denominadas *funciones de Lyapunov*. Para introducirse en este tema se recomienda, entre otras muchas referencias, el texto [20].

En sistemas de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones, existe un resultado muy importante el cual establece todas las posibles propiedades cualitativas que pueden tener las trayectorias. Este resultado, establecido más abajo (cuya demostración escapa a los objetivos del texto), es conocido como el Teorema de Poincaré-Bendixson en honor al matemático francés Henri Poincaré (1854-1912), quien hiciera importantes aportes a la teoría de la relatividad y a la teoría del caos, y al matemático sueco Ivar Bendixson (1861-1935) quien demostró el teorema, bajo hipótesis más débiles a las utilizadas en un comienzo por Poincaré, a comienzos del siglo XX.

**Teorema 3.6.** *Dado un sistema de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = f_2(x(t), y(t)), \end{cases}$$

*si una solución  $X(t) = (x(t), y(t))$  es acotada, entonces converge a un punto de equilibrio o a una función periódica, es decir, a una función  $\bar{X}(\cdot)$  tal que existe  $T > 0$  donde  $\bar{X}(t+T) = \bar{X}(t)$  para todo  $t > 0$ .*

El anterior teorema nos dice que en dos dimensiones, la solución de un sistema diferencial no es acotada o bien es convergente a un equilibrio o a una función periódica. Estas posibilidades descartan comportamientos caóticos como el estudiado en el modelo logístico a tiempo discreto. El Teorema 3.6 es una herramienta que entrega un conocimiento adicional para los sistemas en dos dimensiones los cuales, cualitativamente, podremos describir a través de los diagramas de fase introducidos en la sección siguiente.

### 3.3 Diagramas de fase

En esta sección nos concentraremos en sistemas de ecuaciones diferenciales, de primer orden, de tamaño 2 como el siguiente

$$(3.14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = f_2(x(t), y(t)), \end{cases}$$

cuya función incógnita es  $X(t) = (x(t), y(t))$  y la función  $f = (f_1, f_2)$  está definida sobre  $\mathbb{R}^2$  a valores en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Una solución  $X(t) = (x(t), y(t))$  del sistema (3.14) (para una determinada condición inicial) puede interpretarse como la ecuación de una curva paramétrica (de parámetro  $t$ ) en el plano cartesiano  $x - y$ . El gráfico con diferentes curvas representando soluciones de (3.14), para distintas condiciones iniciales, en el plano  $x - y$  es lo que se denomina un *diagrama de fase*. Este es una representación geométrica de las soluciones en el plano  $x - y$  el cual constituye una importante herramienta para analizar cualitativamente fenómenos que evolucionan en el tiempo y, en general, para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, si  $X^* = (x^*, y^*)$  es un equilibrio del sistema (3.14) entonces,  $X^*$  (curva que se reduce a un punto) debe estar en el diagrama de fase pues si se comienza en ese punto, la solución será permanecer por siempre en la condición inicial. El diagrama de fase nos permite de esta forma visualizar, dada una condición inicial  $X_0 = (x_0, y_0)$  en el plano, la trayectoria a partir de dicho estado inicial a lo largo del tiempo.

La curva que comienza a partir de  $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  representa la trayectoria (solución) cuando se comienza en aquel punto. En caso de que la solución sea única, las trayectorias en un diagrama de fase no pueden cruzarse. Si así fuese, dada



una condición inicial justo en la intersección, se tendría que existe más de una solución (trayectoria) posible. Como referencia complementaria para la determinación y análisis de diagramas de fase se recomiendan los textos [21, 23].

Comencemos por obtener los diagramas de fase de un sistema lineal autónomo de la forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + by(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

el cual, al denotar  $X(t) = (x(t), y(t))$ , se escribe de manera equivalente

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$$

donde  $A$  es la matriz de  $2 \times 2$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En este caso es posible dibujar un diagrama de fase conociendo los valores propios de la matriz  $A$ . Para ello, si asumimos que la matriz  $A$  es invertible, es decir el cero no es un valor propio, el único equilibrio del sistema será el punto  $X^* = (0, 0)$ . En la monografía [9] se muestra que es posible escribir la matriz  $A$  como la multiplicación

$$A = CDC^{-1}$$

donde  $C$  es una matriz invertible (obtenida a partir de los vectores propios de  $A$ ) y  $D$  puede ser de (sólo) las siguientes tres formas:

1. Si  $A$  es diagonalizable, es decir, tiene valores propios reales  $\lambda$  y  $\mu$  y en caso de ser iguales, se tiene que hay dos vectores propios linealmente independiente (i.e generan una base de  $\mathbb{R}^2$ ), entonces

$$(3.15) \quad D = R(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix};$$

2. Si  $A$  tiene dos valores propios reales igual a  $\lambda$  pero el espacio propio es de sólo una dimensión (no hay dos vectores propios linealmente independiente), entonces

$$(3.16) \quad D = R_a(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

3. Si  $A$  tiene como valor propio un número complejo<sup>1</sup>  $\alpha + i\beta$ , resultando ser su conjugado  $\alpha - i\beta$  el otro valor propio, entonces

$$(3.17) \quad D = R_c(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>La notación  $i$  es utilizada en este contexto para representar el número imaginario dado por la ecuación  $i^2 = -1$ .

De esta forma, estableceremos los diagramas de fase para sistemas asociados a las distintas configuraciones que pueda tener la matriz  $D$  y por consiguiente, el diagrama de fase asociado a la matriz  $A$  será posible de obtener mediante un cambio (lineal) de coordenadas, procedimiento que se detalla en la monografía [9]. En otras palabras, si establecemos que el punto  $(x, y)$  está en el diagrama de fase del sistema asociado a  $D$  entonces, el punto

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

estará en el diagrama del sistema asociado a  $A$ . El cambio de coordenadas indicado, el cual transforma rectas en rectas, círculos en elipses, etc., preservará las características (cualitativas), como el comportamiento de las trayectorias cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Comencemos por el diagrama de fase asociado al sistema diferencial que define la matriz  $D$  cuando ésta viene dada por (3.15), el cual resultaría ser

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = \mu y(t), \end{cases}$$

teniendo por solución  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$  y  $y(t) = y_0 e^{\mu t}$  donde  $x_0$  y  $y_0$  son las condiciones iniciales. Si ambas condiciones iniciales son cero, entonces se ha comenzado en el único equilibrio y por la tanto la trayectoria permanece ahí. Si sólo una de las condiciones iniciales es cero, entonces la trayectoria  $(x(t), y(t))$ , en el plano  $x-y$  corresponde a una línea recta (vertical u horizontal según corresponda). Si ambas condiciones iniciales son distintas de cero, entonces<sup>2</sup>

$$(3.18) \quad \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\mu} = \left( \frac{y}{y_0} \right)^{\lambda},$$

teniéndose los siguientes tres casos:

- Si  $\lambda \leq \mu < 0$  entonces,  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  y la expresión (3.18) representa lo que se denomina una curva de potencia (la parábola es una curva de éstas), la cual es presentada en el gráfico (a) de la Figura 3.4. Si  $\lambda = \mu$ , la expresión (3.18) corresponde a líneas rectas en el plano  $x - y$ . Como  $\lambda < 0$  entonces las trayectorias convergen al origen, siguiendo la recta que pasa por éste y la condición inicial;
- Si  $\lambda \geq \mu > 0$  entonces,  $(x(t), y(t))$  se aleja del origen y la expresión (3.18) representa también una curva de potencia. Las curvas que se obtienen son similares a las del caso anterior, pero cambia el sentido de las trayectorias como se muestra en el gráfico (c) de la Figura 3.4. Si  $\lambda = \mu$ , la expresión (3.18) corresponde también a líneas rectas, pero en este caso, dado que  $\lambda > 0$  las trayectorias se alejan del origen;

---

<sup>2</sup>Observe que los signos de  $\left( \frac{x}{x_0} \right)$  y  $\left( \frac{y}{y_0} \right)$  son positivos por lo que las potencias, reales, de estos valores están siempre bien definidas.

- Si  $\mu < 0 < \lambda$ , las curvas que representa las expresión (3.18) son totalmente diferentes a las de los anteriores casos (ya no son curvas de potencia) obteniéndose curvas de tipo hipérbolas. En esta situación, la trayectoria  $(x(t), y(t))$  se aleja del origen (pues  $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty$ ), comportamiento que se ilustra en el gráfico (b) de la Figura 3.4.

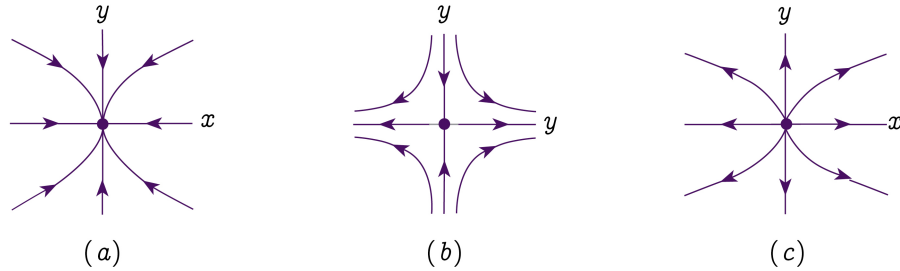


FIGURA 3.4. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios reales. (a) Valores propios reales negativos. (b) Valores propios reales de signos diferentes. (c) Valores propios reales positivos.

**Ejercicio 3.5.** Obtenga las curvas dadas por la expresión (3.18) para los siguientes valores de  $\lambda$  y  $\mu$ :

- $\lambda = -2; \mu = -1$ ;
- $\lambda = -2; \mu = -2$ ;
- $\lambda = 2; \mu = 1$ ;
- $\lambda = 1; \mu = -1$ ;
- $\lambda = -1/2; \mu = -1$ ;

Si la matriz  $D$  viene dada por  $R_a(\lambda)$  en (3.16), entonces el sistema diferencial asociado es:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = \lambda y(t). \end{cases}$$

La solución  $y(t)$  se obtiene directamente y luego, reemplazando en la primera ecuación y utilizando las metodologías introducidas en la Sección 2.1 del Capítulo 2 es posible obtener  $x(t)$ . Otra posibilidad para determinar  $(x(t), y(t))$  es, para cada  $t > 0$ , calcular la matriz exponencial de  $tD$  la cual se denota  $e^{tD}$ , procedimiento que se explica en la monografía [9]. En tal caso, la solución estará dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tD} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

donde  $x_0$  y  $y_0$  son las condiciones iniciales.

Utilizando cualquiera de los dos métodos, se deduce que las soluciones serán  $x(t) = x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t}$  y  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ . Si  $y_0 = 0$  la trayectoria es  $(x_0 e^{\lambda t}, 0)$  la cual corresponde a una línea recta horizontal en el plano  $x - y$  (siguiendo el eje  $x$ ) y el sentido dependerá del signo de  $\lambda$  teniéndose que la trayectoria se aleja del origen si  $\lambda > 0$  y converge a éste si  $\lambda < 0$ .

Si  $y_0 \neq 0$  entonces

$$x(t) = \frac{x_0}{y_0} y(t) + t y(t)$$

y dado que  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ , teniéndose

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right),$$

se deduce

$$(3.19) \quad x = \frac{x_0}{y_0} y + \frac{y}{\lambda} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right).$$

Las curvas que representa la anterior ecuación son como las que se indican en la Figura 3.5 teniéndose que las trayectorias convergen al origen si  $\lambda < 0$  y se alejan de este si  $\lambda > 0$ . Para poder dibujar las curvas asociadas a (3.19) se sugiere graficarlas a partir de condiciones iniciales  $x_0 = 0$  y  $y_0 \neq 0$  pues (3.19) resulta ser una ecuación más simple de ilustrar y además, estas curvas pasarán (en tiempo positivo o negativo) por las otras regiones del plano (otras condiciones iniciales) como se muestra en la Figura 3.5.

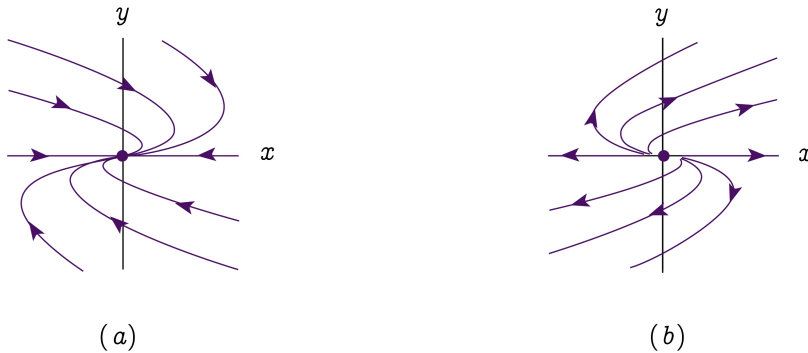


FIGURA 3.5. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios iguales, no diagonalizable: (a) Valor propio negativo. (b) Valor propio positivo.

**Ejercicio 3.6.** Para condiciones iniciales  $x_0 = 0$  y  $y_0 \neq 0$  dibuje las curvas correspondientes a la expresión (3.19) considerando  $\lambda = -1$  y  $\lambda = 1$ .

Para culminar el estudio de diagramas de fase asociados a sistemas lineales, analicemos el caso cuando la matriz  $D$  viene dada por  $R_c(\alpha, \beta)$  en (3.17) situación que corresponde si la matriz original  $A$  tiene valores propios complejos. En tal caso, el sistema diferencial asociado a  $D$  es:

$$(3.20) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\beta x(t) + \alpha y(t). \end{cases}$$

Al definir la variable  $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$  se deduce que

$$\frac{d}{dt}z(t) = 2 \left( x(t) \frac{d}{dt}x(t) + y(t) \frac{d}{dt}y(t) \right) = 2\alpha(x^2(t) + y^2(t)) = 2\alpha z(t),$$

y por lo tanto,

$$z(t) = K e^{2\alpha t},$$

donde  $K = x_0^2 + y_0^2 \geq 0$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. Si  $\alpha = 0$  entonces  $z = x^2 + y^2 = K$  lo que corresponde a trayectorias circulares (en el plano  $x - y$ ) de centro  $(0, 0)$  y radio  $\sqrt{K}$  como las que se grafican en (b) de la Figura 3.6. Estas trayectorias serán periódicas pues en el plano  $x - y$  son curvas cerradas lo que indica que, desde un punto del plano, pasado un tiempo  $T > 0$ , se vuelve al mismo punto.

Si  $\alpha \neq 0$ , la distancia de la trayectoria  $(x(t), y(t))$ , indicada por la raíz cuadrada de  $x^2(t) + y^2(t) = z(t)$  irá creciendo o decreciendo, según el signo de  $\alpha$ . En tal situación, las trayectorias corresponden a espirales teniéndose que estas convergen al origen si  $\alpha < 0$  como se indica en (a) de la Figura 3.6 o se alejan de éste como se muestra en (c) de la Figura 3.6.

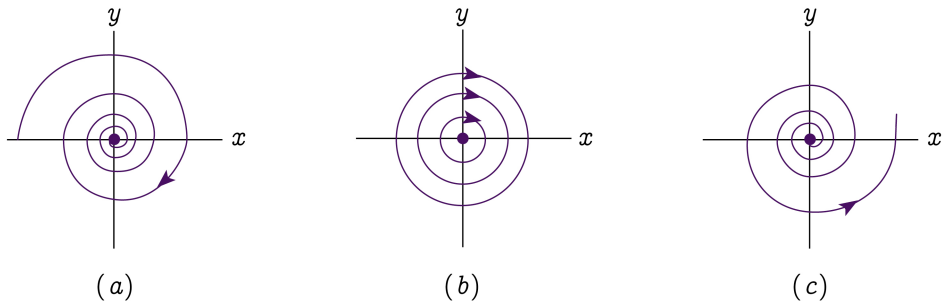


FIGURA 3.6. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios complejos. (a) Valores propios complejos de parte real negativa. (b) Valores propios complejos de parte real nula. (c) Valores propios complejos de parte real positiva.

La solución explícita del sistema (3.20) viene dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\alpha t}(x_0 \cos(\beta t) + y_0 \sin(\beta t)) \\y(t) &= e^{\alpha t}(y_0 \cos(\beta t) - x_0 \sin(\beta t))\end{aligned}$$

lo cual es posible verificar derivando con respecto al tiempo  $t$ . El procedimiento para obtener la solución nuevamente pasa por obtener una expresión de la matriz exponencial  $e^{tD}$ , proceso descrito en la monografía [9].

Observe que en los tres casos graficados en (a) de las figuras 3.4, 3.5 y 3.6, la Proposición 3.4 nos dice que dada cualquier condición inicial  $(x_0, y_0)$  se tiene que la solución converge a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Sin embargo, se observa que la convergencia a  $(0, 0)$  es diferente cuando la matriz tiene valores propios complejos a aquella donde los valores propios son reales.

**Ejercicio 3.7.** El objetivo del presente ejercicio es que usted resuelva y obtenga los diagramas de fase para sistemas diferenciales lineales que vienen definidos por las siguientes matrices:

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para ello, mediante el cálculo de valores y vectores propios de  $A$ , descrito en [9], determine la descomposición  $A = CDC^{-1}$  donde  $D$  tiene alguna de las estructuras indicadas en (3.15), (3.16) ó (3.17). Luego, resuelva los sistemas diferenciales asociados a las matrices  $D$  y dibuje los diagramas de fase. Para terminar, obtenga las soluciones de los sistemas asociados a  $A$ , lo cual se obtiene multiplicando las soluciones obtenidas anteriormente por la matriz  $C$  e ilustre cualitativamente los diagramas de fase luego de realizar el cambio de coordenada descrito.

**Ejercicio 3.8.** Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria de orden 2 dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -z(t).$$

Para el estado compuesto de dos variables  $X(t) = (x(t), y(t)) = (z(t), \frac{d}{dt}z(t))$  escriba el sistema diferencial correspondiente, resolviéndolo y dibujando el diagrama de fase asociado.

**Ejercicio 3.9.** Obtenga el diagrama de fase para el modelo de caída libre de un objeto introducido en la Sección 2.1 y en el Ejercicio 3.1 (con velocidad inicial). Este será un diagrama que representa la relación entre la posición del objeto (respecto al suelo) y su velocidad.

**Ejercicio 3.10.** En un modelo lineal, de dimensión dos, a tiempo discreto de la forma

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix},$$

como el de Romeo y Julieta introducido en el Capítulo 1, proceda, de manera similar a como hemos hecho hasta ahora, para describir las trayectorias  $(x_k, y_k)$  en el plano  $x - y$ . Es decir, analice las curvas<sup>3</sup> en dicho plano, que se obtienen si se supone que la matriz es de la forma (3.15), (3.16) ó (3.17). Para ello, deduzca la expresión de las trayectorias  $(x_k, y_k)$  en función de las condiciones iniciales y de  $k$ , para luego obtener una expresión de  $y_k$  en función de  $x_k$  donde no aparezca la variable  $k$  (el tiempo). Al realizar y analizar este procedimiento, observará que en vez de los signos de la parte real de los valores propios, intervendrán los signos del logaritmo del módulo de estos.

Los diagramas de fase de sistemas lineales, pueden ser utilizados para determinar cualitativamente los diagramas de fase de sistemas no lineales en una región cercana de un punto de equilibrio. Observe que en las figuras asociadas a sistemas lineales como, a continuación, no lineales, es posible apreciar lo estipulado por el Teorema 3.6 (de Poincaré-Bendixson), es decir, que las soluciones no son acotadas o convergen a un equilibrio o a un ciclo límite.

Para establecer diagramas de fase de sistemas no lineales, nos interesarán sistemas autónomos de la forma

$$(3.21) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

cuyas soluciones estén en una región  $R$  del plano  $x - y$  y en la cual las funciones  $f_1$  y  $f_2$  serán continuamente diferenciables (de clase  $C^1$ ). Para toda condición inicial  $X_0 = (x_0, y_0)$ , en particular para una que pertenece a la región  $R$ , el Teorema 3.2 nos asegura que existe una única solución que comienza en  $X_0$ . Para dibujar las trayectorias en el plano  $x - y$  la idea es obtener una parametrización de la solución  $y$  en función de la solución  $x$ . Suponga que esto se tiene, es decir, existe una función  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X(t) = (x(t), y(x(t)))$  es una solución del sistema (3.21). Derivando con respecto a  $t$  la función  $y(x(t))$  y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dt}y(x(t)) = \left( \frac{d}{dt}x(t) \right) \left( \frac{d}{dx}y(x(t)) \right).$$

Como  $(x(t), y(x(t)))$  es una solución del sistema (3.21) se tiene por otro lado

$$f_2(x(t), y(t)) = f_1(x(t), y(t)) \left( \frac{d}{dx}y(x(t)) \right),$$

y por lo tanto, si  $f_1(x, y) \neq 0$  para  $(x, y) \in R$ , región en la cual asumiremos está la solución  $(x(t), y(t))$ , se deduce así que la función  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  debe satisfacer la

<sup>3</sup>En realidad no serán curvas las que describen las trayectorias, si no que secuencias de puntos en el plano como se muestra en la segunda columna de la Figura 1.12.

siguiente ecuación diferencial

$$(3.22) \quad \frac{d}{dx}y(x) = \frac{f_2(x, y(x))}{f_1(x, y(x))}.$$

Por cierto, resolver la ecuación diferencial (3.22) en ocasiones puede resultar una tarea difícil. Sin embargo, uno puede dibujar cualitativamente el diagrama de fase de un sistema diferencial sin resolver dicha ecuación diferencial.

Consideremos el mismo sistema diferencial autónomo de dimensión dos no lineal

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = f_2(x(t), y(t)) \\ X(0) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = X_0, \end{cases}$$

y sea  $X^* = (x^*, y^*)$  un equilibrio. La matriz Jacobiana de la función  $f = (f_1, f_2)$  en el equilibrio  $X^*$  estará dada por

$$Df(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X^*) \end{pmatrix}.$$

El Teorema 3.5 nos dice que si la parte real de los valores propios de la matriz  $Df(X^*)$  es negativa y la condición inicial  $X_0 = (x_0, y_0)$  está suficientemente cerca de  $X^* = (x^*, y^*)$ , entonces, la solución asociada converge a  $X^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Aunque el sistema diferencial no es lineal, es posible dibujar un diagrama de fase asociado entorno al equilibrio  $X^*$ . En el sistema lineal se tenía que el equilibrio estaba dado por  $(0, 0)$ . En este caso dibujaremos las trayectorias alrededor<sup>4</sup> del equilibrio  $X^* = (x^*, y^*)$ . Así, los diagramas de fase asociados a un sistema no lineal, nos darán una idea de cómo se comportan las soluciones cuando la condición inicial está cerca del equilibrio. De esta forma, si los dos valores propios de la matriz  $Df(X^*)$  son reales, los diagramas de fase alrededor del equilibrio  $X^*$  se muestran en la Figura 3.7. Las rectas dibujadas en líneas punteadas corresponden a los espacios propios de la matriz Jacobiana, con origen en el equilibrio.

Si los valores propios son complejos con parte real no nula, los diagramas de fase asociados se representan en (a) y (c) de la Figura 3.8

Por último, si los valores propios de la matriz Jacobiana son complejos con parte real nula, el diagrama de fase asociado se muestra en (b) de la Figura 3.8.

Cuando se tiene un sistema diferencial de dimensión dos, es importante poder determinar los diagramas de fase, lo cual involucrará:

---

<sup>4</sup>En el sistema coordenado definido por los espacios propios de la matriz Jacobiana evaluada en el equilibrio y cuyo centro es éste.



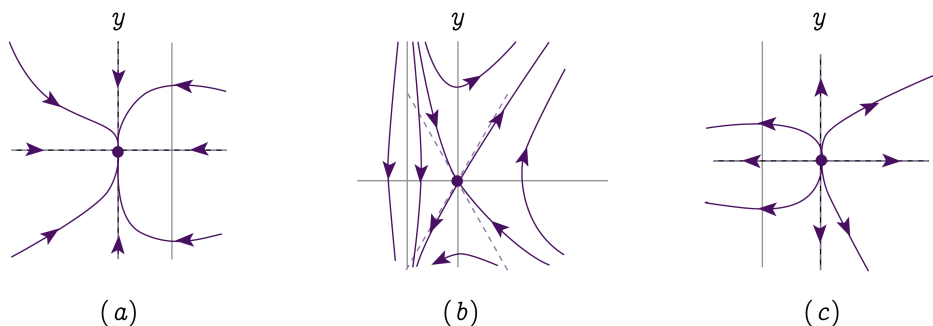


FIGURA 3.7. Diagramas de fase asociados a sistemas no lineales de valores propios reales. (a) Valores propios reales negativos. (b) Valores propios reales de signos diferentes. (c) Valores propios reales positivos.

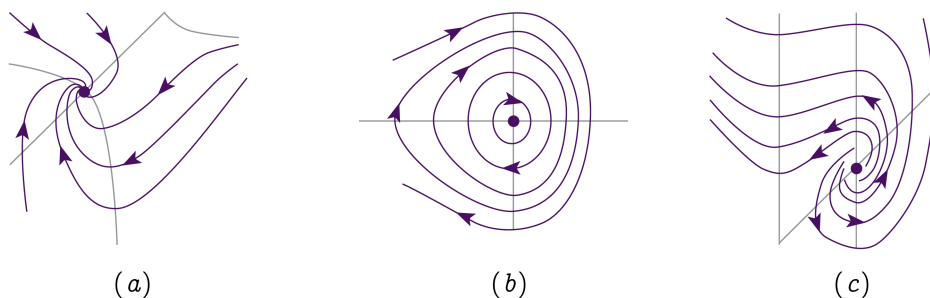


FIGURA 3.8. Diagramas de fase asociados a sistemas no lineales de valores propios complejos. (a) Valores propios complejos de parte real negativa. (b) Valores propios complejos de parte real nula. (c) Valores propios complejos de parte real positiva.

- Determinar los equilibrios  $X^* = (x^*, y^*)$ . Dicho de otra manera, resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0; \end{aligned}$$

- Para cada vector  $X^* = (x^*, y^*)$  que satisface el sistema anterior, calcular la matriz Jacobiana  $Df(X^*)$ ;

- Para cada equilibrio  $X^* = (x^*, y^*)$  calcular los valores propios de la matriz Jacobiana  $Df(X^*)$ .

Una vez hecho esto tendremos una importante información cualitativa para poder formarse una idea de cómo se comportan las soluciones alrededor de cada equilibrio (si hay más de uno)  $X^* = (x^*, y^*)$ , pudiendo, eventualmente, determinar la convergencia a él, o a un ciclo periódico o definitivamente su no acotamiento, como lo indica el Teorema de Poincaré-Bendixon.

Detalles sobre el cálculo de valores y vectores propios, cambio de sistemas de coordenadas y cálculo de matrices exponenciales, materias que son de extrema utilidad para la obtención de diagramas de fase, se encuentran como ya hemos mencionado, en la monografía *Álgebra lineal* [9] de esta misma colección.

Volvamos al modelo de Lotka-Volterra dado por el sistema diferencial no lineal

$$(3.23) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t). \end{cases}$$

donde  $x(t)$  indica la población de presas e  $y(t)$  la de predadores. Realicemos el procedimiento para poder determinar el diagrama de fase en torno al único equilibrio positivo, el que vimos era

$$(3.24) \quad (x^*, y^*) = \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right).$$

La matriz Jacobiana de la función  $f$  que define el sistema, evaluada en el equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$ , estará dada por

$$Df(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 y^* & -\beta_1 x^* \\ \beta_2 y^* & -\alpha_2 + \beta_2 x^* \end{pmatrix}.$$

Reemplazando  $(x^*, y^*)$  por la expresión (3.24) se obtiene

$$Df(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta_1 \alpha_2}{\beta_2} \\ \frac{\beta_2 \alpha_1}{\beta_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\lambda$  y  $\mu$  son los dos valores propios de la matriz Jacobiana  $Df(x^*, y^*)$  entonces,

$$\lambda + \mu = 0 \text{ (suma de los elementos de la diagonal)}$$

$$\lambda \mu = \alpha_1 \alpha_2 > 0 \text{ (determinante de la matriz).}$$

La solución del sistema anterior serán los números complejos  $\lambda = i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$  y  $\mu = -i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$  donde  $i$  representa el número imaginario dado por la ecuación  $i^2 = -1$ . De esta forma, el diagrama de fase asociado al equilibrio positivo (3.24) será cualitativamente, como se muestra en la Figura 3.8 parte (b). Esto nos indica que al comenzar próximos al equilibrio, se tendrán soluciones periódicas, pues el diagrama de fase asociado a condiciones iniciales en una cercanía de éste son curvas cerradas.

Demostremos que el anterior comportamiento no sólo sucede comenzando próximos al equilibrio. Para ello determinemos la ecuación de la curva que representará el diagrama de fase, asociado al modelo (3.23), y para simplificar asumamos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ , con lo cual se obtiene el sistema

$$(3.25) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) - x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + x(t)y(t), \end{cases}$$

resultando ser  $(1, 1)$  el único equilibrio positivo. Si consideramos  $y$  como función de  $x$  tendremos que la derivada de  $y$  respecto a  $x$  satisface (la expresión general es dada por (3.22))

$$(3.26) \quad \frac{d}{dx}y(x) = \frac{(x-1)}{x} \frac{y}{1-y}.$$

La anterior ecuación es posible de resolver utilizando las metodologías introducidas en la Sección 2.1 del Capítulo 2. De manera no tan rigurosa (pero que no es incorrecto proceder) como la expuesta en la citada sección, a partir de la ecuación (3.26), es posible realizar

$$\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

concluyendo

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) - (y - y_0) = x - x_0 - \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

lo cual es equivalente a

$$(3.27) \quad ye^{-y} = K \frac{e^x}{x},$$

donde  $K$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. Para mostrar que la curva definida por (3.27) es cerrada, lo que implicaría que las soluciones del sistema (3.25) son periódicas, definamos las funciones  $F(y) = ye^{-y}$  y  $G(x) = K \frac{e^x}{x}$ .

La función  $F$  es positiva, se anula en  $y = 0$  y tiende a cero cuando  $y \rightarrow +\infty$ . Su derivada se anula solamente en  $y = 1$  alcanzándose en este punto su valor máximo. La función  $G$  es positiva y tiende a  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a cero o a  $+\infty$ . Su derivada se anula sólo en el punto  $x = 1$  alcanzándose ahí su punto mínimo. Los comportamientos de las funciones  $F$  y  $G$  se grafican en la Figura 3.9. Dado que los puntos  $(x, y)$  que están en la curva satisfacen  $F(y) = G(x)$  (de la ecuación (3.27)) se tiene que el rango de valores de la igualdad (3.27) debe estar entre el valor máximo de  $F$  y el valor mínimo de  $G$ . Además, para un determinado  $x$  tal que  $G(x)$  sea menor al valor máximo de  $F$  se tiene que existen sólo dos valores posibles de  $y$  que satisfagan la ecuación (3.27) como se muestra en la Figura 3.9. De igual manera, para  $y$  tal que  $F(y)$  es menor al valor mínimo de  $G$  se tiene que existen sólo dos valores posibles de  $x$  que satisfacen la ecuación (3.27) como se muestra en la Figura 3.9. Observe también

que  $G$  y  $F$  toman sus valores máximos y mínimos en  $x = 1$  y  $y = 1$  respectivamente, valores que representan las coordenadas del único equilibrio positivo.

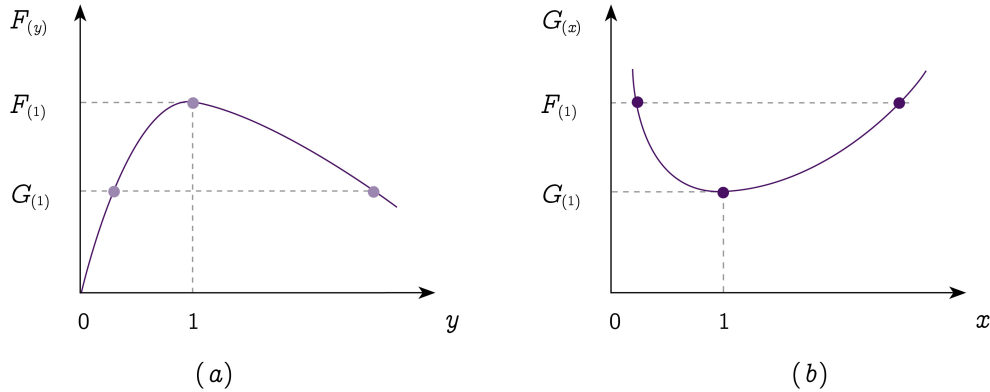


FIGURA 3.9. Gráficas de las figuras  $F$  y  $G$  de la ecuación (3.27). (a) Gráfica de  $F(y)$ . (b) Gráfica de  $G(x)$

De esta forma, podemos deducir que la expresión (3.27) corresponde a una curva cerrada (pues para cada valor de  $x$  sólo hay dos valores de  $y$  que satisfacen (3.27) y viceversa) y por lo tanto, para cada condición inicial  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$  (presencia de presas y predadores), la curva que representa la trayectoria en el plano  $x - y$  corresponde a una curva como las que se muestran en la Figura 3.10, lo cual quiere decir que existirá  $T > 0$  tal que la solución del sistema diferencial

$$(3.28) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

satisface  $x(t + T) = x(t)$  e  $y(t + T) = y(t)$  para todo instante de tiempo  $t \geq 0$ . El comportamiento periódico (en función de  $t$ ) se representa en la Figura 3.1 de la sección introductoria.

Diversas variaciones son posibles de hacer a partir de este primer modelo de interacción presa-predador. El crecimiento exponencial de la población de presas en ausencia de predador o el decrecimiento exponencial de la población de predadores en ausencia de presas, es un hecho que el lector puede modificar siguiendo pasos similares a los del Capítulo 2 asumiendo, por ejemplo, que en ausencia de predadores, la presa crece siguiendo un modelo logístico.

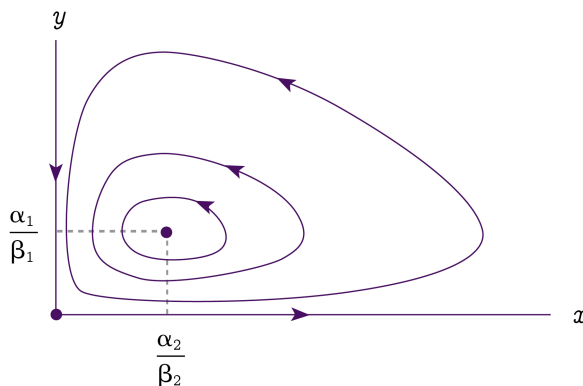


FIGURA 3.10. Diagrama de fase para el modelo de Lotka-Volterra.

**Ejercicio 3.11.** Para el modelo de Lotka-Volterra (3.28), sin asumir  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ , pruebe que el diagrama de fase corresponde a curvas cerradas.

**Ejercicio 3.12.** En el modelo de Lotka-Volterra (3.28) se define el nivel medio de presas como

$$M(x) := \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

y de manera análoga se define el nivel medio de predadores, donde  $T > 0$  es el periodo de las soluciones. Calcule el nivel medio de presas y predadores.

**Indicación:** Obtener  $x(t)$  en función de

$$\frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} (\ln(y(t)))$$

y luego integre con respecto al tiempo.

En las secciones siguientes, aplicaremos los contenidos vistos para sistemas de ecuaciones diferenciales a dos ejemplos, donde se comenzará con una deducción simple de los modelos.

### 3.4 Competencia por un mismo recurso

Analicemos la evolución de una especie bacteriana en un estanque lleno de agua. Éste contiene un único sustrato que será digerido por la bacteria. Llamaremos  $x(t)$  a la concentración (medido en una unidad apropiada) de bacterias que se encuentran en la solución líquida al interior del estanque en el instante  $t$  y notaremos  $s(t)$  a la concentración de alimento (el sustrato), en el mismo estanque. El estanque en el fondo tendrá un *agitador* el que nos permitirá suponer que la concentración de bacterias y

sustrato es la misma en cualquier parte de él (las concentraciones son homogéneas). Asumamos que:

**A1** Una molécula de alimento (de sustrato), si se encuentra con una bacteria, será transformada en otra bacteria y la cantidad de encuentros bacteria-nutriente es proporcional al producto de ambas concentraciones.

Esta hipótesis nos da las relaciones siguientes para intervalos de tiempo pequeños  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &\approx x(t) + \Delta t \mu s(t) x(t) \\s(t + \Delta t) &\approx s(t) - \Delta t \mu s(t) x(t),\end{aligned}$$

las que, luego de dividir por  $\Delta t$ , y hacer tender  $\Delta t$  a cero, se traducen en

$$(3.29) \quad \frac{d}{dt}x(t) = \mu s(t)x(t)$$

$$(3.30) \quad \frac{d}{dt}s(t) = -\mu s(t)x(t).$$

Es directo observar que  $\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d}{dt}s(t) = 0$ , por lo tanto,  $x(t) + s(t)$  es constante e igual a la suma de las condiciones iniciales

$$x(t) + s(t) = x(0) + s(0).$$

Despejando  $s(t)$  en función de  $x(t)$  y reemplazando en la expresión (3.29) obtenemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) (x(0) + s(0) - x(t)) = (x(0) + s(0))x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{x(0) + s(0)}\right).$$

De esta forma, obteniendo  $x(t)$  se obtiene  $s(t)$ . Por otro lado, se observa que  $x(t)$  evoluciona según el modelo logístico visto en el Capítulo 2. Esta deducción, así como la de otros modelos relativos a dinámica de poblaciones, se encuentran en [16].

El modelo anterior está inspirado de la química y no en la biología. Es criticable ya que estipula que la tasa de transformación de alimento en bacterias, es proporcional a la concentración del sustrato. Esto es imposible ya que la tasa de transformación de sustrato en bacteria, es claramente una función de la concentración de sustrato disponible (de  $s$ ) acotada superiormente ya que los organismos tienen forzosamente una capacidad límite de absorber el alimento. Supongamos que la tasa de crecimiento  $\mu(s)$  para las bacterias está dada por

$$(3.31) \quad \mu(s) = \frac{\mu_{max}s}{s + k},$$

donde  $\mu_{max}$  y  $k$  son constantes (parámetros) positivas. Esta función (cuya gráfica está representada por la Figura 3.11) es estrictamente creciente y acotada superiormente, de hecho  $\mu(s) \rightarrow \mu_{max}$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ .

La tasa de crecimiento para las bacterias considerada anteriormente era  $\mu(s) = \mu s$  la cual es creciente pero no acotada.

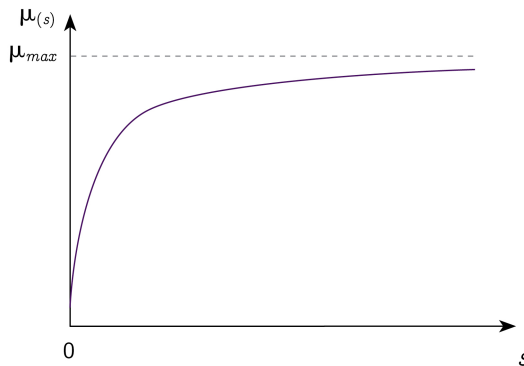


FIGURA 3.11. Gráfica de la función  $\mu(s)$  de tipo Monod.

La función (3.31), en este contexto, es llamada Monod en honor al biólogo francés Jacques-Lucien Monod (1910-1976) quien descubrió experimentalmente que la bacteria *Escherichia coli* posee un mecanismo de regulación en la absorción de alimento. Este concepto es observado en la regulación celular de todos los organismos vivientes, aunque para algunos puede ser más complicado que la función descrita en (3.31). Jacques-Lucien Monod recibió el Premio Nobel de Medicina y Fisiología el año 1965.

La función Monod es actualmente utilizada por ingenieros bioquímicos en sus investigaciones teóricas y experimentales. Una área de aplicación es aquella en que el sustrato es un contaminante y la bacteria en cuestión se encarga de limpiar el agua contaminada. Este procedimiento de descontaminación de aguas, es utilizado en numerosos procesos industriales para el tratamiento de desechos e incluso para el tratamiento de aguas servidas en grandes ciudades. Hoy en día, el estudio de los modelos matemáticos que intervienen en estos procesos es un campo en plena actividad.

La medición de los parámetros que intervienen en la función Monod (3.31) es posible medirlos en laboratorio. Una instalación muy práctica para éste y otros propósitos es el *quimiostato*, esquematizado en la Figura 3.12, introducido por Monod en los años 50. Éste consiste en llenar un estanque con un flujo (volumen por unidad de tiempo) constante de agua con sustrato y extraer agua del estanque a la misma tasa (mismo flujo). De esta forma, el volumen de la solución al interior del estanque (del quimiostato) permanece constante.

El agua que está siendo ingresada contiene una concentración  $s_{in}$  (constante) de sustrato. Si el flujo (constante) con el cual ingresa y se extrae agua es  $Q > 0$  y el volumen (constante) del estanque es  $V > 0$ , la masa total de bacterias es  $Vx(t)$ . El agua que está ingresando al estanque no posee bacterias y el agua que sale en el instante  $t$  del estanque posee una concentración  $x(t)$  de microorganismos. Por el solo hecho de llenar con agua libre de bacterias y vaciar el estanque, ambos con flujo  $Q$ ,

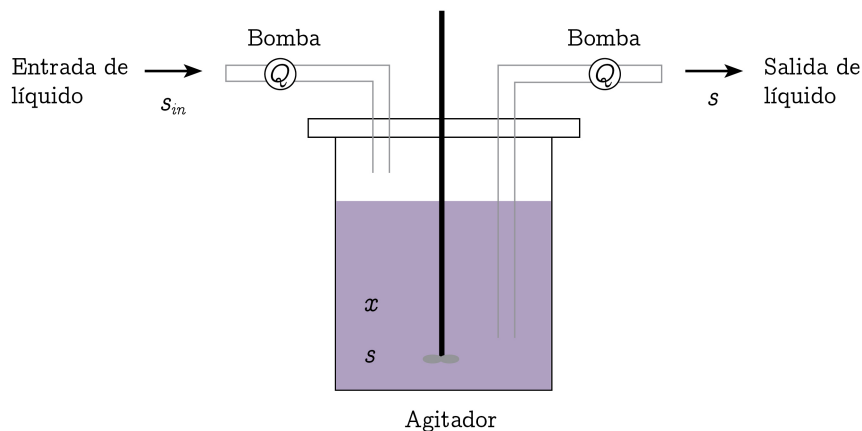


FIGURA 3.12. Esquema de un quimioestato.

se tiene que la diferencia de masa de bacterias, en un intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$  para  $\Delta t$  pequeño, puede aproximarse como

$$V(x(t + \Delta t) - x(t)) \approx -\Delta t Q x(t).$$

Por otro lado, estamos considerando que la tasa de crecimiento de las bacterias en el instante  $t$  es  $\mu(s(t))$  lo que nos permite asumir que la concentración de bacteria, debido al proceso de alimentación, aumenta ( $\mu$  es una función positiva) de la forma

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \mu(s(t)) x(t).$$

Agregando ambos procesos (dilución y crecimiento), se obtiene

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t (\mu(s(t)) - D) x(t),$$

donde  $D = Q/V$  es la tasa de dilución a la que se diluyen bacteria y sustrato.

Dado que asumimos la tasa de crecimiento per capita de las bacterias en el instante  $t$  igual a  $\mu(s(t))$  y que las moléculas de alimento son transformadas proporcionalmente en bacterias en una proporción igual, se tiene que la concentración de sustrato disminuye (es degradado) de la siguiente manera

$$s(t + \Delta t) \approx s(t) - \Delta t \mu(s(t)) x(t).$$

Por otro lado, la masa de sustrato que ingresa en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $\Delta t Q s_{in}$  y puesto que en el instante  $t$  la concentración de sustrato es  $s(t)$ , se tiene que la masa de sustrato que sale del estanque en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ , para  $\Delta t$  pequeño, puede aproximarse por  $\Delta t Q s(t)$  lo que implica una variación en la masa de sustrato por efecto de llenado-vaciado

$$V(s(t + \Delta t) - s(t)) \approx \Delta t Q (s_{in} - s(t)),$$



lo que, sumado al efecto de degradación, conlleva a

$$s(t + \Delta t) \approx s(t) - \Delta t \mu(s(t))x(t) + \Delta t D(s_{in} - s(t)).$$

Las anteriores relaciones aproximadas dan origen al sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= (\mu(s(t)) - D)x(t) \\ \frac{d}{dt}s(t) &= -\mu(s(t))x(t) + D(s_{in} - s(t)). \end{aligned}$$

La función que describe este sistema es

$$f(x, s) = (f_1(x, s), f_2(x, s)) = ((\mu(s) - D)x, -\mu(s)x + D(s_{in} - s)).$$

Para calcular los equilibrios del sistema diferencial debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\mu(s) - D)x &= 0 \\ -\mu(s)x + D(s_{in} - s) &= 0. \end{aligned}$$

Observe que un equilibrio estará dado por  $(x^*, s^*) = (0, s_{in})$ . Este estado se interpreta como aquél en que el estanque se quedó sin bacterias y, por lo tanto, la concentración de nutriente al interior de él es igual al de la solución que ingresa. Así, la solución que se extrae del estanque tendrá una concentración  $s_{in}$  de sustrato. Esto no es en absoluto deseable ya que implicará que el biorreactor (estanque) no está cumpliendo su propósito, que es disminuir la concentración del sustrato.

Si lo que se desea es encontrar un equilibrio positivo para las bacterias ( $x^* > 0$ ), entonces se tendrá que el nivel de equilibrio para el sustrato  $s^*$  satisface  $\mu(s^*) = D$  y, por lo tanto,  $x^* = s_{in} - s^*$ . Observe que una condición suficiente para tener un equilibrio positivo ( $x^* > 0$ ) es:

$$\mu(s^*) = D < \mu(s_{in}),$$

como se señala en la Figura 3.13.

Esta condición nos dice que la tasa de dilución (flujo/volumen) debe ser menor a la proporción en que se reproducen la bacterias en presencia de la concentración  $s_{in}$  del nutriente que se está agregando al estanque. Si el agua con nutriente que estamos agregando es agua contaminada, entonces podemos asumir que la concentración  $s_{in}$  de nutriente (contaminante) es alta, por lo que la relación anterior se cumple.

Por otro lado, la matriz Jacobiana de la función  $f$  que define el sistema, evaluada en el equilibrio positivo  $(x^*, s^*)$ , estará dada por

$$Df(x^*, s^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, s^*) & \frac{\partial f_1}{\partial s}(x^*, s^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, s^*) & \frac{\partial f_2}{\partial s}(x^*, s^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(s^*) - D & \mu'(s^*)x^* \\ -\mu(s^*) & -\mu'(s^*)x^* - D \end{pmatrix}.$$

Utilizando  $\mu(s^*) = D$ , se obtiene

$$Df(x^*, s^*) = \begin{pmatrix} 0 & \mu'(s^*)x^* \\ -D & -\mu'(s^*)x^* - D \end{pmatrix}.$$

En una matriz de dimensión  $2 \times 2$  la suma de los elementos de la diagonal representa la suma de los dos valores propios y el determinante de la matriz representa la multiplicación de los valores propios. Dicho esto, observamos que si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los dos valores propios de la matriz Jacobiana  $Df(x^*, s^*)$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -\mu'(s^*)x^* - D < 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= D\mu'(s^*)x^* > 0. \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores son gracias al hecho que la función Monod (3.31) satisface  $\mu'(s) > 0$  para todo  $s > 0$ . De hecho, esta propiedad la cumple toda función  $\mu(s)$  estrictamente creciente. Deducimos, por lo tanto, que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos valores propios reales negativos.

El Teorema 3.5 nos permite concluir que para cualquier condición inicial  $(x_0, s_0)$  suficientemente cerca de  $(x^*, s^*)$  se tendrá que las soluciones  $x(t)$  y  $s(t)$ , a partir de la condición inicial, cumplirán  $x(t) \rightarrow x^*$  y  $s(t) \rightarrow s^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Es posible demostrar en realidad que  $(x^*, s^*)$  es un equilibrio globalmente estable, es decir, para toda condición inicial positiva  $x_0 > 0$  y  $s_0 \in ]0, s_{in}[$ , la única solución del sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = (\mu(s(t)) - D)x(t) \\ \frac{d}{dt}s(t) = -\mu(s(t))x(t) + D(s_{in} - s(t)) \\ x(0) = x_0 \\ s(0) = s_0, \end{cases}$$

satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  y  $s(t) \rightarrow s^*$ .

**Ejercicio 3.13.** Muestre, utilizando la Proposición 3.3 y observando su demostración, que para una condición inicial  $(x_0, s_0)$  tal que  $x_0 > 0$  y  $s_0 \in ]0, s_{in}[$  se tiene que la trayectoria  $(x(t), s(t))$  satisface  $x(t) > 0$  y  $s(t) \in ]0, s_{in}[$  para todo tiempo  $t \geq 0$ .

**Ejercicio 3.14.** Demuestre que la suma de las concentraciones de microorganismo y sustrato expresada por  $x(t) + s(t)$  converge a  $s_{in}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Indicación:** Defina la variable  $z(t) = x(t) + s(t) - s_{in}$  y obtenga la expresión de  $z(t)$  mediante el cálculo  $\frac{d}{dt}z(t)$  en función de  $z(t)$ , lo cual le implicará resolver una ecuación diferencial en una dimensión.

Si lo que se está modelando es la descontaminación de aguas a través de bacterias, nosotros vamos a querer que, pasado un tiempo, la concentración de sustrato al interior del estanque y, por lo tanto, de aquella solución que estamos extrayendo, sea pequeña.

De esta forma, si de alguna manera podemos hacer que  $s^*$  sea pequeño, estaremos logrando nuestro objetivo.

Dado que

$$\mu(s^*) = D,$$

decir que  $s^*$  sea pequeño implica imponer que  $D$  sea pequeño, pues la función  $\mu$  es estrictamente creciente (ver Figura 3.13). La constante  $D > 0$  representa la tasa de dilución a la cual es llenado el estanque, esto es, flujo entrante (medido en cantidad de litros por unidad de tiempo) dividido por el volumen de agua que hay al interior del estanque. Si suponemos el flujo entrante y saliente fijo (e.g. determinado por el aparato encargado de bombear el agua) y queremos que  $D$  sea pequeño, lo que se debe tener es un estanque de gran volumen. De esta forma  $D$  disminuye y, por consiguiente, el nivel de equilibrio del sustrato (del contaminante)  $s^*$  será menor. Así, en estanques más grandes tendremos un nivel de equilibrio  $s^*$  más pequeño y, por lo tanto, el agua que extraigamos tendrá una concentración menor de contaminantes como se indica en la Figura 3.13. En la planta de tratamiento de aguas servidas La Farfana, ubicada en Santiago, se puede apreciar que hay inmensos biorreactores para estos propósitos.

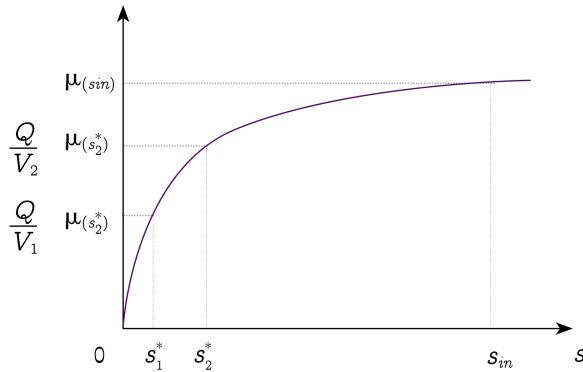


FIGURA 3.13. Equilibrios  $s_1^*$  y  $s_2^*$  correspondientes a dos volúmenes  $V_1 > V_2$ .

Si en el estanque estamos en presencia de una segunda bacteria y denominamos por  $x_1(t)$  a la primera y  $x_2(t)$  a la segunda, haciendo supuestos similares, al caso en

que había sólo una especie, podemos obtener el sistema diferencial de dimensión tres

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\mu_1(s(t))x_1(t) - \mu_2(s(t))x_2(t) + D(s_{in} - s(t)),$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son funciones Monod, como la descrita en (3.31), asociadas a cada bacteria. De esta forma, la función que describe nuestro sistema diferencial es

$$f(x_1, x_2, s) = ((\mu_1(s) - D)x_1, (\mu_2(s) - D)x_2, -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s)).$$

Para encontrar los estados de equilibrio debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned}(\mu_1(s) - D)x_1 &= 0 \\(\mu_2(s) - D)x_2 &= 0 \\-\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) &= 0.\end{aligned}$$

Observamos que el estado  $(x_1^*, x_2^*, s^*) = (0, 0, s_{in})$  es una solución del sistema anterior y, por lo tanto, un equilibrio del sistema diferencial. Al igual que cuando estábamos en presencia de una sola especie bacteriana, este equilibrio representa la situación en que el estanque se quedó sin bacterias y la concentración de nutriente (contaminante) al interior es igual a la que se está ingresando. Como mencionamos en el caso donde interviene una sola especie bacteriana, esta situación en los procesos de descontaminación no es la ideal, ya que el agua que sale tendrá la misma concentración de contaminante a la entrante.

Del sistema de ecuaciones escrito más arriba se deduce que si existe un estado de equilibrio  $(x_1^*, x_2^*, s^*)$  tal que  $x_1^* > 0$  y  $x_2^* > 0$ , entonces

$$\mu_1(s^*) = D = \mu_2(s^*).$$

La situación anterior es muy particular, pues nos dice que la tasa de dilución  $D$  debe encontrarse justo en la intersección (si es que la hubiese) entre las curvas de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  (ver Figura 3.14).

Imponer esto no parece razonable. En otras palabras, pedir que un equilibrio  $(x_1^*, x_2^*, s^*)$  satisfaga  $x_1^* > 0$  y  $x_2^* > 0$  es equivalente a que el subsistema de dos ecuaciones y una incógnita

$$\begin{aligned}\mu_1(s) &= D \\ \mu_2(s) &= D\end{aligned}$$

tenga solución. En general, sabemos que esto no se satisface.

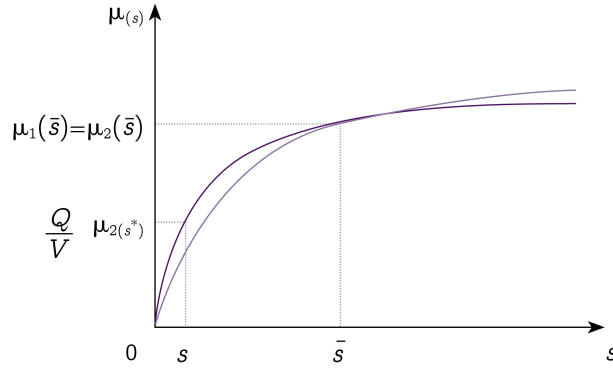


FIGURA 3.14. Equilibrio  $D = Q/V = \mu_1(s^*)$  en presencia de dos especies.

Volviendo a nuestro sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\mu_1(s) - D)x_1 &= 0 \\ (\mu_2(s) - D)x_2 &= 0 \\ -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) &= 0, \end{aligned}$$

si imponemos que dado un equilibrio  $(x_1^*, x_2^*, s^*)$  sólo una de las dos concentraciones de bacteria sea positiva, por ejemplo  $x_1^* > 0$ , se tendrá que

$$\mu_1(s^*) = D, \quad x_2^* = 0, \quad x_1^* = s_{in} - s^*.$$

Si se impone que  $x_2^*$  sea positivo se tiene la otra solución

$$\mu_2(s^*) = D, \quad x_1^* = 0, \quad x_2^* = s_{in} - s^*.$$

Así, hemos establecido tres equilibrios posibles, ya que aquél en que las concentraciones de ambas bacterias son positivas lo hemos descartado. El equilibrio  $(0, 0, s_{in})$  no es uno deseable para nuestros propósitos. De esta forma, los dos únicos equilibrios interesantes son en el que una de las dos bacterias se extingue por completo al interior del estanque. Se puede demostrar que uno de estos dos equilibrios (supongamos aquél que  $x_1^* > 0$ ) es globalmente estable, esto quiere decir que, dada cualquier condición inicial positiva  $(x_0^1, x_0^2, s_0)$  con  $x_0^1 > 0$ ,  $x_0^2 > 0$  y  $s_0 \in ]0, s_{in}[$ , se tiene que la solución

del sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t) \\ \frac{d}{dt}s(t) = -\mu_1(s(t))x_1(t) - \mu_2(s(t))x_2(t) + D(s_{in} - s(t)) \\ x_1(0) = x_0^1 \\ x_2(0) = x_0^2 \\ s(0) = s_0, \end{cases}$$

satisface  $x_1(t) \rightarrow x_1^*$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$  y  $s(t) \rightarrow s^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Lo anterior se conoce como el *Principio de exclusión competitiva*, el cual dice que en un sistema biológico donde hay más de una especie (en nuestro caso  $x_1$  y  $x_2$ ) compitiendo por un mismo alimento (en nuestro caso  $s$ ), en el estado de equilibrio, sólo una de las dos especies sobrevive. Dicho de otra forma, una de las dos especies excluye a la otra en el ecosistema donde compiten por el mismo recurso. Este comportamiento es un fenómeno que es posible apreciar en variados experimentos realizados en laboratorio. Sin embargo, también es posible observar, en determinados casos, que en sistemas en equilibrio existe la coexistencia entre las especies ( $x_1^* > 0$  y  $x_2^* > 0$ ). El modelo presentado anteriormente no será, entonces, una representación válida de aquellas situaciones donde sí se observa coexistencia. La explicación de la coexistencia de especies a través de modelos matemáticos es un campo de investigación vigente en la actualidad.

**Ejercicio 3.15.** Anteriormente se dedujo que en presencia de dos especies sólo una de las dos sobrevive en el equilibrio, lo cual se conoce como el Principio de Exclusión Competitiva. Asuma que las funciones de cada especie son Monod, dadas por

$$\mu_1(s) = \frac{\mu_{max,1}s}{s + k_1} \quad \text{y} \quad \mu_2(s) = \frac{\mu_{max,2}s}{s + k_2},$$

donde  $\mu_{max,1}$ ,  $\mu_{max,2}$ ,  $k_1$  y  $k_2$  son constantes (parámetros) positivas. Si  $s_1$  y  $s_2$  son los niveles de sustrato tal que

$$\mu_1(s_1) = D = \mu_2(s_2),$$

muestre que la primera especie sobrevive en el equilibrio ( $x_1^* > 0$ ) si, y solamente si,  $s_1 < s_2$ . En tal caso, se tendrá que la concentración en el equilibrio  $s^*$  es  $s_1$  y la concentración de la segunda bacteria  $x_2^*$  es cero.

**Indicación:** Para la configuración de parámetros descrita, muestre que si  $s_1 < s_2$  y el equilibrio  $s^*$  es  $s_2$ , entonces  $x_1^* = 0$ . Sin embargo, cuando  $s(t)$  esté suficientemente cerca de  $s^* = s_2$  se tendrá

$$\frac{d}{dt}x_1(t) > 0,$$

contradiciendo el hecho que  $x_1(t) \rightarrow x_1^* = 0$ .

### 3.5 Dinámica de un péndulo simple

En esta última sección trataremos un ejemplo proveniente de la física, el cual consiste en la dinámica de un péndulo simple. Éste es uno de los sistemas oscilantes más sencillos. Se basa en que una partícula de masa  $m$ , está suspendida desde un punto  $O$  por una cuerda que no se extiende de longitud  $L$ , y masa despreciable (ver Figura 3.15), produciéndose una oscilación en un plano. Cuando nos referimos a oscilaciones estamos hablando de dinámicas que son periódicas, propiedad que demostraremos en el caso del péndulo simple.

Las propiedades oscilatorias del péndulo fueron descubiertas empíricamente por Galileo Galilei a fines del siglo XVI. Según se cuenta, Galileo observó cómo las corrientes de aire en la catedral de Pisa hacían oscilar los enormes candelabros que estaban colgados. La amplitud de las oscilaciones era distinta y, sin embargo, a Galileo le pareció que el periodo era el mismo. Inmediatamente se puso a medirlo utilizando su ritmo cardíaco como reloj y al ver que estaba en lo cierto, decidió realizar un experimento riguroso concluyendo que:

- Los péndulos casi alcanzan la altura inicial desde la que fueron dejados caer.
- Todos los péndulos eventualmente se detienen.
- El periodo del péndulo es independiente de la masa que oscila.
- El periodo del péndulo es independiente de la amplitud de oscilación.
- Al alargar la longitud del péndulo (de la cuerda que lo sostiene) el período crece, no teniéndose una relación proporcional al largo, si no que proporcional a la raíz del largo.

Para describir el movimiento del péndulo y ver si matemáticamente podemos verificar las conclusiones que obtuvo Galileo, descompondremos la fuerza gravitacional que actúa sobre él, en su componente tangencial y radial al movimiento de éste (ver Figura 3.15). El módulo de esta fuerza es  $mg$  donde  $g$  es la aceleración gravitacional<sup>5</sup> y su dirección es vertical hacia la superficie de la tierra (flecha vertical en la Figura 3.15).

La aceleración lineal a lo largo de la dirección tangencial al movimiento (curva punteada en la Figura 3.15) puede describirse por los cambios que experimenta el ángulo  $\theta$ . El movimiento no tendrá velocidad en la dirección normal o radial debido a que la fuerza radial que ejerce la cuerda sobre el cuerpo, denominada tensión (denotada por  $T$  en la Figura 3.15), se anula con la componente normal de la fuerza gravitacional (de módulo  $mg \cos \theta$ ). De esta forma, la distancia del objeto al punto  $O$  permanece constante e igual a  $L$  y la única componente de velocidad que tendrá el péndulo es la tangencial cuyo módulo irá variando. Cuando el péndulo se desplaza un ángulo  $\theta$  (medido en radianes) el movimiento de este recorre un arco de circunferencia de longitud  $d = L\theta$ . La cantidad  $d(t)$  indica la posición del péndulo en el instante  $t$  en el arco de circunferencia. La expresión de la aceleración tangencial (que notaremos  $a$ ) en función de la aceleración angular se obtiene al derivar dos veces, con respecto

<sup>5</sup>El valor de la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra es de  $g = 9,81 \text{ m/s}$ .

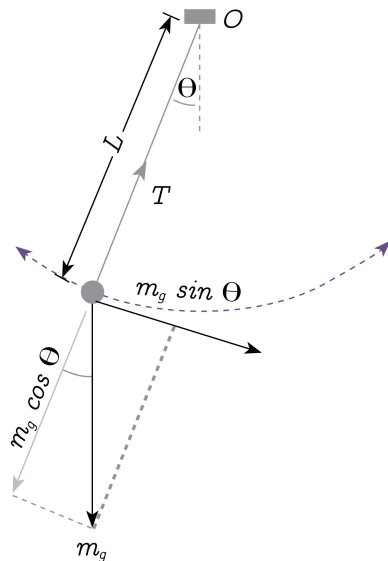


FIGURA 3.15. Descomposición de la fuerza gravitacional que actúa sobre un péndulo simple.

al tiempo, la expresión  $d = L\theta$

$$a = \frac{d^2}{dt^2}d(t) = L \frac{d^2}{dt^2}\theta(t).$$

Por otro lado, dado que la tensión de la cuerda actúa sólo radialmente, y se anula con la componente normal de la fuerza gravitacional, se tiene que la única fuerza ejercida a considerar sobre el péndulo, es la que está en sentido tangencial, la cual es la componente tangencial de la fuerza gravitacional, cuyo módulo, en un ángulo  $\theta$ , es  $mg \sin \theta$ . La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza que actúa tangencialmente (que notaremos  $F$ ) debe ser igual a la masa por la aceleración tangencial (que notamos  $a$ ), es decir,

$$F = ma = -mg \sin \theta \Rightarrow a = -g \sin \theta.$$

El signo menos corresponde al hecho de que el ángulo  $\theta$  (medido con respecto a la vertical: positivo hacia un lado y negativo hacia el otro) y la aceleración tangencial  $a$  tienen direcciones opuestas. Esto se puede asimilar si se piensa que cuando el péndulo se mueve hacia un extremo, aumentando el módulo del ángulo  $\theta$  con respecto a la vertical, uno esperaría que su aceleración tangencial tenga sentido contrario.



Lo anterior da origen a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -\left(\frac{g}{L}\right)\sin\theta(t).$$

Si las variables de estado a describir son  $(x(t), y(t)) = (\theta(t), \frac{d}{dt}\theta(t))$  se tiene que la anterior ecuación, se escribe de manera equivalente como el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$(3.32) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\left(\frac{g}{L}\right)\sin x(t). \end{cases}$$

Es directo verificar que  $(0, 0)$  es un equilibrio, el cual representa al péndulo en la vertical con velocidad angular nula. Si el péndulo en un inicio fue soltado (con velocidad nula) en un ángulo  $\theta_0 \in ]0, \pi/2]$  se podría probar que el ángulo  $\theta(t) = x(t)$  permanece por siempre en  $]-\pi/2, \pi/2]$  y, por lo tanto, el  $(0, 0)$  será el único equilibrio del sistema (3.32).

La matriz Jacobiana en el equilibrio  $(0, 0)$  será

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{g}{L}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

la cual posee dos valores propios complejos de parte real nula, indicándonos un comportamiento periódico en torno al equilibrio, que es precisamente lo que se observa cuando uno realiza la experiencia.

La ecuación que describirá el diagrama de fase (ecuación diferencial que satisface  $y$  en función de  $x$ . Ver (3.22)) es

$$\frac{d}{dx}y(x) = -\frac{g}{y(x)L}\sin x,$$

en la región donde  $y$  (la velocidad) no se anula. Resolviendo la anterior ecuación, con la metodología introducida en el Capítulo 2, para la condición inicial  $y(x_0) = y(\theta_0) = 0$  (la cual representa haber soltado el péndulo en un ángulo  $\theta_0$  con velocidad nula), se tiene que

$$y(x) = \sqrt{2\left(\frac{g}{L}\right)(\cos x - \cos \theta_0)}.$$

Asumamos ahora que el péndulo se soltó en un ángulo  $\theta_0$  muy pequeño (cercano a cero) y por lo tanto describe ángulos  $\theta$  pequeños en los cuales se puede realizar la aproximación (de primer orden)  $\sin \theta \approx \theta$ . En esta situación, el sistema (3.32) se escribe

$$(3.33) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\left(\frac{g}{L}\right)x(t). \end{cases}$$

el cual es lineal. Si la primera ecuación se multiplica por  $\left(\frac{g}{L}\right)x(t)$  y la segunda por  $y(t)$ , al sumar ambas se obtiene

$$\left(\frac{g}{L}\right)x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y(t)\frac{d}{dt}y(t) = \left(\frac{g}{L}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2(t)}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{y^2(t)}{2}\right) = 0.$$

Esto implica

$$\left(\frac{g}{L}\right)\left(\frac{x^2(t)}{2}\right) + \left(\frac{y^2(t)}{2}\right) = \left(\frac{g}{L}\right)\frac{x^2(0)}{2} + \frac{y^2(0)}{2} = \left(\frac{g}{L}\right)\frac{\theta_0^2}{2},$$

ecuación que al remplazar por  $(x(t), y(t)) = (\theta(t), \frac{d}{dt}\theta(t))$ , se traduce en

$$\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 = \left(\frac{g}{L}\right)(\theta_0^2 - \theta^2(t)),$$

cuya solución<sup>6</sup> para la condición inicial  $\theta(0) = \theta_0$ , es

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{g}{L}}\right).$$

Observe que el periodo de la solución será  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  y así, para el caso de un péndulo simple con ángulos de oscilación pequeños, algunas de las observaciones que hiciera Galileo (las tres últimas señaladas al comienzo de esta sección) matemáticamente se verifican a través de este modelo. La gracia que tuvo Galileo, es que él llegó a estas conclusiones mediante la experimentación (en ocasiones sucesivas), dado que en su época, el cálculo diferencial aún no se había desarrollado como lo conocemos hoy.

**Ejercicio 3.16.** Dibuje el diagrama de fase asociado al sistema diferencial lineal (3.33).

**Ejercicio 3.17.** Si el péndulo es lanzado con velocidad tangencial  $v_0$  (en el sentido donde el módulo del ángulo  $\theta$  decrece), obtenga la ecuación que describe el movimiento del péndulo y resuelva asumiendo que se puede hacer la aproximación de que el ángulo  $\theta$  es pequeño. Si se lanza con velocidad inicial, ¿cree usted válido hacer esta última suposición?

### 3.6 Relación con contenidos de Educación Media

- **La definición de derivada**, en los cursos más avanzados de Educación Media, es posible motivar y contextualizar mediante el proceso de modelación realizado, por ejemplo, con el modelo presa-predador de Lotka-Volterra descrito en la introducción del capítulo.

---

<sup>6</sup>La resolución de sistemas diferenciales lineales de dimensión dos, así como la obtención de sus diagramas de fase se puede ver en la Sección 3.3. En particular, para aquellos sistemas lineales a valores propios complejos, como el descrito en (3.33).

La descripción de la caída libre de un objeto, es también un tema que se propone tratar en aula ya que se puede complementar con el diseño de una actividad que trate la experimentación de dicho fenómeno, midiendo el tiempo que demora un objeto en llegar al suelo cuando es lanzado desde diferentes alturas. Por otro lado, al profesor de matemática le da la oportunidad de hacer un desarrollo teórico, planteando las ecuaciones de movimiento y resolviéndolas para verificar si lo observado en la actividad se comprueba a través del modelo. Para estos fines es necesario que los alumnos ya hayan visto en clases las definiciones de derivada de orden uno y dos, que asocien estos conceptos (cuando se deriva con respecto al tiempo) a la velocidad y aceleración y por último, que conozcan la ley de Newton  $F = ma$ .

Un ejemplo complementario al anterior, que también puede ser implementado a través de una actividad que implique realizar experimentos y por ende mediciones, es el modelo que describe la trayectoria de un proyectil. La deducción de dicho modelo está basada en los mismos principios físicos que actúan sobre un objeto en caída libre. La generalización se hace al suponer ahora, que el objeto, a partir de su posición inicial, es lanzado con velocidad que tiene componentes horizontal y vertical como se ilustra en la Figura 3.16. El movimiento del cuerpo se realizará en el plano al cual pertenece la velocidad inicial  $y$ , haciendo la suposición de que la única fuerza actuando sobre el proyectil es la gravitacional, se deducen las ecuaciones que regirán el movimiento horizontal y vertical del proyectil.

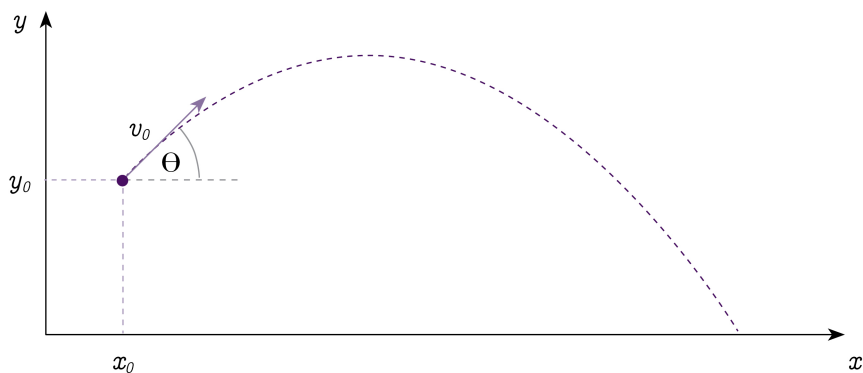


FIGURA 3.16. Esquema del lanzamiento de un proyectil.

Al denotar por  $(x(t), y(t))$  la posición del proyectil en el tiempo  $t$ , se tendrá que la aceleración en la vertical ( $y(t)$ ) es  $-mg$  y en la horizontal es cero (pues no hay fuerza ejercida en esa dirección). De esta forma, las

ecuaciones que regirán el movimiento son:

$$(3.34) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -mg. \end{cases}$$

Si el proyectil es lanzado con una velocidad de módulo  $v_0$  y ángulo  $\theta$ , la componente horizontal estará dada por  $v_0^x = v_0 \cos \theta$  y la vertical por  $v_0^y = v_0 \sin \theta$ . Si la posición inicial del proyectil es  $(x_0, y_0)$  entonces es posible resolver el sistema (3.34) de la siguiente manera:

- Definir las variables  $z_1 = x$ ,  $z_2 = \frac{d}{dt}x$ ,  $w_1 = y$ ,  $w_2 = \frac{d}{dt}y$ , obteniéndose los sistemas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z_1(t) = z_2(t) \\ \frac{d}{dt}z_2(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}w_1(t) = w_2(t) \\ \frac{d}{dt}w_2(t) = -mg \end{cases}$$

- Considerando las condiciones iniciales de posición y velocidad, se resuelven los anteriores sistemas deduciendo que

$$z_2(t) = v_0 \cos \theta$$

$$z_1(t) = x(t) = x_0 + tv_0 \cos \theta$$

$$w_2(t) = v_0 \sin \theta - tmg$$

$$w_1(t) = y(t) = y_0 + tv_0 \sin \theta - \frac{t^2}{2}mg.$$

Con las anteriores expresiones de  $x(t)$  e  $y(t)$  es posible dar como ejercicio; determinar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo ( $y(t) = 0$ ), calcular la distancia horizontal recorrida en tal periodo y obtener el tiempo y posición donde se alcanza la altura máxima.

Por otro lado, despejando el tiempo en la expresión de  $x(t)$  y remplazándolo en la de  $y(t)$  se obtiene

$$y = y_0 + \operatorname{tg} \theta (x - x_0) - \left( \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \frac{mg}{2}$$

ecuación que representa una parábola (si  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ) en el plano  $x - y$ , lo que en nuestros términos, corresponde al diagrama de fase asociado a las trayectorias  $(x(t), y(t))$ .

El anterior ejemplo, así como el de caída libre son introducidos en la asignatura de Física en Educación Media. El profesor de matemática podrá, junto a sus alumnos, hacer el desarrollo matemático comenzando por la deducción, luego por la resolución de las ecuaciones, para posteriormente preguntar por algunas conclusiones que se pueden obtener (altura máxima, alcance, etc.).

- **La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales** ( $f(X) = 0$ ) puede ser motivada como el cálculo de equilibrios de un fenómeno en evolución, el cual es descrito por varias variables. Si el modelo involucra parámetros, es posible plantear qué valores deben tener éstos para obtener un equilibrio deseado (determinado a priori) como, por ejemplo, en el modelo de Lotka-Volterra.

El ejemplo que trata la descontaminación de aguas, entregado en la Sección 3.4, se presta para ello. Dado un flujo de entrada y una concentración deseada que se requiere del contaminante (en el equilibrio), se puede determinar el volumen que debe tener el biorreactor para tal proceso.

- **Analizar fenómenos** luego que se ha determinado cómo ellos evolucionan, es un tema que sin duda motivará a los alumnos en el aula. En vez de realizar procedimientos rigurosos para determinar las soluciones de un sistema diferencial, se sugiere, realizar un trabajo tendiente a plantearlos, para luego entregar sus soluciones, que pueden ser verificadas derivando y luego analizar cómo éstas varían al modificar los parámetros; todo lo anterior, debiera interesar en mayor medida a sus alumnos.

En el ejemplo del péndulo, determinar el periodo que tendrá, conocido el largo de la cuerda, también es posible de calcular; incluso, usted puede realizar actividades, como la que hiciera Galileo, para chequear si lo que dice la matemática tiene relación con lo observado.

- **La modelación** de fenómenos que se representen por varias variables, por complicada que sea (o uno imagine) la función  $f$  de transición, es un procedimiento que se puede replicar en el aula. Para aquellos modelos (funciones  $f$ ) en que resulte atingente hacerlo, será factible realizar el cálculo de equilibrios. Aunque la diferenciación en varias variables no es un contenido de Educación Media, si al estudiante se le señala que las soluciones convergerán al equilibrio, se le puede plantear, como se indica más arriba, problemáticas en que deban analizar qué valores paramétricos dan un equilibrio deseado.



## Capítulo 4: Evoluciones con aleatoriedad



Al estudiar un fenómeno, debiésemos preguntarnos si es más apropiado realizar un modelamiento de tipo determinista o aleatorio, que tome en cuenta la falta de certeza del propio fenómeno o de los parámetros que en él influyen.

En los capítulos anteriores hemos privilegiado un modelamiento de tipo determinista, esto quiere decir que, conocido el estado de un fenómeno, nosotros asumimos que con certeza podemos determinar el estado de éste en el periodo siguiente. De esta forma, construimos modelos que nos permitieran predecir el comportamiento en el transcurso de su evolución. Sin embargo, en muchas ocasiones la transición de un estado a otro es incierta, como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Suponga<sup>1</sup> que en los últimos cien años se ha registrado la presencia del Fenómeno del Niño en las costas de Chile, Ecuador y Perú, implicando un aumento en la temperatura de las aguas superficiales. En las mediciones se ha registrado que:

- se observa la presencia del Fenómeno del Niño en 26 años;
- en los años en que se ha registrado la presencia del fenómeno, en 12 ocasiones al año siguiente el fenómeno continúa;
- en los años que no se observa el fenómeno, en 10 ocasiones al año siguiente éste se ha manifestado.

Claramente, si en un determinado año el fenómeno no se observa, no podemos decir con certeza si el próximo año se manifestará. En tal caso, es más apropiado (haciendo una simplificación extrema de la realidad) decir que con una probabilidad 10/74 el próximo año sí se presentará el fenómeno; dado que, de un total de 100 años observados, en 74 no se registró el fenómeno y en sólo 10 de ellos al año siguiente éste sí pudo ser observado. De igual manera, podemos decir que si en un año en que el Niño no se aprecia, con probabilidad 64/74 el año siguiente tampoco estará presente. Análogamente, en presencia del fenómeno, con probabilidad 12/26 al año siguiente éste continuará y con probabilidad 14/26 al periodo siguiente éste no se registrará. La información anterior puede ser recopilada en la siguiente matriz

$$P = \begin{pmatrix} 64/74 & 14/26 \\ 10/74 & 12/26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,54 \\ 0,14 & 0,46 \end{pmatrix}$$

conocida como *matriz de transición*. Ésta da cuenta de la probabilidad de transición de un estado a otro, que en este ejemplo hemos asumido son sólo dos: presencia y ausencia del Niño. Así, la coordenada  $(i, j)$  de la matriz  $P$ , que denotaremos  $P_{i,j}$  con

<sup>1</sup>Los datos presentados no son reales.

$i = 1, 2$  y  $j = 1, 2$ , representa la probabilidad de pasar del estado  $j$  al estado  $i$  notando por 1 = presencia del Niño y 2= ausencia del Niño. Más adelante veremos la utilidad de escribir, de esta manera, la matriz  $P$ .

La Figura 4.1 esquematiza en un grafo (ver la monografía [17] que trata la teoría relativa a este concepto) las transiciones entre estados con las probabilidades asociadas.

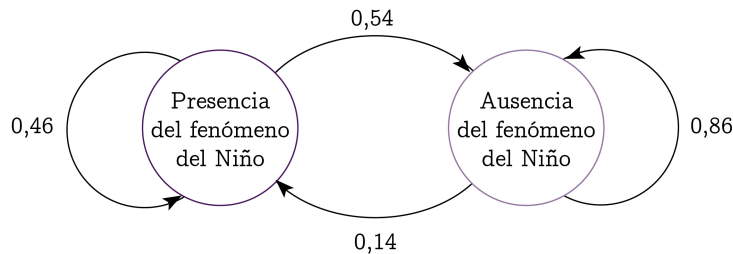


FIGURA 4.1. Grafo asociado a las transiciones del Fenómeno del Niño.

La matriz de transición será de utilidad para describir a lo largo del tiempo la evolución del fenómeno en estudio. A diferencia de los capítulos anteriores, conocido el estado actual, no podremos determinar cuál será éste en, por ejemplo, 2 años más. La pregunta relevante en nuestro ejemplo es más bien, conocido el estado del presente año, ¿cuál es la probabilidad de que en dos años más el Fenómeno del Niño se manifieste? A lo largo de este capítulo justicaremos que la respuesta a la pregunta anterior se obtiene conociendo los coeficientes de la matriz  $P^2$ .

**Ejercicio 4.1.** Asuma que el fenómeno introducido anteriormente se puede clasificar en tres estados: ausencia del Niño, presencia del Niño débil, presencia del Niño fuerte. Durante los 100 años de observación se ha registrado lo siguiente:

- se observa la presencia del Niño fuerte en 12 años y en 14 el Niño débil;
- de los años en que ha estado el Fenómeno del Niño débil, en 8 ocasiones al año siguiente ha habido el Niño fuerte y en 2 el Niño débil;
- en los años en que se registra la presencia del Niño fuerte, en sólo una ocasión al año siguiente éste ha continuado manifestándose fuertemente y en 6, al periodo siguiente no se registra la presencia del fenómeno;
- en los años en que ha habido ausencia del Niño, en 7 ocasiones al año siguiente se ha manifestado el fenómeno de manera débil y en 3 de manera fuerte.

Calcule las probabilidades de pasar de un estado a otro y construya la matriz de transición asociada con el grafo respectivo.

Veamos otro ejemplo, conceptualmente análogo al del Fenómeno del Niño, para seguir ilustrando las ideas centrales que se desarrollarán en el capítulo.



En una reserva silvestre (sin intervención humana) es posible apreciar sólo dos especies forestales: el pino y el eucaliptus, que supondremos<sup>2</sup> de similar periodo de vida. Se observa que cuando un pino muere, en 62 de 100 ocasiones es remplazado (naturalmente) por un eucaliptus y en 38 por un mismo pino. Por otro lado, cuando un eucaliptus muere, la mitad de las veces es remplazado por un árbol de la misma especie. El grafo que describe la información anterior se ilustra en la Figura 4.2.

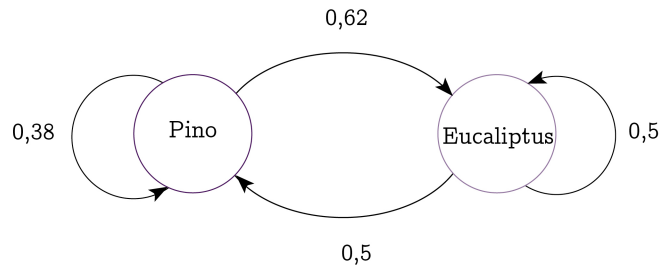


FIGURA 4.2. Grafo asociado a las transiciones entre pino y eucaliptus.

Si denotamos los estados del bosque por 1 = pino y 2 = eucaliptus, la matriz de transición, cuyos coeficientes  $P_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) denotan la probabilidad de pasar del estado  $j$  al estado  $i$ , será

$$P = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,5 \\ 0,62 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que hoy el bosque cuenta con 800 árboles de los cuales 300 son eucaliptus y 500 son pino. Para describir la evolución del bosque definiremos el vector  $\pi_k = (p_k, e_k)$  que dé cuenta de la probabilidad de tener pinos en un determinado punto del bosque en el periodo  $k$  (denotado por  $p_k$ ) y de eucaliptus en el mismo punto y periodo (denotado por  $e_k$ ). Así, las cantidades  $p_k$  y  $e_k$  pueden interpretarse como las proporciones de pinos y eucaliptus que hay en un gran bosque con condiciones (externas a las consideradas, e.g. clima, calidad de suelo, etc) homogéneas. En el periodo inicial ( $k = 0$ ), dichas proporciones serán  $p_0 = 0,625$  y  $e_0 = 0,375$  (en virtud de lo señalado al principio de este párrafo).

Calculemos la probabilidad de tener un pino en un determinado punto del bosque al periodo siguiente. Esta puede ser determinada por

$$p_1 = \begin{pmatrix} \text{proporción} \\ \text{de pinos} \\ \text{en el} \\ \text{periodo 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{probabilidad} \\ \text{de que un} \\ \text{pino sea} \\ \text{remplazado} \\ \text{por un pino} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{proporción} \\ \text{de eucaliptus} \\ \text{en el} \\ \text{periodo 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{probabilidad} \\ \text{de que un} \\ \text{eucaliptus} \\ \text{sea} \\ \text{remplazado} \\ \text{por un pino} \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Es sólo un ejemplo ilustrativo que no dice relación con la realidad.

$$= 0,625 \cdot 0,38 + 0,375 \cdot 0,5 = 0,425.$$

De igual manera, podemos calcular la probabilidad  $e_1$  de que en el periodo uno, en un determinado punto, haya un eucaliptus

$$e_1 = \begin{pmatrix} \text{proporción} \\ \text{de pinos} \\ \text{en el} \\ \text{periodo 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{probabilidad} \\ \text{de que un} \\ \text{pino} \\ \text{sea} \\ \text{reemplazado} \\ \text{por un} \\ \text{eucaliptus} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{proporción} \\ \text{de eucaliptus} \\ \text{en el} \\ \text{periodo 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{probabilidad} \\ \text{de que un} \\ \text{eucaliptus} \\ \text{sea} \\ \text{reemplazado} \\ \text{por un} \\ \text{eucaliptus} \end{pmatrix}$$

$$= 0,625 \cdot 0,62 + 0,375 \cdot 0,5 = 0,575.$$

Los cálculos anteriores pueden formularse como la multiplicación de la matriz  $P$  y el vector de proporciones iniciales  $\pi_0 = (p_0, e_0)$ . De hecho,

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,5 \\ 0,62 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,375 \end{pmatrix} = P\pi_0.$$

Más adelante justificaremos que la probabilidad de tener en un punto, un pino o un eucaliptus en el  $k$ -ésimo periodo, información que reúne el vector  $\pi_k = (p_k, e_k)$ , estará dada por la relación

$$\pi_k = P^k \pi_0.$$

Durante este capítulo nos dedicaremos, entonces, a estudiar fenómenos de evolución donde el azar o la incertidumbre intervenga. No será nuestro objetivo profundizar en la justificación de incluir el efecto aleatorio al modelar fenómenos que evolucionan. Sólo pretendemos evidenciar la existencia de fenómenos en los cuales un enfoque estocástico (dinámicas que incluyen aspectos aleatorios) parece más apropiado que un modelamiento determinista.

## Hoja de ruta

El capítulo se concentra en modelos dinámicos aleatorios a tiempo discreto. Particularmente se estudia una sub-clase de estos modelos los cuales son las cadenas de Markov. Estas modelan fenómenos que evolucionan aleatoriamente donde el estado en un periodo (en  $k + 1$ ) depende (aleatoriamente) sólo del estado anterior (en  $k$ ). Si los estados posibles que puede tomar el fenómeno es un número finito (a diferencia de los capítulos anteriores en que el estado era una variable continua y, por lo tanto, tenía una infinidad de valores posibles), no será necesario hacer un desarrollo profundo de la teoría en cadenas de Markov. Es por esta razón que abordaremos sólo este caso. Sin embargo, necesitaremos poder manipular conceptos de probabilidades que solamente serán mencionados ya que éstos son presentados con mayor detalle en monografías de esta misma colección. Los conceptos con los cuales trabajaremos y que no profundizaremos más allá de dar sus definiciones y propiedades básicas son: eventos y probabilidad, probabilidades condicionales e independencia, variables aleatorias.

Dado que el concepto de probabilidad está presente en el currículo de Educación Media, la primera parte del texto, donde se pone en evidencia la naturaleza aleatoria en las transiciones de un estado a otro, es posible tratar con alumnos de primer año de pedagogía, pues la intención en la redacción ha sido introducir de manera simple los conceptos que se vayan utilizando. En general, todo el capítulo, a excepción de la Sección 4.3, puede ser visto en primer año o en un curso introductorio de probabilidades. Si se desea desarrollar más los conceptos, haciendo utilización de las herramientas de álgebra lineal, será necesario que los estudiantes hayan cursado o estén haciendo, dicho curso.

Como referencia adicional a este capítulo recomendamos la monografía [4], orientada a profesores y estudiantes de enseñanza media, la cual incluye interesantes ejemplos. Una gran cantidad de motivaciones y desarrollos de ejemplos, provenientes del modelamiento, pueden ser encontrados también en los textos [6, 7] y en la monografía de esta misma colección [9], la cual desarrolla contenidos complementarios a este capítulo.

Los siguientes contenidos, tratados acá, pueden ser complementados con lo expuesto en las monografías de esta misma colección:

- Probabilidades condicionales, independencia, esperanza, variable aleatoria: [19, 15];
- Cálculo de valores y vectores propios, potencias de una matriz, ejemplos de Cadenas de Markov: [9];
- Principio de inducción, teoría de grafos: [17].

Los ejemplos tratados que abarcan el procedimiento de construcción del modelo y se refieren a una parte del análisis de éstos, son los estudiados en las secciones 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 y 4.4. Éstos pueden ser abordados separadamente sin necesidad de profundizar en el desarrollo teórico necesario (secciones 4.1, 4.2 y 4.3), si es que éste ya ha sido realizado en otras asignaturas. Sin embargo, a partir de los ejemplos presentados en la introducción, en las secciones donde se hace un desarrollo más teórico éstos se siguen abordando, por lo que se recomienda considerar esas partes.

Al final del capítulo se intenta hacer una conexión de los contenidos abordados con algunos de los tratados en Educación Media, proponiendo al futuro profesor un contexto diferente donde tratarlos.

## 4.1 Conceptos preliminares de probabilidades

En esta sección mencionaremos los conceptos básicos de probabilidades que requerimos antes de estudiar fenómenos de evolución con aleatoriedad.

Las situaciones que abordaremos serán de naturaleza aleatoria y tendrán asociada una probabilidad que denotaremos por  $\mathbb{P}$ , la cual se podrá evaluar en diversos eventos (o conjuntos de éstos) relevantes. En el contexto de fenómenos de evolución, los eventos en cuestión serán, por ejemplo, que el estado del fenómeno tome un cierto valor. No explicitaremos las propiedades que se requieran para que una colección

de eventos admita una probabilidad  $\mathbb{P}$  ni realizaremos construcciones formales de tal probabilidad.

El conjunto completo de eventos posibles se denomina *espacio muestral*, siendo la probabilidad de éste igual a uno (algún evento incluido en el espacio muestral ocurre). Si dos eventos o conjuntos de eventos  $A$  y  $B$  son disjuntos (puede suceder sólo uno de los dos), entonces la probabilidad de que uno de los dos ocurra  $\mathbb{P}[A \cup B]$  será la suma de las probabilidades de que ocurra cada uno, es decir,

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B].$$

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos que si consideramos un evento  $A$  y su complemento  $A^c$  (los eventos del espacio muestral que no están en  $A$ ) entonces,

$$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$$

ya que  $A$  y  $A^c$  son disjuntos y la unión de ambos es todo el espacio muestral que tiene probabilidad igual a uno.

En el ejemplo introductorio del Fenómeno del Niño, podemos considerar los eventos : *el próximo año se presentará el Fenómeno del Niño*, *el próximo año no habrá Fenómeno del Niño*. Estos son disjuntos (sólo uno de los dos ocurre) y su unión constituye todas las posibilidades, teniéndose

$$\mathbb{P} \begin{bmatrix} \text{el próximo año} \\ \text{se presentará el} \\ \text{Fenómeno del Niño} \end{bmatrix} = 1 - \mathbb{P} \begin{bmatrix} \text{el próximo año} \\ \text{no se presentará el} \\ \text{Fenómeno del Niño} \end{bmatrix}.$$

El evento imposible (que no ocurra nada), o el conjunto vacío que no contiene eventos, tiene probabilidad cero. Si un conjunto de eventos  $A$  está incluido en otro  $B$  ( $A \subseteq B$ ), es decir, un evento de  $A$  es a la vez un evento de  $B$ , entonces  $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ .

En el Ejercicio 4.1, podemos considerar los siguientes eventos: *el próximo año se tendrá el Fenómeno del Niño fuerte, débil o no se presentará el fenómeno*. Al definir el evento  $A = \text{el próximo año se tendrá el Fenómeno del Niño fuerte}$  y el conjunto de eventos  $B = \text{el próximo año se tendrá el Fenómeno del Niño}$  (que contiene a las manifestaciones fuerte y débil), se deduce  $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ .

Si  $A$  y  $B$  son eventos y  $\mathbb{P}[B] \neq 0$ , la expresión usual para la probabilidad condicional de que ocurra  $A$  dado que se sabe ocurrió  $B$ , denotada por  $\mathbb{P}[A|B]$ , es

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Dos eventos  $A$  y  $B$  se dicen independientes, si la probabilidad de que ambos eventos ocurran  $\mathbb{P}[A \cap B]$  es igual a  $\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ . En este caso, si  $\mathbb{P}[B] \neq 0$ , se obtiene  $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ .

Una partición finita del espacio muestral será una colección de conjuntos de eventos disjuntos cuya unión es el espacio muestral completo. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es una partición del espacio muestral, entonces

$$\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots + \mathbb{P}[A_n] = 1.$$

En el desarrollo del capítulo, será necesario conocer el *Teorema de las probabilidades totales* el cual dice que si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  constituyen una partición del espacio muestral donde la probabilidad de cada  $A_i$  no es nula, entonces, para cualquier evento  $A$ , se tiene

$$(4.1) \quad \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|A_1]\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A|A_2]\mathbb{P}[A_2] + \dots + \mathbb{P}[A|A_n]\mathbb{P}[A_n].$$

Lo anterior se deduce del hecho que siendo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  una partición, entonces

$$A = A \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i),$$

siendo la última una unión disjunta.

En el ejemplo de la reserva forestal, donde coexisten pinos y eucaliptus, utilizamos el teorema de las probabilidades totales para calcular la probabilidad de que hubiese una de las dos especies en un determinado punto al cabo del primer periodo. De hecho, un evento al que le calculamos su probabilidad fue  $A = \text{al cabo del primer periodo habrá un pino}$  y consideramos la siguiente partición del espacio muestral

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{hoy hay un pino;} \\ A_2 &= \text{hoy hay un eucaliptus.} \end{aligned}$$

De esta manera,  $\mathbb{P}[A|A_1]$  es la probabilidad de que al cabo del primer periodo haya un pino si hoy hay un pino, o dicho de otra forma, es la probabilidad de que un pino sea remplazado por otro pino. Así, el teorema de las probabilidades totales nos permitió calcular el valor de  $\mathbb{P}[A]$  a través de la expresión

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|A_1]\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A|A_2]\mathbb{P}[A_2].$$

Un concepto fundamental en probabilidades es el de variable aleatoria, consistente de una función que a cada evento del espacio muestral le asocia un valor. En el transcurso del capítulo trabajaremos sólo con variables aleatorias que tomen valores en un conjunto finito o un conjunto numerable de elementos.

En la introducción denotamos por 1 = ausencia del Niño y 2 = presencia del Niño. En este caso, podemos escribir la variable aleatoria, denotada por  $x$ , como

$$\begin{aligned} x(\text{ausencia del Niño}) &= 1; \\ x(\text{presencia del Niño}) &= 2, \end{aligned}$$

observando que la variable aleatoria toma un valor en el conjunto finito  $\{1, 2\}$ .

En general, si  $x, y, z$  son variables aleatorias y  $\alpha, \beta, \gamma$  son posibles valores de tales funciones respectivamente, notaremos por  $[x = \alpha, y = \beta, z = \gamma]$  al evento  $x$  toma el valor  $\alpha$ ,  $y$  el valor  $\beta$ ,  $z$  el valor  $\gamma$ . Esto último corresponde también a  $[x = \alpha] \cap [y = \beta] \cap [z = \gamma]$ .

Si el conjunto finito de valores posibles para una variable aleatoria  $x$  está dado por  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  y  $A$  es un conjunto de eventos del espacio muestral, por el Teorema de probabilidades totales, tendremos

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|x = \alpha_1]\mathbb{P}[x = \alpha_1] + \mathbb{P}[A|x = \alpha_2]\mathbb{P}[x = \alpha_2] + \dots + \mathbb{P}[A|x = \alpha_n]\mathbb{P}[x = \alpha_n].$$

Para culminar con la introducción de conceptos que utilizaremos a continuación, recordemos que el *valor esperado* o *esperanza* de una variable aleatoria  $x$  a valores en el conjunto  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , es la ponderación de los valores que ella pueda tomar considerando las probabilidades de tomar estos valores. Es decir,

$$\mathbb{E}(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{P}[x = \alpha_i].$$

De igual forma se define el valor esperado de la variable aleatoria  $x$  condicionada al evento  $A$  por

$$\mathbb{E}(x|A) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{P}[x = \alpha_i|A].$$

Si la variable aleatoria toma valores en un conjunto numerable, por ejemplo  $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ , el valor esperado es calculado como la ponderación de los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria, multiplicada por la probabilidad de que éstas se realicen

$$\mathbb{E}(x) := \sum_{i \geq 1} \beta_i \mathbb{P}[x = \beta_i] \quad \mathbb{E}(x|A) := \sum_{i \geq 1} \beta_i \mathbb{P}[x = \beta_i|A],$$

ponderación que resulta ser una serie infinita de términos.

En la siguiente sección se introducirán las cadenas de Markov, concepto que utilizaremos para modelar fenómenos que evolucionan con aleatoriedad.

## 4.2 Cadenas de Markov

Comencemos una vez más con el ejemplo del Fenómeno del Niño y consideremos la sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde  $x_k$  representa si en el año  $k$  estará o no presente el fenómeno. Estos dos eventos los hemos *etiquetado* con los valores 1 y 2, por lo tanto, para cada  $k$ , el valor de  $x_k$  está en  $\{1, 2\}$ . Si el fenómeno en estudio es la ocurrencia a través del tiempo del Niño, tendremos que la sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  describe dicho fenómeno. De la forma que hemos modelado este problema, hemos asumido que la ocurrencia del fenómeno depende sólo de si éste se manifestó o no el año anterior (suposición discutible). En tal caso, diremos que la sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Markov.

En general, una sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , a valores en un mismo conjunto, se denomina *cadena de Markov* si satisface la siguiente propiedad

$$\mathbb{P}[x_{k+1} = \beta_{k+1} | x_0 = \beta_0, x_1 = \beta_1, \dots, x_k = \beta_k] = \mathbb{P}[x_{k+1} = \beta_{k+1} | x_k = \beta_k],$$

donde  $\beta_j$  son posibles valores que pueden tomar las variables aleatoria  $x_k$ . Es decir, la probabilidad que la variable aleatoria  $x_{k+1}$  tome el valor  $\beta_{k+1}$ , dado que se conoce el valor que las variables aleatorias  $x_0, x_1, \dots, x_k$  han tenido, sólo depende de la realización de la variable aleatoria  $x_k$ . Este nombre es honor al probabilista ruso Andrei Markov (1856-1922), precursor de la teoría de procesos estocásticos<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Más antecedentes históricos sobre Andrei Markov y las repercusiones de su trabajo, pueden encontrarse en [9].

El concepto de cadena de Markov también existe para sucesiones de variables aleatorias, cuyos valores están en un conjunto continuo. Estas no serán abordadas en el texto.

Si pensamos que la variable aleatoria  $x_k$  indica el estado de un fenómeno en el periodo  $k$ , asumir que este fenómeno (representado por la sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ) es una cadena de Markov, se interpreta como el hecho de que el estado en el tiempo  $k + 1$  sólo depende, aleatoriamente, del estado en el periodo  $k$  y no de los estados en los periodos anteriores  $0, 1, \dots, k - 1$ .

La mayor parte de los modelos vistos en el primer capítulo consideraban evoluciones en las cuales el estado del fenómeno depende, de manera determinista, del estado en el que se encontraba en el periodo o instante anterior. Sin embargo, en ese mismo capítulo, también se introdujo al modelamiento de fenómenos que podían depender no sólo del estado precedente, sino que de uno o varios anteriores.

A modo de seguir ilustrando este concepto, supongamos que un individuo se desplaza a través de cinco posiciones que conforman un círculo, realizando un movimiento en cada periodo de tiempo sólo a una de las posiciones vecinas. Asumamos que el movimiento es aleatorio, por ejemplo, a cada instante, el individuo lanza una moneda. Si sale cara (con probabilidad  $p$ ), se mueve en un sentido y si sale sello (con probabilidad  $1 - p$ ), en el otro. Considere así la sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde  $x_k$  describe la posición del individuo en el periodo  $k$ , pudiendo ser ésta uno de los valores en  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (ver Figura 4.3). Para este fenómeno, conocido como *paseo aleatorio*, es natural pensar que la sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Markov, pues la posición del individuo el  $k$ -ésimo periodo depende sólo de la posición en el instante anterior y no de las posiciones en las que ha estado durante los periodos  $0, 1, 2, \dots, k - 2, k - 1$ .

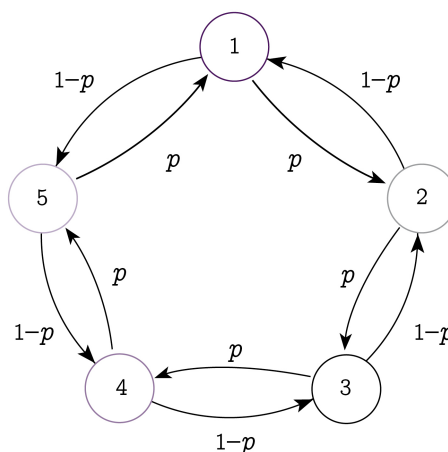


FIGURA 4.3. Grafo asociado a las transiciones en un paseo aleatorio.

Los paseos aleatorios también sirven para realizar una aproximación discreta de procesos físicos que describen el movimiento en la difusión de partículas, como se expone en la Sección 4.2.1. Si una partícula está sujeta a colisiones o impulsos aleatorios, entonces su trayectoria fluctúa estocásticamente. Al suponer que la posición de una partícula en un instante posterior, depende solo de su posición actual, entonces el proceso puede ser modelado por una cadena de Markov. Una versión clásica es proporcionada por el paseo aleatorio simétrico bidimensional. Suponga que una partícula se encuentra en una malla cuadriculada y en cada intervalo de tiempo toma una nueva posición vecina ubicada en la horizontal o vertical, como se indica en la Figura 4.4. Por ejemplo, si en el periodo  $k$  la partícula se encuentra en el vértice  $(i, j)$ , entonces en el periodo  $k + 1$  ésta puede encontrarse sólo en las siguientes cuatro posiciones:  $(i + 1, j)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  ó  $(i, j - 1)$ .

**Ejercicio 4.2.** En el ejemplo anterior, representado por la Figura 4.4, si cada posición del interior de la región tiene igual probabilidad de ser alcanzada, y las posiciones de la frontera donde se produce el movimiento es refractaria, representándose por el hecho de que la probabilidad de llegar a esas posiciones es cero, escriba la probabilidad para pasar de una posición  $(i_1, j_1)$  a otra  $(i_2, j_2)$ , para distintos estados  $(i_1, j_1)$  y  $(i_2, j_2)$ .

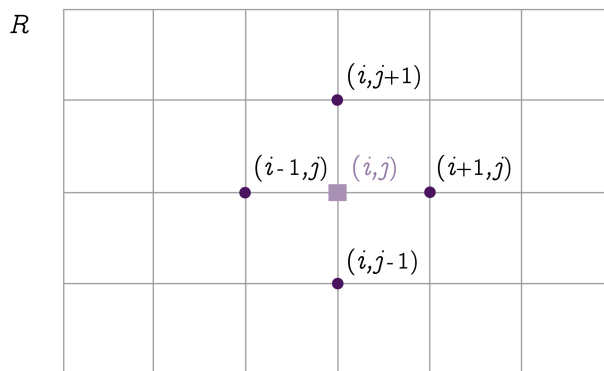


FIGURA 4.4. Esquema de un paseo aleatorio en dos dimensiones.

**Ejercicio 4.3.** Suponga que la sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  representa si llueve o no en el día  $k$ . La realización  $x_k = 1$  quiere decir que el día  $k$  llueve y  $x_k = 0$ , que el día  $k$  no llueve. De esta forma, el conjunto de valores posibles para nuestras variables aleatorias es finito (de cardinalidad 2).

¿Cree usted razonable pensar que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Markov? Dicho de otra manera, ¿piensa que la probabilidad de que llueva un día sólo depende de lo que ocurrió el día anterior y no del historial completo hacia atrás?



La *probabilidad de transición* asociada a una cadena de Markov  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es definida por el conjunto de probabilidades para pasar de un estado a otro. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos estados (valores) posibles que pueden tomar las variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  entonces, si en el periodo  $k$  el estado de la variable es  $\alpha$  ( $x_k = \alpha$ ), la probabilidades de pasar en el periodo siguiente al estado  $\beta$  será  $\mathbb{P}[x_{k+1} = \beta | x_k = \alpha]$ .

En general, la probabilidad anterior podría depender también del periodo en que se esté analizando la transición. Pasar de  $\alpha$  a  $\beta$  podría no tener la misma probabilidad ahora, que en periodos o realizaciones posteriores (¿se le ocurre algún ejemplo?). Si la probabilidad de transición de un estado a otro es independiente del periodo en el que ocurre la transición, diremos que se trata de una cadena de Markov *homogénea*. Los ejemplos que veremos serán utilizando este tipo de cadenas.

Al denotar por  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  el conjunto de posibles valores para la secuencia  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de variables aleatorias, las probabilidades de transición pueden ser escritas agrupadamente en una matriz de dimensión  $n \times n$ , donde la coordenada  $(i, j)$  indique la probabilidad de pasar del estado  $\alpha_j$  al estado  $\alpha_i$ . Esta matriz es la que hemos llamado en la introducción, *matriz de transición*. Al escribir

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & \cdots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & P_{n,n} \end{pmatrix},$$

se tendrá, entonces

$$P_{i,j} := \mathbb{P}[x_{k+1} = \alpha_i | x_k = \alpha_j] = \mathbb{P}[x_1 = \alpha_i | x_0 = \alpha_j],$$

donde la última igualdad es debida a la independencia de las probabilidades con respecto al periodo en que se evalúan (al tratarse de una cadena homogénea).

Por otro lado, observe que

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^n P_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

dado que la unión (disjunta) de los eventos  $[x_1 = \alpha_i | x_0 = \alpha_j]$  sobre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  cubre todas las posibilidades (del estado  $\alpha_j$  se pasa a algún estado  $\alpha_i$  que pertenece a  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ). La igualdad (4.2) representa la suma de los elementos de la columna  $j$  de la matriz de transición  $P$ . Es decir, si se tiene una matriz de transición, en cada columna, la suma de sus coeficientes debe ser igual a uno.

**Ejercicio 4.4.** Construya la matriz de transición asociada al paseo aleatorio indicado en la Figura 4.3 y al paseo aleatorio bidimensional de la la Figura 4.4, con las condiciones señaladas en el Ejercicio 4.2.

Supongamos que la ocurrencia del Fenómeno del Niño en el transcurso de los años es razonable modelarla con una cadena de Markov. Recuerde que hemos denotado por 1 = ausencia del Niño y 2 = presencia del Niño. Si  $k = 0$  denota el presente año, en

donde no se ha apreciado el fenómeno, ¿cómo podríamos calcular  $\mathbb{P}[x_2 = 2|x_0 = 1]$ , es decir, la probabilidad de que en dos años más tengamos el Fenómeno del Niño, sabiendo que el presente éste no se ha manifestado?

Más generalmente, conocida las probabilidades de transición de una cadena de Markov  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , dada por la matriz de transición  $P$  con coordenadas  $P_{i,j}$ , ¿cómo obtener la probabilidad de pasar de un estado a otro en dos, o más etapas?.

Comencemos con el cálculo de la probabilidad para pasar de un estado  $\alpha_j$  a un estado  $\alpha_i$  en dos periodos, es decir, calculemos  $\mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j]$ . Observe que el evento  $[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j]$  puede escribirse como la unión disjunta de los eventos *pasar de  $\alpha_j$  a  $\alpha_r$  y luego de  $\alpha_r$  a  $\alpha_i$*  cuando se consideran todas las posibilidades  $\alpha_r$ ,  $r = 1, \dots, n$  para la variable aleatoria  $x_1$ .

Así, la probabilidad de ir de  $\alpha_j$  a  $\alpha_i$  en 2 etapas, será

$$\mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j] = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}[x_1 = \alpha_r, x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j].$$

De la fórmula de probabilidades condicionales

$$(4.3) \quad \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]},$$

considerando  $A = [x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j]$  y  $B = [x_1 = \alpha_r|x_0 = \alpha_j]$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_1 = \alpha_r, x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j] &= \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] \\ &= \mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j, x_1 = \alpha_r]\mathbb{P}[x_1 = \alpha_r|x_0 = \alpha_j]. \end{aligned}$$

Dado que estamos considerando a  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una cadena de Markov homogénea, se tiene

$$\mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j, x_1 = \alpha_r] = \mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_1 = \alpha_r] = \mathbb{P}[x_1 = \alpha_i|x_0 = \alpha_r] = P_{i,r},$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j] = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}[x_1 = \alpha_i|x_0 = \alpha_r]\mathbb{P}[x_1 = \alpha_r|x_0 = \alpha_j] = \sum_{r=1}^n P_{i,r}P_{r,j}.$$

Se observa así que la probabilidad de pasar del estado  $\alpha_j$  al estado  $\alpha_i$  en dos etapas, dado por  $\mathbb{P}[x_2 = \alpha_i|x_0 = \alpha_j]$ , es la componente  $(i, j)$  de la matriz de transición  $P$  elevada al cuadrado, dada por  $\sum_{r=1}^n P_{i,r}P_{r,j}$ .

Demostremos por inducción (ver monografía [17] para una descripción detallada de esta metodología) que la probabilidad de pasar del estado  $\alpha_j$  al estado  $\alpha_i$  en  $k \geq 1$  etapas, viene dada por la coordenada  $(i, j)$  de la matriz  $P$  elevada a  $k$ , coeficiente que notaremos  $P_{i,j}^k$ . El caso  $k = 1$  viene de la definición de la matriz de transición  $P$  y el caso  $k = 2$  es el que se ha probado recientemente. Supongamos que la probabilidad de pasar de un estado  $\alpha_j$  a un estado  $\alpha_r$  en  $k$  etapas, es  $P_{r,j}^k$  (hipótesis de inducción)

y demosremos que la probabilidad de pasar de un estado  $\alpha_j$  a un estado  $\alpha_i$  en  $k + 1$  etapas, es  $P_{i,j}^{k+1}$ .

El evento al que deseamos calcular la probabilidad es  $[x_{k+1} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j]$ , el cual puede ser descompuesto en la siguiente unión disjunta: pasar de  $\alpha_j$  a  $\alpha_r$  en  $k$  etapas y luego de  $\alpha_r$  a  $\alpha_i$  en una etapa, considerando todos los posibles estados  $\alpha_r$ , lo cual escribimos

$$[x_{k+1} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j] = \bigcup_{r=1}^n [x_k = \alpha_r, x_{k+1} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j].$$

Utilizando la fórmula de probabilidades condicionales, tal como se hizo anteriormente, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_{k+1} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j] &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}[x_{k+1} = \alpha_i | x_k = \alpha_r] \mathbb{P}[x_k = \alpha_r | x_0 = \alpha_j] \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}[x_1 = \alpha_i | x_0 = \alpha_r] \mathbb{P}[x_k = \alpha_r | x_0 = \alpha_j] = \sum_{r=1}^n P_{i,r} \mathbb{P}[x_k = \alpha_r | x_0 = \alpha_j]. \end{aligned}$$

Debido a que hemos asumido (hipótesis de inducción)  $\mathbb{P}[x_k = \alpha_r | x_0 = \alpha_j] = P_{r,j}^k$ , se concluye

$$\mathbb{P}[x_{k+1} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j] = \sum_{r=1}^n P_{i,r} P_{r,j}^k,$$

que corresponde exactamente a la coordenada  $(i, j)$  de la matriz  $P^{k+1}$ , que es lo que se deseaba demostrar.

Dado que cada coordenada de la matriz  $P^k$  indica la probabilidad de pasar desde un estado a otro (en  $k$  etapas), se tiene que la suma por columna de los coeficiente debe ser igual a uno, es decir,

$$\sum_{i=1}^n P_{i,j}^k = 1 \quad \forall k \geq 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

lo cual usted puede verificar en los ejemplos vistos hasta el momento.

**Ejercicio 4.5.** Demuestre por inducción que la probabilidad de pasar desde un estado  $\alpha_j$  a un estado  $\alpha_i$  en  $k + k'$  etapas es

$$(4.4) \quad \mathbb{P}[x_{k+k'} = \alpha_i | x_0 = \alpha_j] = P_{i,j}^{k+k'} = \sum_{r=1}^n P_{i,r}^k P_{r,j}^{k'}.$$

**Ejercicio 4.6.** En el ejemplo del Fenómeno del Niño, si el presente año no se ha observado el fenómeno, calcule la probabilidad de que en 4 años más éste se manifieste.

Dada una cadena de Markov a valores en un conjunto finito de estados  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , se denomina *ley inicial* al vector

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

cuya  $i$ -ésima coordenada indica la probabilidad de que al inicio (en tiempo  $k = 0$ ) el estado, dado por  $x_0$ , tome el valor  $\alpha_i$ , es decir,

$$\mathbb{P}[x_0 = \alpha_i] = q_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como la unión disjunta

$$\bigcup_{i=1}^n [x_0 = \alpha_i]$$

abarca todas las posibilidades para el valor de  $x_0$ , se tiene que

$$1 = \mathbb{P} \left[ \bigcup_{i=1}^n [x_0 = \alpha_i] \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[x_0 = \alpha_i] = \sum_{i=1}^n q_i,$$

es decir, la suma de los coeficientes de una ley inicial o más generalmente, de un vector de probabilidad, es igual a uno.

En el ejemplo de la reserva forestal presentado en la introducción, tomábamos como ley inicial el vector (de dos componentes) que contenía la proporción de ambas especies (pinos y eucaliptus) en el bosque al inicio. Esta información la considerábamos como la probabilidad de que en un punto del bosque hubiese un pino o un eucaliptus al comienzo.

En general, dada la ley inicial y la matriz de transición de una cadena de Markov, podremos obtener la probabilidad de que en la etapa  $k \geq 0$  el estado sea  $\alpha_i$ , es decir, calcular  $\mathbb{P}[x_k = \alpha_i]$ . Esta se calcula observando que el evento  $[x_k = \alpha_i]$  puede ser escrito como la unión disjunta siguiente

$$[x_k = \alpha_i] = \bigcup_{r=1}^n [x_k = \alpha_i, x_0 = \alpha_r].$$

Así, teniendo siempre en cuenta que

$$\mathbb{P}[x_k = \alpha_i, x_0 = \alpha_r] = \mathbb{P}[x_k = \alpha_i | x_0 = \alpha_r] \mathbb{P}[x_0 = \alpha_r],$$

se deduce

$$\mathbb{P}[x_k = \alpha_i] = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}[x_k = \alpha_i | x_0 = \alpha_r] \mathbb{P}[x_0 = \alpha_r] = \sum_{r=1}^n P_{i,r}^k q_r,$$

lo cual corresponde a la componente  $i$  del vector dado por  $P^k \pi_0$ . Si denotamos por  $\pi_k$  el vector que reúne las probabilidades de que en la etapa  $k$  se esté en cada uno de los estados

$$\pi_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[x_k = \alpha_1] \\ \mathbb{P}[x_k = \alpha_2] \\ \vdots \\ \mathbb{P}[x_k = \alpha_n] \end{pmatrix},$$

por lo anterior, se tendrá la relación

$$(4.5) \quad \pi_k = P^k \pi_0.$$

**Ejercicio 4.7.** En el ejemplo de la reserva forestal, con la ayuda de una planilla de cálculo o un programa matemático, calcule la probabilidad de tener un pino en un determinado punto del bosque al cabo de 5, 10 y 15 periodos.

El concepto de equilibrio, para una matriz de transición  $P$ , el cual corresponde a un vector de distribución de probabilidades  $\pi$  tal que

$$(4.6) \quad P\pi = \pi,$$

al igual que en el Capítulo 1, representará el estado, que en este contexto indica una distribución de probabilidad, tal que si se comienza con ella, se permanecerá por siempre con dicha distribución, en virtud de la relación (4.6). Es decir, si la distribución de probabilidad inicial  $\pi_0$  es una distribución equilibrio de  $P$ , entonces  $\pi_k = P^k \pi_0 = \pi_0$  para todo  $k \geq 0$ .

Si bien el vector cuyas coordenadas son todas igual a cero satisface la ecuación (4.6), éste no será válido en este contexto, pues el vector  $\pi$  debe representar una distribución de probabilidad lo que implica que la suma de todas sus coordenadas debe ser igual a uno. La ecuación (4.6) está más bien relacionada con que el número  $\lambda = 1$  sea un valor propio de la matriz  $P$  y exista un vector propio de coordenadas positivas cuya suma sea igual a uno, propiedad que es posible demostrar. Para ello, veamos sólo el caso en que la matriz de transición es de dimensión dos:

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde  $a, b, c, d$  son mayores o iguales a cero y  $a + c = b + d = 1$  (por ser  $P$  de transición). Verifiquemos que  $\lambda = 1$  es un valor propio lo cual se prueba al calcular el determinante de la matriz

$$P - I = \begin{pmatrix} a - 1 & b \\ c & d - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & b \\ c & -b \end{pmatrix},$$

resultando ser cero. Un vector  $\pi = (q_1, q_1)$  será un vector propio asociado al valor propio uno, si  $cq_1 = bq_2$ , ecuación que tiene infinitas soluciones, pero sólo una que

satisface nuestros propósitos (coordenadas mayores o iguales a cero cuya suma de uno), la cual está dada por el vector

$$\pi = \left( \begin{array}{c} \frac{b}{b+c} \\ \frac{c}{b+c} \end{array} \right).$$

El anterior resultado se puede demostrar para el caso general en que la dimensión de  $P$  es  $n$ , probándose que existe una única distribución de equilibrio para cada matriz de transición  $P$ . Además, se tiene el siguiente resultado de convergencia.

**Teorema 4.1.** *Si  $P$  es una matriz de transición cuyos coeficientes son todos positivos, entonces, existe una única distribución de probabilidad  $\pi^*$  (coordenadas mayores o iguales a cero, cuya suma es uno) tal que a partir de cualquier distribución de probabilidad inicial  $\pi_0$ , se tiene  $P^k \pi_0 \rightarrow \pi^*$ .*

La condición de positividad para las coordenadas de la matriz  $P$  es suficiente, es decir, pueden haber matrices de transición con algunas coordenadas igual a cero, pero satisfacen la propiedad indicada en el teorema anterior.

**Ejercicio 4.8.** Calcule la distribución de equilibrio en el ejemplo de la reserva forestal.

La demostración del Teorema 4.1, así como el análisis de la convergencia o no a una distribución de equilibrio (cuando la matriz de transición tiene coeficientes nulos), son abordados en la monografía [9]. Para ello, la herramienta fundamental, propia al álgebra lineal, que se utiliza en el mencionado texto, es la de obtener la descomposición de Jordan de una matriz para calcular sus potencias. De hecho, dada una matriz de transición  $P$ , existirá una matriz invertible  $C$  y una matriz  $D$  tal que

$$P = CDC^{-1},$$

teniéndose que

$$P^k = CD^k C^{-1}.$$

La idea de realizar esta descomposición es que calcular las potencias de la matriz  $D$  resultará más fácil que calcular las potencias de  $P$ .

**Ejercicio 4.9.** Asuma que la ocurrencia de un día lluvioso o no lluvioso sólo depende de lo que sucedió el día anterior, independientemente del periodo del año en el cual uno se encuentra.

Si un día llueve, la probabilidad de que al día siguiente siga lloviendo es  $p \in ]0, 1[$  y, si un día no ha llovido, la probabilidad de que no llueva al día siguiente es  $q \in ]0, 1[$ . Considerando lo anterior, se le pide:

1. Escribir la matriz de transición  $P$ , etiquetando como estado  $\alpha_1$  si llueve y como estado  $\alpha_2$  el que no llueva;
2. Calcule la única distribución de equilibrio asociada a la matriz  $P$ ;
3. Muestre que la matriz de transición  $P$  se puede escribir como

$$(4.7) \quad P = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p+q-1 \end{pmatrix} C^{-1},$$

donde la matriz  $C$  viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & q-1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular la probabilidad de que llueva en cinco días sabiendo que hoy no ha llovido;
5. Utilizando (4.7), obtenga la expresión de  $P^k$  y calcule  $\mathbb{P}[x_k = \alpha_2 \mid x_0 = \alpha_1]$  (la probabilidad de que no llueva en  $k$  días si hoy ha llovido).
6. Si la probabilidad de que hoy llueva es igual a 0,5, calcule la probabilidad de que no llueva en  $k$  días más.
7. Verifique lo estipulado por el Teorema 4.1 calculando, para una distribución inicial  $\pi_0$ , el límite  $\pi_k = P^k \pi_0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ .

Con la finalidad de ilustrar los conceptos introducidos hasta ahora, veamos tres nuevos ejemplos que pueden ser modelados utilizando cadenas de Markov.

#### 4.2.1 Modelo de difusión de partículas

Consideremos una caja en cuyo interior hay un gas que supondremos compuesto de  $N$  moléculas. La caja estará dividida en dos compartimentos que llamaremos  $A$  y  $B$ , habiendo una pequeña abertura entre ambas partes por la cual las moléculas de gas pueden pasar de un compartimento a otro. Asumiremos que en cada instante de tiempo sólo una molécula, tomada aleatoriamente de las  $N$  disponible, pasa a través de la abertura. Si denotamos por  $x_k$  el número de partículas que hay en el compartimento  $A$  después de  $k$  periodos de tiempo, donde  $x_k$  puede tomar valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ , claramente, con las suposiciones realizadas se concluye que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Markov.

Las probabilidades de transición se calculan a partir de lo ya estipulado. La probabilidad de pasar del estado  $i$  (representando  $i$  moléculas en el compartimento  $A$ ) al estado  $i-1$ , es la probabilidad de que de las  $N$  moléculas disponible, se haya tomado justo una del compartimento  $A$  para pasar al otro lado, es decir,

$$P_{i-1,i} = \frac{i}{N},$$

y, por lo tanto, la probabilidad de pasar del estado  $i$  al estado  $i+1$  será

$$P_{i+1,i} = 1 - P_{i-1,i} = 1 - \frac{i}{N}.$$

Todas las otras probabilidades de transición serán cero, pues a cada instante sólo una molécula se traslada de un compartimento a otro.

Si el gas al interior de la caja está compuesto de solo tres moléculas, la matriz de transición será

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 4.10.** En el caso anterior, si se comienza con las tres moléculas en el compartimento  $B$  de la caja, con la ayuda de un programa matemático, calcule la probabilidad de que al cabo de 10 periodos todas las moléculas hayan pasado al compartimento  $A$ .

El anterior modelo se le atribuye al físico matemático austriaco Paul Ehrenfest (1880 - 1933) y a su señora Tatyana Alexeyevna Afanasyeva (1876 - 1964), matemática rusa. Sus principales contribuciones se produjeron en el campo de la Física estadística y su relación con la mecánica cuántica.

Calculemos la distribución de equilibrio asociado a este modelo. Para ello, debemos resolver la ecuación

$$P\pi = \pi,$$

donde  $P$  es la matriz de transición cuyas coordenadas ya se han calculado.

Si denotamos por  $\pi = (q_0, q_1, \dots, q_N)$  al vector de equilibrio, la coordenada  $i$  del vector  $P\pi$  estará dada por

$$\sum_{j=0}^N P_{i,j} q_j,$$

la cual debe ser igual a  $q_i$ . Como la gran mayoría de las probabilidades de transición son cero, en la suma anterior solamente tendremos

$$\sum_{j=0}^N P_{i,j} q_j = P_{i,i-1} q_{i-1} + P_{i,i+1} q_{i+1} = \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) q_{i-1} + \left(\frac{i+1}{N}\right) q_{i+1}$$

y, por lo tanto, la ecuación

$$(4.8) \quad P_{i,i-1} q_{i-1} + P_{i,i+1} q_{i+1} = \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) q_{i-1} + \left(\frac{i+1}{N}\right) q_{i+1} = q_i.$$

Para resolver el anterior sistema de ecuaciones, haremos la razonable suposición de que en un modelo de difusión como éste, se debiera tener la propiedad de reversibilidad al equilibrio. Esto quiere decir, que al equilibrio, la probabilidad de estar en un estado  $i$  y luego en un estado  $j$ , debiera ser la misma que estar al comienzo en  $j$  y luego en  $i$ . Lo anterior lo escribimos como

$$\mathbb{P}[x_1 = i ; x_0 = j] = \mathbb{P}[x_1 = j ; x_0 = i],$$

lo que, utilizando la expresión de la probabilidad condicional, se traduce en

$$\mathbb{P}[x_1 = i ; x_0 = j] = \mathbb{P}[x_1 = i \mid x_0 = j] \mathbb{P}[x_0 = j] = P_{i,j} q_j$$

y

$$\mathbb{P}[x_1 = j ; x_0 = i] = \mathbb{P}[x_1 = j \mid x_0 = i] \mathbb{P}[x_0 = i] = P_{j,i} q_i,$$

teniéndose

$$P_{i,j} q_j = P_{j,i} q_i.$$



Si reemplazamos  $P_{i,i-1}q_{i-1}$  por  $P_{i-1,i}q_i$  en la ecuación (4.8), se tendrá

$$P_{i-1,i}q_i + P_{i,i+1}q_{i+1} = \left(\frac{i}{N}\right)q_i + \left(\frac{i+1}{N}\right)q_{i+1} = q_i,$$

concluyéndose

$$q_{i+1} = \left(\frac{N-i}{i+1}\right)q_i \quad i \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

De esta forma, todas las coordenadas del vector distribución al equilibrio pueden ser determinadas en función de la primera coordenada  $q_0$  como sigue

$$\begin{aligned} q_1 &= Nq_0 \\ q_2 &= \left(\frac{N-1}{2}\right)q_1 = N\left(\frac{N-1}{2}\right)q_0 \\ q_3 &= \left(\frac{N-2}{3}\right)q_2 = N\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{N-2}{3}\right)q_0 \\ &\vdots \\ q_i &= N\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{N-2}{3}\right)\dots\left(\frac{N-(i-1)}{i}\right)q_0, \end{aligned}$$

determinándose que

$$q_i = \binom{N}{i} q_0,$$

donde  $\binom{N}{i}$  es el llamado *coeficiente binomial*  $N$  sobre  $i$  que vale

$$\binom{N}{i} = \frac{(N)!}{(N-i)!i!},$$

y se asume la convención de que  $0! = 1$ . Para finalizar el cálculo de las coordenadas  $q_i$  del equilibrio, imponemos que  $\sum_{i=0}^N q_i = 1$  por tratarse de un vector de probabilidad, obteniéndose

$$1 = \sum_{i=0}^N q_i = q_0 \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = 2^N q_0,$$

donde la última igualdad es debido al Teorema del binomio de Newton. Así, concluimos que

$$q_i = \frac{1}{2^N} \binom{N}{i} \quad i \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

**Ejercicio 4.11.** Si en la caja hay una cantidad par de moléculas, determine el estado que tiene asociada una mayor probabilidad en el equilibrio.

### 4.2.2 Evolución en un juego de tenis

En el siguiente ejemplo, se desea modelar la evolución de un juego de tenis entre dos tenistas que notaremos  $A$  y  $B$ . El objetivo es poder calcular la probabilidad de que uno de los dos gane el juego si éste se encuentra igualado 40-40. Esta pregunta podrá ser respondida en la Sección 4.3 pero comencemos estableciendo el modelo a analizar. Este ejemplo ha sido obtenido de los textos [2, 4].

Si el juego está igualado, estado que denotaremos por  $I$ , sabemos que en la etapa siguiente sólo hay dos posibilidades: el jugador  $A$  queda en ventaja, estado que llamaremos  $V_A$  o bien, el jugador  $B$  queda en ventaja, estado que notaremos  $V_B$ . Si el juego se encuentra en ventaja para uno de los dos jugadores, supongamos para el jugador  $A$ , existen sólo dos posibilidades para la etapa siguiente: el jugador  $A$  gana el juego, estado que denotaremos por  $G_A$ , o el juego queda en iguales, es decir, se pasa al estado  $I$ . Una vez que uno de los dos jugadores ha ganado el juego, éste termina, por lo que en la etapa siguiente el estado será el mismo (uno de los dos ha ganado).

Al modelar de manera simple el problema, se puede pensar que la relación entre las habilidades para el juego de cada uno de los jugadores no cambia con el transcurso del tiempo y que, en cada punto, la diferencia entre estas habilidades hace que el jugador  $A$  tenga una probabilidad  $p \in ]0, 1[$  de ganar y el jugador  $B$  tenga una probabilidad  $q = 1 - p$ .

Los cinco estados posibles son, entonces,  $\{G_A, V_A, I, V_B, G_B\}$ . Consideremos las variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que representarán el estado en el que se encuentra el juego en cada etapa  $k$ . El valor que pueda tomar la variable aleatoria  $x_k$  depende sólo del valor que ésta ha tomado en la etapa (punto) anterior. Por lo tanto, se tratará de una cadena de Markov y, al no variar las probabilidades durante el transcurso del tiempo, será una cadena homogénea, cuyas transiciones se esquematizan en el grafo de la Figura 4.5.

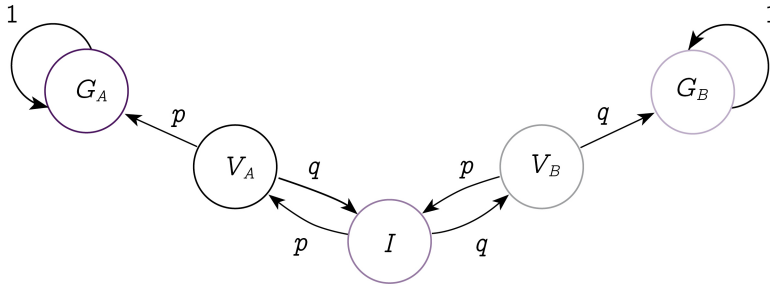


FIGURA 4.5. Grafo asociado a las transiciones en un juego de tenis.

Si etiquetamos los estados por

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= G_A \\ \alpha_2 &= V_A \\ \alpha_3 &= I \\ \alpha_4 &= V_B \\ \alpha_5 &= G_B,\end{aligned}$$

tendremos que la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 1 \end{pmatrix},$$

donde el elemento de la fila  $i$  columna  $j$ , indica la probabilidad de pasar del estado  $\alpha_j$  al estado  $\alpha_i$ . Por ejemplo, el cero de la fila 4 columna 4, representa el hecho de que si el juego se encuentra en ventaja para el jugador  $B$ , entonces, en la etapa siguiente, el juego no puede seguir en ventaja para el mismo jugador. O bien el juego pasa a estar igualado con probabilidad  $p$ , ya que ésta es la probabilidad de que el jugador  $A$  gane el punto, o, el juego es ganado por  $B$  con probabilidad  $q$ .

Observe que la suma por columnas de la matriz  $P$  debe ser igual a uno. Además, los estados  $G_A$  y  $G_B$  son lo que denominaremos más adelante *estados absorbentes*, ya que una vez que el juego se encuentra en uno de esos dos estados, se permanecerá ahí.

Recuerde que si calculamos las potencias  $P^k$  de la matriz de transición  $P$ , el elemento de la fila  $i$  columna  $j$  de  $P^k$ , es la probabilidad de ir del estado  $j$  al estado  $i$  en exactamente  $k$  etapas. Calculemos la matriz  $P^2$ :

$$(4.9) \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & pq & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2pq & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & pq & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & q & 1 \end{pmatrix}.$$

El valor  $2pq$  de la fila 3 columna 3 en la matriz  $P^2$ , indica que la probabilidad de que el juego quede igualado al cabo de dos puntos, después de estar igualados, es  $2pq$ . Calculando esta probabilidad de manera alternativa, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x_2 = I \mid x_0 = I] &= \mathbb{P}[x_1 = V_A, x_2 = I \mid x_0 = I] \\ &\quad + \mathbb{P}[x_1 = V_B, x_2 = I \mid x_0 = I],\end{aligned}$$

debido a que

$$\begin{aligned}[x_2 = I \mid x_0 = I] &= [x_1 = V_A, x_2 = I \mid x_0 = I] \\ &\quad \cup [x_1 = V_B, x_2 = I \mid x_0 = I],\end{aligned}$$

donde la última es una unión disjunta, ya que si el estado al principio es  $I$ , entonces sólo hay dos posibilidades para  $x_1$ : ya sea  $V_A$  o  $V_B$ . Al seguir desarrollando la anterior expresión, se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_0 = I] \\ &= \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_0 = I, x_1 = V_A] \mathbb{P}[x_1 = V_A \mid x_0 = I] \\ &+ \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_0 = I, x_1 = V_B] \mathbb{P}[x_1 = V_B \mid x_0 = I] \end{aligned}$$

lo cual, por tratarse de una cadena de Markov, se llega a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_0 = I] &= \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_1 = V_A] \mathbb{P}[x_1 = V_A \mid x_0 = I] \\ &+ \mathbb{P}[x_2 = I \mid x_1 = V_B] \mathbb{P}[x_1 = V_B \mid x_0 = I] = qp + pq = 2pq, \end{aligned}$$

obteniendo, por cierto, el mismo valor que se indica en la matriz  $P^2$  calculada en (4.9).

Se deja propuesto mostrar que la suma por filas de la matriz  $P^2$  en (4.9) es constante e igual a uno.

**Ejercicio 4.12.** Considerando el ejemplo anterior, responda las siguientes preguntas:

1. Si el juego se encuentra igualado, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador  $A$  gane en dos puntos consecutivos?
2. Si el juego se encuentra en ventaja para el jugador  $B$ , ¿cuál es la probabilidad de que el jugador  $A$  gane en cuatro puntos consecutivos?.

### 4.2.3 Juego de apuestas

Suponga que usted va a un Casino a apostar en su juego preferido. La apuesta en cada momento consiste en mil pesos, teniendo una probabilidad  $p \in ]0, 1[$  de ganar mil pesos más y una probabilidad  $q = 1 - p$  de perder los mil pesos apostados. Asuma que si usted llega a la cantidad de 5 mil pesos usted se retira y, por cierto, si llega a perderlo todo, no puede continuar jugando. Si usted llegó al Casino con 2 mil pesos, ¿cuál es la probabilidad de perderlo todo en 6 jugadas? o ¿cuál es la probabilidad de llegar a la suma de 5 mil pesos? (esta última pregunta podrá ser respondida en la Sección 4.3).

Dado los supuestos, es posible modelar la evolución de su dinero por una cadena de Markov, ya que la cantidad que usted tenga en la jugada  $k$  sólo dependerá (aleatoriamente) del dinero con el que cuente en la etapa anterior. Así, los estados posibles

serán

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \text{tener 0 peso} \\ \alpha_2 &= \text{tener 1000 pesos} \\ \alpha_3 &= \text{tener 2000 pesos} \\ \alpha_4 &= \text{tener 3000 pesos} \\ \alpha_5 &= \text{tener 4000 pesos} \\ \alpha_6 &= \text{tener 5000 pesos}\end{aligned}$$

y la matriz de transición estará dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

El coeficiente de la primera fila, primera columna, indica que si usted llegó a perderlo todo, entonces con probabilidad igual a 1, se queda en el mismo estado (pues es forzado a retirarse). De igual manera, en la última fila, última columna, hemos representado el hecho que si usted gana 5 mil pesos, entonces se retira (implicando que no puede pasar a otro estado).

Se deja como ejercicio calcular la probabilidad, si se comenzó con 2 mil pesos, de perderlo todo en exactamente 6 jugadas. En la próxima sección introduciremos los conceptos para poder calcular la probabilidad de obtener los 5 mil pesos y retirarse o la probabilidad de perderlo todo.

### 4.3 Clasificación de estados

Considere una cadena de Markov  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\alpha$  un estado de los posibles a tomar por las variables aleatorias  $x_k$ . Este estado se dice que es *absorbente* si para cualquier otro estado  $\beta$  se tiene

$$\mathbb{P}[x_{k+1} = \beta \mid x_k = \alpha] = \mathbb{P}[x_1 = \beta \mid x_0 = \alpha] = 0,$$

lo que equivale a

$$\mathbb{P}[x_1 = \alpha \mid x_0 = \alpha] = 1.$$

El *tiempo de retorno* al estado  $\alpha$  será la variable aleatoria

$$T_\alpha := \min\{k \geq 1 : x_k = \alpha\},$$

la cual indica el tiempo mínimo que demora la cadena para caer en el estado  $\alpha$ . Por convención, diremos que si la variable aleatoria no alcanza jamás el estado  $\alpha$ , entonces  $T_\alpha = +\infty$ .

Si el conjunto de estados es  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , dado un estado  $\alpha_j$  al inicio, la probabilidad de que en el futuro la cadena esté en un estado  $\alpha_i$  la expresaremos por

$$\rho_{i,j} := \mathbb{P}[T_{\alpha_i} < +\infty \mid x_0 = \alpha_j],$$

y notaremos

$$\gamma_i := \mathbb{P}[T_{\alpha_i} < +\infty \mid x_0 = \alpha_i] = \rho_{i,i},$$

la probabilidad de volver al estado  $\alpha_i$  si se ha comenzado en  $\alpha_i$ .

En caso de que  $\alpha_j$  sea un estado absorbente, entonces para todo estado  $i$  distinto de  $j$  se tiene  $\rho_{i,j} = 0$  ya que a partir de  $\alpha_j$  la probabilidad de pasar a otro estado es nula. Por otro lado, si se está en un estado absorbente  $\alpha_j$ , la probabilidad de que en la etapa siguiente se esté en el mismo estado es uno, y por lo tanto,  $\gamma_j = 1$ .

Un estado  $\alpha_i$  se dice *recurrente* si

$$\gamma_i = 1$$

lo que nos dice que casi seguramente a partir de  $\alpha_i$  se vuelve a  $\alpha_i$  en tiempo finito. De esta forma, hemos visto que todo estado absorbente es recurrente, ya que a partir de un estado absorbente se vuelve a él en una etapa con probabilidad uno. Si un estado  $\alpha_i$  no es recurrente, se dice que es *transiente*, es decir, si  $0 \leq \gamma_i < 1$ .

Si llegase a existir un estado absorbente  $\alpha_i$ , no es difícil probar que si la probabilidad de ir, en una etapa, de otro estado  $\alpha_j$  a  $\alpha_i$  es positiva (i.e.  $\mathbb{P}[x_1 = \alpha_i \mid x_0 = \alpha_j] = P_{i,j} > 0$ ), entonces,  $\alpha_j$  es un estado transiente. Esto proviene del hecho que al ser  $\alpha_i$  absorbente, se tiene la siguiente inclusión de eventos

$$[x_1 = \alpha_i \mid x_0 = \alpha_j] \subseteq [T_{\alpha_j} = +\infty \mid x_0 = \alpha_j],$$

puesto que si se llega al estado  $\alpha_i$ , nos quedaremos siempre ahí y, por lo tanto, el tiempo de retorno a  $\alpha_j$  es infinito. Dada la anterior inclusión, obtendremos

$$\mathbb{P}[x_1 = \alpha_i \mid x_0 = \alpha_j] = P_{i,j} \leq \mathbb{P}[T_{\alpha_j} = +\infty \mid x_0 = \alpha_j]$$

y utilizando  $P_{i,j} > 0$ , concluimos

$$\gamma_j = \mathbb{P}[T_{\alpha_j} < +\infty \mid x_0 = \alpha_j] = 1 - \mathbb{P}[T_{\alpha_j} = +\infty \mid x_0 = \alpha_j] \leq 1 - P_{i,j} < 1$$

probando que  $\alpha_j$  es transiente.

**Ejercicio 4.13.** Demuestre que un estado  $\alpha_j$  es transiente, si la probabilidad de ir a un estado absorbente  $\alpha_i$  en una cantidad  $k$  de etapas es positiva. Es decir,

$$(4.10) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_i \text{ absorbente} \\ P_{i,j}^k > 0 \\ \text{para algún } k \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_j < 1.$$

Para ello, considere la inclusión de eventos

$$[x_k = \alpha_i \mid x_0 = \alpha_j] \subseteq [T_{\alpha_j} = +\infty \mid x_0 = \alpha_j].$$

Volvamos al ejemplo del juego de tenis introducido en la Sección 4.2.2. Si el juego se encuentra igualado, calculemos la probabilidad de que cada uno de los jugadores lo gane.

A partir, entonces, de  $x_0 = I$ , calculemos la probabilidad de que el jugador  $A$  gane. Según la notación que ya hemos introducido, esto se reduce a calcular

$$\mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I],$$

donde  $T_{G_A}$  es la variable aleatoria que representa la primera etapa en la cual se caerá en el estado  $G_A$ .

Si llamamos  $p_i^A$  a la probabilidad del evento  $[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = \alpha_i]$ , se obtiene directamente que  $p_1^A = 1$ , pues el estado  $\alpha_1 = G_A$  es absorbente. Por la misma razón,  $p_5^A = 0$  (el estado  $\alpha_5 = G_B$  es absorbente). Calculemos ahora  $p_2^A$ ,  $p_3^A$  y  $p_4^A$ , comenzando con

$$p_2^A = \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A].$$

Dado que  $x_0 = V_A$ , hay sólo dos posibilidades para  $x_1$ . Estas son  $G_A$  ó  $I$ , por lo tanto,

$$p_2^A = \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty, x_1 = G_A \mid x_0 = V_A] + \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty, x_1 = I \mid x_0 = V_A],$$

y así

$$\begin{aligned} p_2^A &= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A, x_1 = G_A] \mathbb{P}[x_1 = G_A \mid x_0 = V_A] \\ &\quad + \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A, x_1 = I] \mathbb{P}[x_1 = I \mid x_0 = V_A]. \end{aligned}$$

Ya que se trata de una cadena de Markov, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A, x_1 = G_A] &= \\ \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_1 = G_A] &= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = G_A] = p_1^A; \\ \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A, x_1 = I] &= \\ \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_1 = I] &= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I] = p_3^A, \end{aligned}$$

y por lo tanto, dado que  $p_1^A = 1$ , se llega a

$$p_2^A = p + p_3^A p.$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se tendrá

$$\begin{aligned}
p_3^A &= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I] \\
&= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_1 = V_A] \mathbb{P}[x_1 = V_A \mid x_0 = I] \\
&\quad + \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_1 = V_B] \mathbb{P}[x_1 = V_B \mid x_0 = I] \\
&= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_A] \mathbb{P}[x_1 = V_A \mid x_0 = I] \\
&\quad + \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = V_B] \mathbb{P}[x_1 = V_B \mid x_0 = I] = p_2^A p + p_4^A q.
\end{aligned}$$

Por último, se deja propuesto obtener, utilizando igual razonamiento, que  $p_4^A = \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = G_B]$  viene dado por

$$p_4^A = p_3^A p.$$

De esta forma, para los valores  $p_2^A$ ,  $p_3^A$  y  $p_4^A$  tenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned}
p_2^A &= p + qp_3^A \\
p_3^A &= p_2^A p + p_4^A q \\
p_4^A &= p_3^A p,
\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}
p_2^A &= \frac{p(1 - pq)}{1 - 2pq} \\
p_3^A &= \frac{p^2}{1 - 2pq} \\
p_4^A &= \frac{p^3}{1 - 2pq}.
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio mostrar que los valores anteriores son positivos y menores estrictos que uno. Esto se obtendrá al utilizar la igualdad  $p = 1 - q$ .

Si llamamos  $p_i^B$  a la probabilidad del evento  $[T_{G_B} < +\infty \mid x_0 = \alpha_i]$ , lo que representa que el jugador  $B$  gane si el juego se encuentra en el estado  $\alpha_i$ , se obtiene,



replicando los cálculos anteriores,

$$\begin{aligned} p_1^B &= 0 \\ p_2^B &= \frac{q^3}{1-2pq} \\ p_3^B &= \frac{q^2}{1-2pq} \\ p_4^B &= \frac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ p_5^B &= 1. \end{aligned}$$

Ahora podemos responder la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que uno de los dos jugadores gane el juego si éste se encuentra igualado?. De hecho, si el juego se encuentra igualado (i.e.  $x_0 = I = \alpha_3$ ) se tiene que la probabilidad de que el jugador  $A$  gane es  $p_3^A = p^2/(1-2pq)$ . Por otro lado, la probabilidad de que el jugador  $B$  gane es  $p_3^B = q^2/(1-2pq)$ . Así, la probabilidad de que uno de los jugadores gane, dado que el juego se encuentra igualado, es

$$\mathbb{P}[(T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I) \cup (T_{G_B} < +\infty \mid x_0 = I)].$$

Ya que los eventos  $[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I]$  y  $[T_{G_B} < +\infty \mid x_0 = I]$  son disjuntos, se tiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[(T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I) \cup (T_{G_B} < +\infty \mid x_0 = I)] \\ &= \mathbb{P}[T_{G_A} < +\infty \mid x_0 = I] + \mathbb{P}[T_{G_B} < +\infty \mid x_0 = I] = p_3^A + p_3^B, \end{aligned}$$

lo que resulta

$$p_3^A + p_3^B = \frac{p^2}{1-2pq} + \frac{q^2}{1-2pq} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{1-2pq} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{1-2pq} = 1.$$

Es decir, si el juego se encuentra igualado, con probabilidad igual a uno, éste va a finalizar, independiente del valor de la probabilidad  $p$  (y por ende  $q$ ).

**Ejercicio 4.14.** Si el juego se encuentra en ventaja para uno de los dos jugadores, muestre que la probabilidad de que éste finalice es igual a uno.

**Ejercicio 4.15.** Muestre que los estados  $I$ ,  $V_A$  y  $V_B$ , son estados transientes.

**Ejercicio 4.16.** Aplique el mismo procedimiento para, en el ejemplo de las apuestas introducido en la Sección 4.2.3, calcular la probabilidad de perderlo todo (llegar al estado absorbente  $\alpha_1$  en tiempo finito) si se llegó al casino con dos mil pesos ( $x_0 = \alpha_3$ ). Es decir, si se define  $p_i = \mathbb{P}[T_{\alpha_1} < +\infty \mid x_0 = \alpha_i]$ , establezca el sistema de ecuaciones, de incógnitas  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  y  $p_6$ , y pruebe que  $p_3$  está dado por

$$p_3 = \frac{q^2}{1-2pq},$$

donde  $p \in ]0, 1[$  es la probabilidad de ganar una mano y  $q = 1 - p$ , de perderla.

Para un estado  $\alpha_i$ , definamos ahora una nueva variable aleatoria dada por

$$N_{\alpha_i} := \sum_{k \geq 0} \mathbb{I}_{x_k = \alpha_i},$$

donde

$$\mathbb{I}_{x_k = \alpha_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k = \alpha_i \\ 0 & \text{si } x_k \neq \alpha_i. \end{cases}$$

La variable aleatoria  $N_{\alpha_i}$  nos indica la cantidad de veces (un número aleatorio) que la cadena cae en el estado  $\alpha_i$  y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}[N_{\alpha_i} \geq 1 \mid x_0 = \alpha_j] = \mathbb{P}[T_{\alpha_i} < +\infty \mid x_0 = \alpha_j] = \rho_{i,j}.$$

Obtengamos una expresión para la probabilidad, dado dos estados  $\alpha_j$  y  $\alpha_i$ , de que a partir de  $\alpha_j$  la cadena esté en el estado  $\alpha_i$  al menos dos veces. Tal evento es  $[N_{\alpha_i} \geq 2 \mid x_0 = \alpha_j]$  el cual es equivalente al evento: *comenzando del estado  $\alpha_j$  ir al estado  $\alpha_i$  en una cantidad finita de etapas y, a partir del estado  $\alpha_i$ , volver al estado  $\alpha_i$  en una cantidad finita de instantes*, lo que escribimos

$$\begin{aligned} & [\exists k' > k \geq 1 \text{ tal que } x_{k'} = x_k = \alpha_i \mid x_0 = \alpha_j] \\ &= [T_{\alpha_i} < +\infty \mid x_0 = \alpha_j] \cap [T_{\alpha_i} < +\infty \mid x_0 = \alpha_i]. \end{aligned}$$

Como se trata de una cadena de Markov, los dos eventos escritos son independientes, obteniéndose

$$\mathbb{P}[N_{\alpha_i} \geq 2 \mid x_0 = \alpha_j] = \rho_{i,j} \gamma_i.$$

Inductivamente, podemos probar que

$$\mathbb{P}[N_{\alpha_i} \geq k \mid x_0 = \alpha_j] = \rho_{i,j} \gamma_i^{k-1} \quad \forall k \geq 1,$$

es decir, la probabilidad de estar en el estado  $\alpha_i$ , al menos  $k$  veces a partir del estado  $\alpha_j$ , es igual a la probabilidad de ir a  $\alpha_i$  a partir de  $\alpha_j$  al menos una vez, por la probabilidad de ir de  $\alpha_i$  a  $\alpha_i$  una cantidad de al menos  $k-1$  veces.

Con lo anterior, podemos calcular la probabilidad de estar exactamente  $k$  veces en un estado  $\alpha_i$  a partir de un estado  $\alpha_j$ . Esto es el evento  $[N_{\alpha_i} = k \mid x_0 = \alpha_j]$ . De hecho, dado que

$$[N_{\alpha_i} \geq k+1 \mid x_0 = \alpha_j] \cup [N_{\alpha_i} = k \mid x_0 = \alpha_j] = [N_{\alpha_i} \geq k \mid x_0 = \alpha_j]$$

y, observando que la primera es una unión disjunta, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_{\alpha_i} = k \mid x_0 = \alpha_j] &= \mathbb{P}[N_{\alpha_i} \geq k \mid x_0 = \alpha_j] - \mathbb{P}[N_{\alpha_i} \geq k+1 \mid x_0 = \alpha_j] \\ (4.11) \quad &= \rho_{i,j} \gamma_i^{k-1} - \rho_{i,j} \gamma_i^k = \rho_{i,j} \gamma_i^{k-1} (1 - \gamma_i). \end{aligned}$$

Para un estado transiente  $\alpha_i$  (i.e.  $0 \leq \gamma_i < 1$ ) y un estado  $\alpha_j$ , calculemos la esperanza de la variable aleatoria  $N_{\alpha_i}$ , dado que  $x_0 = \alpha_j$ ; es decir, el valor esperado del número de veces que la cadena  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  estará en el estado  $\alpha_i$ , sabiendo que comenzó en el estado  $\alpha_j$ . Dicha expresión es la que se da en el siguiente teorema

**Teorema 4.2.** *Si el estado  $\alpha_i$  es transiente, entonces*

$$\mathbb{E}(N_{\alpha_i} \mid x_0 = \alpha_j) = \frac{\rho_{i,j}}{1 - \gamma_i} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Demostración.** Este resultado es una aplicación del cálculo de series. Primero, mostremos que si  $p \in [0, 1[$ , entonces

$$\sum_{k \geq 0} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

Definamos por  $S_N$  la serie anterior hasta  $N$ , es decir,

$$S_N := \sum_{k=0}^N kp^k$$

y recordemos que la serie geométrica  $\sum_{k=0}^N p^k$  tiene por valor

$$\sum_{k=0}^N p^k = \frac{1 - p^{N+1}}{1 - p}.$$

Si denotamos por  $G_N$  a la serie geométrica anterior, observe que

$$G_N + pS_N = 1 + S_N + Np^{N+1},$$

y, por lo tanto,

$$(4.12) \quad S_N = \frac{G_N - 1 - Np^{N+1}}{1 - p} = \frac{1 - p^{N+1}}{(1 - p)^2} - \frac{1}{1 - p} - \frac{Np^{N+1}}{1 - p}.$$

Como  $p \in [0, 1[$  se tiene que  $p^{N+1}$  y  $Np^{N+1}$  tienden a cero cuando  $N \rightarrow +\infty$ . Pasando al límite en (4.12) para obtener la expresión de la serie  $\sum_{k \geq 0} kp^k$  se obtiene, entonces

$$\sum_{k \geq 0} kp^k = \frac{1}{(1 - p)^2} - \frac{1}{1 - p} = \frac{p}{(1 - p)^2}.$$

Utilicemos el resultado anterior para calcular la esperanza de  $N_{\alpha_i}$  dado  $x_0 = \alpha_j$ . Ésta, por definición, será

$$\mathbb{E}(N_{\alpha_i} \mid x_0 = \alpha_j) = \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}[N_{\alpha_i} = k \mid x_0 = \alpha_j].$$

De la expresión (4.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{\alpha_i} \mid x_0 = \alpha_j) &= \sum_{k \geq 0} k \rho_{i,j} \gamma_i^{k-1} (1 - \gamma_i) = \rho_{i,j} (1 - \gamma_i) \sum_{k \geq 0} k \gamma_i^{k-1} \\ &= \rho_{i,j} \frac{(1 - \gamma_i)}{\gamma_i} \sum_{k \geq 0} k \gamma_i^k, \end{aligned}$$

y puesto que  $\gamma_i \in [0, 1[$  se tendrá

$$\sum_{k \geq 0} k \gamma_i^k = \frac{\gamma_i}{(1 - \gamma_i)^2},$$

concluyendo

$$\mathbb{E}(N_{\alpha_i} \mid x_0 = \alpha_j) = \frac{\rho_{i,j}}{1 - \gamma_i}.$$

□

El resultado anterior nos dice que a partir de cualquier estado  $\alpha_j$ , la cadena de Markov tiene una esperanza de pasar por un estado transiente un número finito de veces.

En el ejemplo del juego de tenis, se podría haber establecido que el juego va a terminar (lo gana uno de los jugadores) si éste se encuentra igualado, utilizando el Teorema 4.2. De hecho, éste establece que la esperanza del número de pasadas por un estado transiente es un número finito de veces. Utilizando la condición (4.10) es posible probar que los estados  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$  (que uno de los jugadores esté en ventaja o que el juego se encuentre igualado) son estados transientes y, por lo tanto, lo dicho anteriormente se puede interpretar como que el juego, en algún momento, debiera terminar. De igual manera, en el ejemplo de las apuestas, se puede deducir que se espera terminar el juego en algún momento, demostrando que los estados  $\alpha_i$  con  $i = 2, 3, 4, 5$  (los que representan estar aún en condiciones de jugar) son transientes y, por lo tanto, se espera pasar por ellos sólo en un número finito de ocasiones.

**Ejercicio 4.17.** Calcule la esperanza  $\mathbb{E}(N_{\alpha_5} \mid x_0 = \alpha_2)$  en el juego de las apuestas, es decir, la esperanza del número de veces que se tendrá cuatro mil pesos si se comenzó con mil.

#### 4.4 Evolución genética

Para culminar el capítulo aplicando los conceptos y resultados ya introducidos, estudiemos un modelo genético de reproducción aleatoria de una población aislada, en el transcurso del tiempo. El componente genético de la población se supondrá constante e igual a  $2N$  genes, donde  $N$  es un número natural mayor a uno. Estos genes son sólo de dos tipos que denominaremos  $A$  y  $a$ .

En la primera generación (en el instante  $k = 0$ ) la cantidad de genes de tipo  $a$  es  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$ , por lo que al comienzo hay coexistencia de ambos tipos de genes, ya que habrá  $x_0 > 0$  genes de tipo  $a$  y  $2N - x_0 > 0$  genes de tipo  $A$ .

Definiremos la variable aleatoria  $x_k$  como el número de genes de tipo  $a$  en la generación  $k$ -ésima<sup>4</sup>.

Supongamos que la evolución de genes de tipo  $a$  de una generación a la siguiente seguirá una *ley binomial* (ver [15, 22] para una descripción/deducción de tal ley).

---

<sup>4</sup>Observe que el número de genes de tipo  $A$  en la generación  $k$ -ésima se representa por la variable aleatoria  $y_k := 2N - x_k$ .

Esto es, para  $i, j \in \{0, 1, \dots, 2N\}$ , la probabilidad de que el número de genes de tipo  $a$  de la población en la generación  $(k+1)$ -ésima sea igual a  $i$ , dado que en la generación  $k$ -ésima hay  $j$  genes del mismo tipo viene dada por

$$(4.13) \quad \mathbb{P}[x_{k+1} = i \mid x_k = j] = \binom{2N}{i} \left(\frac{j}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-i} =: P_{i,j},$$

donde  $\binom{2N}{i}$  es el *coeficiente binomial*  $2N$  sobre  $i$  que vale

$$\binom{2N}{i} = \frac{(2N)!}{(2N-i)!i!},$$

y se asume la convención de que el cero a la potencia nula es igual a uno.

Así, la sucesión de variables aleatorias  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una cadena de Markov homogénea, cuya matriz de transición viene dada por la ley binomial (4.13). Esta descripción de evolución genética es conocida como el modelo de Wright-Fisher en honor al genetista norteamericano Sewall Wright (1889-1988) y al biólogo inglés Ronald Fisher (1809-1962), quienes propusieron el modelo al comienzo de los años 30. También esta representación recibe el nombre de modelo *haploide* de reproducción donde no hay mutación, ni selección, ni inmigración. Cabe hacer notar que hemos supuesto el hecho de que los descendientes reemplazan inmediatamente a sus padres en el paso de una generación a otra. Un desarrollo más profundo de este ejemplo se puede encontrar en [13].

**Ejercicio 4.18.** Considere  $N = 2$  y escriba la matriz de transición (de dimensión  $5 \times 5$ ). Luego, si se sabe que  $x_0 = 2$ , es decir, al inicio hay dos genes de tipo  $a$ , calcule, con ayuda de una planilla de cálculo o un programa matemático, la probabilidad de que al cabo de cuatro generaciones, existan sólo genes de tipo  $A$ .

Para el desarrollo que se desea realizar utilizaremos una propiedad de números combinatoriales, la cual se pide demostrar en el próximo ejercicio.

**Ejercicio 4.19.** Demuestre que para todo  $n \geq 1$  y para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  se tiene

$$(4.14) \quad \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} \left(\frac{j}{n}\right)^i \left(\frac{n-j}{n}\right)^{n-i} = j.$$

Para probar lo anterior, puede utilizar la siguiente propiedad

$$i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}.$$

Utilicemos (4.14) para calcular el valor esperado o esperanza de las variable aleatoria  $x_k$ .

De la definición de esperanza se tiene que

$$\mathbb{E}(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{2N} i \mathbb{P}[x_{k+1} = i],$$

y gracias al Teorema de las probabilidades totales (4.1), escribimos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_{k+1} = i] &= \sum_{j=0}^{2N} \mathbb{P}[x_{k+1} = i | x_k = j] \mathbb{P}[x_k = j] = \sum_{j=0}^{2N} P_{i,j} \mathbb{P}[x_k = j] \\ &= \sum_{j=0}^{2N} \mathbb{P}[x_k = j] \binom{2N}{i} \left(\frac{j}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{2N} i \sum_{j=0}^{2N} \mathbb{P}[x_k = j] \binom{2N}{i} \left(\frac{j}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-i} \\ &= \sum_{j=0}^{2N} \mathbb{P}[x_k = j] \sum_{i=0}^{2N} i \binom{2N}{i} \left(\frac{j}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-i}. \end{aligned}$$

De la expresión (4.14), obtenemos

$$\sum_{i=0}^{2N} i \binom{2N}{i} \left(\frac{j}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-i} = j,$$

concluyendo, entonces

$$\mathbb{E}(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{2N} j \mathbb{P}[x_k = j] = \mathbb{E}(x_k).$$

Lo anterior nos dice que la esperanza de nuestra cadena de Markov es constante en el transcurso del tiempo. Si se conoce la realización del primer evento, es decir, se conoce la composición genética de la población al principio y es  $x_0$  (número de genes de tipo  $a$ ), entonces se tendrá que

$$\mathbb{E}(x_k) = x_0 \quad \forall k \geq 1,$$

lo que equivale a decir que la esperanza de la composición genética a lo largo del tiempo queda determinada por la composición al inicio. Lo anterior se conoce como la *ley de Hardy-Weinberg* en honor al matemático inglés Godfrey Hardy (1877-1947) y al físico alemán Wilhelm Weinberg (1862-1937). Esta ley o principio establece que la composición genética de una población permanece en equilibrio, mientras no actúe la selección natural ni ningún otro factor y, además, no se produzca ninguna mutación.

Al calcular la esperanza de nuestra cadena de Markov, se podría deducir que una población aislada (que es el caso en cuestión) no evoluciona desde el punto de vista

genético (ya que la esperanza de la composición genética es siempre la misma). Sin embargo, veremos que tal deducción es errónea.

Considere un estado  $j$  (número de genes de tipo  $a$ ) en el conjunto  $\{1, 2, \dots, 2N - 1\}$ . Esto indica que los genes de tipo  $a$  y  $A$  coexisten. Para  $i \in \{0, 1, \dots, 2N\}$ , dado que la probabilidad de pasar de  $j$  a  $a$  es estrictamente positiva (ver (4.13)), se tiene que a partir de un estado donde hay coexistencia se puede pasar a cualquier otro estado en una sola etapa.

Esto no sucede si en una etapa se tiene que la cantidad de genes tipo  $a$  es 0 ó  $2N$ . En tales situaciones no hay coexistencia de genes, es decir, uno de los dos tipos ha desaparecido. Además, si  $j = 0$  ó  $j = 2N$ , se tiene que la probabilidad para pasar de  $j$  a cualquier otro estado  $i$  es cero, pues de la expresión (4.13) se observa

$$\mathbb{P}[x_{k+1} = i \mid x_k = 0] = \mathbb{P}[x_{k+1} = i \mid x_k = 2N] = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 2N\}.$$

Estos estados son entonces, absorbentes y, por la relación (4.10), se tiene que los estados  $\{1, 2, \dots, 2N - 1\}$  son transientes.

En general, requerir la existencia de un estado absorbente para probar que un estado es transiente en ocasiones no es necesario. En nuestro ejemplo de evolución genética esto nos bastará, ya que sabemos existen dos estados absorbentes ( $i = 0$  e  $i = 2N$ ) y dado que en los estados  $j \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$  hay una probabilidad positiva de ir a los estados absorbentes, concluimos que los elementos del conjunto anterior son transientes. Así, el Teorema 4.2 nos dice que se pasará (en valor esperado) por estos estados sólo un número finito de veces. Dado que los estados 0 y  $2N$  son absorbentes, una vez que se cae en ellos, con probabilidad igual a uno, el estado seguirá siendo el mismo.

En resumen, dada una composición genética  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$  de la población al principio, como conclusión del Teorema 4.2, obtenemos que al cabo de un número finito de generaciones se estará en el estado 0 ó  $2N$ , lo que significa que algún tipo de gen, ya sea el de tipo  $a$  o  $A$ , habrá desaparecido.

Este simple modelo nos muestra, entonces, que una población aislada termina por perder su variabilidad genética, ya que casi seguramente en un número finito de generaciones todos los genes serán del mismo tipo.

#### 4.5 Relación con contenidos de Educación Media

**La definición de probabilidad**, en los cursos más avanzados de Educación Media, es por sí un contenido que debe ser entregado de manera contextualizada a los alumnos. En la monografía de esta misma colección [19] se proveen diversas herramientas para este efecto. Complementariamente, será posible motivar la introducción de este concepto mediante el proceso de modelación realizado, por ejemplo, con el modelo que trata la evolución del Fenómeno del Niño o de la reserva forestal descritos al principio del capítulo.

La introducción de cadenas de Markov simples, servirá también para contextualizar el cálculo de probabilidades condicionales. Para ello es posible tratar en el aula el

ejemplo de la evolución de un juego de tenis. Éste, ha sido tomado de la monografía [4], la cual está orientada precisamente a estudiantes de Enseñanza Media y donde es posible encontrar muchos otros ejemplos.

En general, los paseos aleatorios serán un fenómeno en los cuales los estudiantes comprenderán la naturaleza no determinista, sin necesidad de profundizar en la teoría de probabilidades. Observe que los ejemplos de la difusión de gases, juego de tenis y de apuestas, son fenómenos que entran en la clase de paseos aleatorios.

**La resolución de sistemas de ecuaciones lineales** ( $P\pi = \pi$ ), sin la escritura matricial, puede ser motivada como el cálculo de equilibrios de un fenómeno en evolución aleatorio. En el ejemplo de la reserva forestal con dos o más especies, o de la difusión de gases, si se supone que la cantidad de estados posibles no es muy grande, la deducción de los modelos, así como el cálculo de equilibrios, es un procedimiento que es factible de realizar con sus alumnos.

**La modelación** de fenómenos que evolucionan aleatoriamente, haciendo algunas (en ocasiones muchas) suposiciones, se puede presentar como una cadena de Markov. Para la construcción de las matrices de transición, se puede proceder como se hizo al inicio del capítulo. Es decir, a partir de datos que dan cuenta de la transición de un estado a otro, como en el Fenómeno del Niño, calcular las probabilidades de transición. El ejemplo de la lluvia (mostrado en el Ejercicio 4.9), o de algún otro fenómeno natural, se presta para ello, pues es fácil encontrar información estadística sobre sus ocurrencias.



## Bibliografía



- [1] Aguayo J., *Cálculo Integral y series*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [2] Bremaud P., *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, Texts in applied mathematics; 31, Springer, Nueva York, 1999.
- [3] Caswell H., *Matrix population models*, Sinauer Associates, Sunderland, MA, 2000, 2nd Edition.
- [4] Dartnell P., *Paseos al azar*, Núcleo Milenio de Información y Aleatoriedad ICM-P04-069-F, Universidad de Chile - Producciones gráficas Ltda., Santiago, 2006.
- [5] De Lara M., Doyen L., *Sustainable management of natural resource: mathematical models and methods*, Springer, Nueva York, 2008.
- [6] de Vries G., Hillen T., Lewis M., Müller J., and Schönfisch B., *A course in mathematical biology*, volume 12 of *Mathematical Modeling and Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006. Quantitative modeling with mathematical and computational methods.
- [7] Durrett R., *Essentials of stochastic processes*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [8] Flores-Bazán F., *Optimización lineal: Una mirada introductoria*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [9] Gil O., *Excursiones por el álgebra lineal y sus aplicaciones*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [10] González J., *Modelos de tiempo discreto de poblaciones sin estructura*, Ecología Matemática Tomo I, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 1999.
- [11] González J., *Modelos de tiempo discreto con estructura etárea, genética y espacial*, Ecología Matemática Tomo II, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2001.
- [12] Hale J., *Ordinary differential equations*, Pure and applied mathematics; 21, Wiley-Interscience, Nueva York, 1969.
- [13] Istas J., *Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant*, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [14] Lewin R., *La teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [15] Lladser M., *Variables aleatorias y simulación estocástica*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [16] Lobry C., *Modeles deterministes en dynamique des populations*, Ecole CIMPA, Ouagadougou - Burkina Faso, 1998.
- [17] Moreno E., Ramírez H., *Grafos: Fundamentos y algoritmos*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [18] Osses A., *Análisis numérico*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [19] Romagnoli P., *Probabilidades doctas: Con discos, árboles bolitas y urnas*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [20] Sastry S., *Nonlinear systems: analysis, stability and control*, Interdisciplinary applied mathematics; 10, Springer Verlag, Nueva York, 1999.
- [21] Simmons G., *Ecuaciones diferenciales ordinarias: con aplicaciones y notas históricas*, Mc Graw-Hill, México, 1977.
- [22] Lacourly N., *Estadística Multivariada*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [23] Walter W., *Ordinary differential equations*, volume 182 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1998. Translated from the sixth German (1996) edition by Russell Thompson, Readings in Mathematics.



## Índice de figuras



1.1. Trayectorias a tiempo continuo y discreto con $\Delta t = 0,5$ día.	23
1.2. Trayectorias a tiempo continuo y discreto con $\Delta t = 2$ días.	24
1.3. Puntos fijos.	29
1.4. Una función sin puntos fijos.	30
1.5. Función continua que satisface propiedad de invarianza.	34
1.6. Trayectoria convergente en el modelo logístico discreto.	41
1.7. Trayectoria con ciclo de periodo 2.	42
1.8. Trayectoria con ciclo de periodo 4.	42
1.9. Trayectoria con ciclo de periodo 8.	43
1.10. Trayectoria caótica.	44
1.11. Diferencia entre trayectorias caóticas.	44
1.12. Trayectorias de la evolución entre Romeo y Julieta.	47
1.13. Conjunto convexo.	49
2.1. Función logística.	67
2.2. Trayectorias de la ecuación logística.	76
2.3. Gráfica de funciones logística y lineal.	84
2.4. Función representando efecto Allee.	87
2.5. Equilibrio en modelo de crecimiento económico.	89
3.1. Trayectorias oscilatorias.	94
3.2. Esquema para la caída libre de un objeto.	96
3.3. Propiedad de invarianza.	103
3.4. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios reales.	111
3.5. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios iguales, no diagonalizable.	112
3.6. Diagramas de fase asociados a una matriz con valores propios complejos.	113
3.7. Diagramas de fase asociados a sistemas no lineales de valores propios reales.	117
3.8. Diagramas de fase asociados a sistemas no lineales de valores propios complejos.	117
	175

3.9. Gráficas de las funciones $F$ y $G$ en el modelo de Lotka-Volterra.	120
3.10. Diagrama de fase para el modelo de Lotka-Volterra.	121
3.11. Función de tipo Monod.	123
3.12. Esquema de un quimioestado.	124
3.13. Equilibrios $s_1^*$ y $s_2^*$ correspondientes a dos volúmenes $V_1 > V_2$ .	127
3.14. Equilibrio $D = Q/V = \mu_1(s^*)$ en presencia de dos especies.	129
3.15. Descomposición de la fuerza gravitacional que actúa sobre un péndulo simple.	132
3.16. Esquema del lanzamiento de un proyectil.	135
4.1. Grafo de transiciones en el Fenómeno del Niño.	140
4.2. Grafo de transiciones en el bosque silvestre.	141
4.3. Grafo de transiciones de un paseo aleatorio.	147
4.4. Esquema de un paseo aleatorio en dos dimensiones.	148
4.5. Grafo de transiciones en un juego de tenis.	158

# Índice de nombres propios



Banach, 32	Lipschitz, 30, 100, 102
Bendixson, 107	Lotka, 93
Brouwer, 49	Lyapunov, 107
Cauchy, 100	Malthus, 66
Constantino, 44	Markov, 146
Coullet, 44	Monod, 123
Cushing, 44	Nash, 49
Dennis, 44	Peano, 100
Desharnais, 44	Picard, 32, 100
Ehrenfest, 156	Poincaré, 107
Feigenbaum, 44	Shakespeare, 45
Fenómeno del Niño, 139	Solow, 89
Fibonacci, 51	Strogatz, 45
Fisher, 169	Swan, 89
Galileo Galilei, 131	Tresser, 44
Hardy, 170	Verhulst, 68
Kakutani, 49	Volterra, 93
Leslie, 59	Weinberg, 170
Lindelöf, 100	Wright, 169



## Índice de términos



- cadena de Markov, 146
- clase  $C^1$ , 51, 102
- coeficiente binomial, 157, 169
- cuota, 85
- derivada, 66
- diagrama de fase, 108, 109
- equilibrio, 81, 104
- esperanza, 146
- estable
  - globalmente, 34, 49, 81, 105, 126
  - localmente, 34, 52, 81, 105, 106
- estado
  - absorbente, 161, 171
  - recurrente, 162
  - transiente, 162
- función
  - de Lyapunov, 107
  - Monod, 123
- invariante, 39
- Jacobiano, 102
- ley binomial, 168
- Lipschitz, 30, 102
- matriz
  - de Leslie, 59
  - de transición, 139, 149
  - Jacobiana, 50, 53, 101, 107, 125
- modelamiento, 27
- modelo
  - de competencia por un mismo recurso, 121
  - de crecimiento neoclásico, 89
  - de Lotka-Volterra, 93, 104, 118
  - de Wright-Fisher, 169
  - lineal, 69
  - logístico, 79, 81, 84
- órbitas caóticas, 43
- Principio de
  - exclusión competitiva, 130
- probabilidad de transición, 149
- punto fijo, 28, 31, 46, 100
- quimiostato, 123
- sistema diferencial, 98
- solución
  - global, 77, 100
  - local, 77, 100
- sucesión, 27
  - de Cauchy, 32
- tender a  $+\infty$ , 28
- teorema
  - de Cauchy-Lipschitz, 100
  - de las probabilidades totales, 145
  - de Peano, 100
  - de Poincaré-Bendixson, 107
  - del valor medio, 30, 34, 78, 83
- tiempo de retorno, 161
- valores propios, 49–51, 54, 107, 109, 126