





## Cálculo Integral y Series

**ISBN:** 978-956-306-067-6

**Registro de Propiedad Intelectual:** 200.523

**Colección:** Herramientas para la formación de profesores de matemáticas.

**Diseño:** Jessica Jure de la Cerda

**Diseño de Ilustraciones:** Cristina Felmer Plominsky, Catalina Frávega Thomas

**Diagramación:** Pedro Montealegre Barba, Francisco Santibáñez Palma

**Financiamiento:** Proyecto Fondef D05I-10211

**Datos de contacto para la adquisición de los libros:**

**Para Chile:**

1. En librerías para clientes directos.
2. Instituciones privadas directamente con:  
**Juan Carlos Sáez C.**  
Director Gerente  
Comunicaciones Noreste Ltda.  
J.C. Sáez Editor  
jcsaezc@vtr.net  
www.jcsaezeditor.blogspot.com  
Oficina: (56 2) 3260104 - (56 2) 3253148
3. Instituciones públicas o fiscales: [www.chilecompra.cl](http://www.chilecompra.cl)

**Desde el extranjero:**

1. Liberalia Ediciones: [www.liberalia.cl](http://www.liberalia.cl)
2. Librería Antártica: [www.antartica.cl](http://www.antartica.cl)
3. Argentina: Ediciones Manantial: [www.emanantial.com.ar](http://www.emanantial.com.ar)
4. Colombia: Editorial Siglo del Hombre  
Fono: (571) 3377700
5. España: Tarahumara, [tarahumara@tarahumaralibros.com](mailto:tarahumara@tarahumaralibros.com)  
Fono: (34 91) 3656221
6. México: Alejandría Distribución Bibliográfica, [alejandria@alejandrialibros.com.mx](mailto:alejandria@alejandrialibros.com.mx)  
Fono: (52 5) 556161319 - (52 5) 6167509
7. Perú: Librería La Familia, Avenida República de Chile # 661
8. Uruguay: Dolmen Ediciones del Uruguay  
Fono: 00-598-2-7124857

Cálculo Integral y Series — José Aguayo

Universidad de Concepción

[jaguayo@udec.cl](mailto:jaguayo@udec.cl)

ESTA PRIMERA EDICIÓN DE 2.000 EJEMPLARES

Se terminó de imprimir en febrero de 2011 en WORLDCOLOR CHILE S.A.

Derechos exclusivos reservados para todos los países. Prohibida su reproducción total o parcial, para uso privado o colectivo, en cualquier medio impreso o electrónico, de acuerdo a las leyes N°17.336 y 18.443 de 1985 (Propiedad intelectual). Impreso en Chile.



# CÁLCULO INTEGRAL Y SERIES

José Aguayo

Universidad de Concepción





## Editores



**Patricio Felmer**, Universidad de Chile.  
Doctor en Matemáticas, Universidad de Wisconsin-Madison,  
Estados Unidos

**Salomé Martínez**, Universidad de Chile.  
Doctora en Matemáticas, Universidad de Minnesota,  
Estados Unidos

## Comité Editorial Monografías



**Rafael Benguria**, Pontificia Universidad Católica de Chile.  
Doctor en Física, Universidad de Princeton,  
Estados Unidos

**Servet Martínez**, Universidad de Chile.  
Doctor en Matemáticas, Universidad de Paris VI,  
Francia

**Fidel Oteíza**, Universidad de Santiago de Chile.  
Doctor en Currículum e Instrucción, Universidad del Estado de Pennsylvania,  
Estados Unidos

**Dirección del Proyecto Fondef D05I-10211**  
**Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática**



**Patricio Felmer**, Director del Proyecto  
Universidad de Chile.

**Leonor Varas**, Directora Adjunta del Proyecto  
Universidad de Chile.

**Salomé Martínez**, Subdirectora de Monografías  
Universidad de Chile.

**Cristián Reyes**, Subdirector de Estudio de Casos  
Universidad de Chile.

## Presentación de la Colección



La colección de monografías que presentamos es el resultado del generoso esfuerzo de los autores, quienes han dedicado su tiempo y conocimiento a la tarea de escribir un texto de matemática. Pero este esfuerzo y generosidad no se encuentra plenamente representado en esta labor, sino que también en la enorme capacidad de aprendizaje que debieron mostrar, para entender y comprender las motivaciones y necesidades de los lectores: Futuros profesores de matemática.

Los autores, encantados una y otra vez por la matemática, sus abstracciones y aplicaciones, enfrentaron la tarea de buscar la mejor manera de traspasar ese encanto a un futuro profesor de matemática. Éste también se encanta y vibra con la matemática, pero además se apasiona con la posibilidad de explicarla, enseñarla y entregarla a los jóvenes estudiantes secundarios. Si la tarea parecía fácil en un comienzo, esta segunda dimensión puso al autor, matemático de profesión, un tremendo desafío. Tuvo que salir de su oficina a escuchar a los estudiantes de pedagogía, a los profesores, a los formadores de profesores y a sus pares. Tuvo que recibir críticas, someterse a la opinión de otros y reescribir una y otra vez su texto. Capítulos enteros resultaban inadecuados, el orden de los contenidos y de los ejemplos era inapropiado, se hacía necesario escribir una nueva versión y otra más. Conversaron con otros autores, escucharon sus opiniones, sostuvieron reuniones con los editores. Escuchar a los estudiantes de pedagogía significó, en muchos casos, realizar eventos de acercamiento, desarrollar cursos en base a la monografía, o formar parte de cursos ya establecidos. Es así que estas monografías recogen la experiencia de los autores y del equipo del proyecto, y también de formadores de profesores y estudiantes de pedagogía. Ellas son el fruto de un esfuerzo consciente y deliberado de acercamiento, de apertura de caminos, de despliegue de puentes entre mundos, muchas veces, separados por falta de comunicación y cuya unión es vital para el progreso de nuestra educación.

La colección de monografías que presentamos comprende una porción importante de los temas que usualmente encontramos en los currículos de formación de profesores de matemática de enseñanza media, pero en ningún caso pretende ser exhaustiva. Del mismo modo, se incorporan temas que sugieren nuevas formas de abordar los contenidos, con énfasis en una matemática más pertinente para el futuro profesor, la que difiere en su enfoque de la matemática para un ingeniero o para un licenciado en

matemática, por ejemplo. El formato de monografía, que aborda temas específicos con extensión moderada, les da flexibilidad para que sean usadas de muy diversas maneras, ya sea como texto de un curso, material complementario, documento básico de un seminario, tema de memoria y también como lectura personal. Su utilidad ciertamente va más allá de las aulas universitarias, pues esta colección puede convertirse en la base de una biblioteca personal del futuro profesor o profesora, puede ser usada como material de consulta por profesores en ejercicio y como texto en cursos de especialización y post-títulos. Esta colección de monografías puede ser usada en concepciones curriculares muy distintas. Es, en suma, una herramienta nueva y valiosa, que a partir de ahora estará a disposición de estudiantes de pedagogía en matemática, formadores de profesores y profesores en ejercicio.

El momento en que esta colección de monografías fue concebida, hace cuatro años, no es casual. Nuestro interés por la creación de herramientas que contribuyan a la formación de profesores de matemática coincide con un acercamiento entre matemáticos y formadores de profesores que ha estado ocurriendo en Chile y en otros lugares del mundo. Nuestra motivación nace a partir de una creciente preocupación en todos los niveles de la sociedad, que ha ido abriendo paso a una demanda social y a un interés nacional por la calidad de la educación, expresada de muy diversas formas. Esta preocupación y nuestro interés encontró eco inmediato en un grupo de matemáticos, inicialmente de la Universidad de Chile, pero que muy rápidamente fue involucrando a matemáticos de la Pontificia Universidad Católica de Chile, de la Universidad de Concepción, de la Universidad Andrés Bello, de la Universidad Federico Santa María, de la Universidad Adolfo Ibáñez, de la Universidad de La Serena y también de la Universidad de la República de Uruguay y de la Universidad de Colorado de Estados Unidos.

La matemática ha adquirido un rol central en la sociedad actual, siendo un pilar fundamental que sustenta el desarrollo en sus diversas expresiones. Constituye el crecimiento creciente de todas las disciplinas científicas, de sus aplicaciones en la tecnología y es clave en las habilidades básicas para la vida. Es así que la matemática actualmente se encuentra en el corazón del currículo escolar en el mundo y en particular en Chile. No es posible que un país que pretenda lograr un desarrollo que involucre a toda la sociedad, descuide el cultivo de la matemática o la formación de quienes tienen la misión de traspasar de generación en generación los conocimientos que la sociedad ha acumulado a lo largo de su historia.

Nuestro país vive cambios importantes en educación. Se ha llegado a la convicción que la formación de profesores es la base que nos permitirá generar los cambios cualitativos en calidad que nuestra sociedad ha impuesto. Conscientes de que la tarea formativa de los profesores de matemática y de las futuras generaciones de jóvenes es extremadamente compleja, debido a que confluyen un sinnúmero de factores y disciplinas, a través de esta colección de monografías, sus editores, autores y todos los que han participado del proyecto en cada una de sus etapas, contribuyen a esta tarea, poniendo a disposición una herramienta adicional que ahora debe tomar vida propia en los formadores, estudiantes, futuros profesores y jóvenes de nuestro país.

**Patricio Felmer y Salomé Martínez**  
**Editores**





## Agradecimientos



Agradecemos a todos quienes han hecho posible la realización de este proyecto Fondef: “Herramientas para la formación de Profesores de Matemáticas”. A Cristián Cox, quien apoyó con decisión la idea original y contribuyó de manera crucial para obtener la participación del Ministerio de Educación como institución asociada. Agradecemos a Carlos Eugenio Beca por su apoyo durante toda la realización del proyecto. A Rafael Correa, Edgar Kausel y Juan Carlos Sáez, miembros del Comité Directivo. Agradecemos a Rafael Benguria, Servet Martínez y Fidel Oteiza, miembros del Comité Editorial de la colección, quienes realizaron valiosos aportes a los textos. A Guillermo Marshall, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile y José Sánchez, entonces Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción, quienes contribuyeron de manera decisiva a lograr la integridad de la colección de 15 monografías. A Jaime San Martín, director del Centro de Modelamiento Matemático por su apoyo durante toda la realización del proyecto. Agradecemos a Víctor Campos, Ejecutivo de Proyectos de Fondef, por su colaboración y ayuda en las distintas etapas del proyecto.

Agradecemos también a Bárbara Ossandón de la Universidad de Santiago, a Jorge Ávila de la Universidad Católica Silva Henríquez, a Víctor Díaz de la Universidad de Magallanes, a Patricio Canelo de la Universidad de Playa Ancha en San Felipe y a Osvaldo Venegas y Silvia Vidal de la Universidad Católica de Temuco, quienes hicieron posible las visitas que realizamos a las carreras de pedagogía en matemática. Agradecemos a todos los evaluadores, alumnos, académicos y profesores -cuyos nombres no incluimos por ser más de una centena- quienes entregaron sugerencias, críticas y comentarios a los autores, que ayudaron a enriquecer cada uno de los textos.

Agradecemos a Marcela Lizana por su impecable aporte en todas las labores administrativas del proyecto, a Aldo Muzio por su colaboración en la etapa de evaluación, y también a Anyel Alfaro por sus contribuciones en la etapa final del proyecto y en la difusión de los logros alcanzados.

**Dirección del Proyecto**



## Índice General



<b>Prefacio</b>	17
<b>Capítulo 1: La integral</b>	19
1.1 Preparación para la integral definida	21
1.2 Sumas inferiores y sumas superiores	23
1.3 La integral definida	29
1.4 Propiedades básicas de la integral definida	33
1.5 Funciones continuas y sumas de Riemann	39
1.6 El Teorema del Valor Medio para Integrales	46
1.7 Teorema Fundamental de Cálculo	50
1.8 Reglas de integración	56
1.9 Cálculo de áreas	66
1.10 La función logaritmo	78
1.11 Integración impropia	98
<b>Capítulo 2: Aplicaciones de la Integral</b>	107
2.1 Volúmenes de figuras geométricas	110
2.2 Longitud de curvas en el plano	124
2.3 Áreas de superficies geométricas	128
2.4 Aplicaciones a la física: centro de gravedad	133
<b>Capítulo 3: Series numéricas y de potencias</b>	139
3.1 Polinomios de Taylor	139
3.2 Series numéricas	142
3.3 Series de potencias	161
<b>Apéndice</b>	173
<b>Bibliografía</b>	177
<b>Índice Analítico</b>	179



## Prefacio



Esta monografía está pensada y dirigida a los alumnos de la carrera de Pedagogía en Matemática. He intentado escribirla de manera que el lector sea capaz de descubrir el cálculo integral, sus aplicaciones y algunas extensiones. Los temas han sido tratados de manera correcta pero sin excesivo rigor, para que el formalismo no llegue a ser un obstáculo en la comprensión. He tratado también de inyectarle un grado de encantamiento a los contenidos, de manera que sirvan como antecedente para los futuros profesores de matemática. El docente que imparta esta asignatura siguiendo la monografía, puede ir mezclando la intuición con la rigurosidad que él pretenda darle.

En bibliotecas y librerías con catálogos, podemos encontrar una infinidad de libros que cubren éstos y otros temas relacionados con cálculo. Por tanto, busqué imprimirle a la monografía un toque de familiaridad en el trato de los temas, de manera que el lector se sienta partícipe de ésta.

En los últimos años ha habido muchos intentos por cambiar el curriculum tradicional de cálculo. Es así que conocemos experiencias donde la matemática, al igual que las asignaturas de química y física, ha incorporado laboratorios. En ellos se puede apreciar el protagonismo del computador, utilizando sus capacidades gráficas y sus cálculos tanto simbólicos como numéricos. Con el uso de esta metodología se pretende que el alumno, con una conducción adecuada del profesor, descubra por sí solo las características del cálculo. Pues bien, la monografía incorpora una gran cantidad de gráficos que persiguen ese mismo objetivo, pero sin perder de vista que la manipulación con lápiz y papel aún, según mi parecer, no ha sido superada en el aprendizaje de esta área de la matemática.

La integral definida es presentada como límite de sumas de Riemann, considerando las sumas superiores e inferiores en una primera instancia. Se prepara el camino para el resultado más importante del cálculo, el que fue encontrado en el siglo XVII, cuando la diferencial y la integral parecían conceptos completamente separados uno del otro. Me refiero al Teorema Fundamental del Cálculo. Posteriormente, se entregan algunas técnicas de integración para conseguir primitivas o antiderivadas de funciones dadas. Una primera aplicación de la integral, que la podemos tildar de geométrica, es el cálculo de áreas de regiones definidas por funciones. Más adelante, se muestra que este concepto también puede aplicarse a la matemática misma, definiendo nuevas funciones, que sin esta herramienta, no habría sido posible conocer en profundidad.

La segunda parte se aboca a la entrega de más aplicaciones en el ambiente geométrico. Mostraremos el interesante rol que juegan las sumas de Riemann en el planteamiento de estos problemas geométricos. Aquí encontraremos cálculos de

volúmenes de sólidos, área de las superficies de sólidos y longitudes de curvas. Finalizamos esta parte con una de las tantas aplicaciones a la física: el centro de gravedad.

La tercera parte entrega una herramienta poderosa que nos permite conocer más profundamente ciertas funciones. Nos referimos a las series de potencias. Se supone que el lector conoce y maneja los conceptos de convergencia de sucesiones. El objetivo final de este segmento es mostrar qué funciones se pueden escribir como series de potencias. El resultado que avala este objetivo se llama Teorema de Taylor, cuya demostración se presenta en el apéndice de la monografía.

En el texto he vaciado toda la experiencia adquirida a través de años de docencia, dictando asignaturas que involucraron estos temas. Agradezco a quienes me dieron la oportunidad de escribir esta monografía y espero tener comentarios futuros de parte de los lectores y docentes que la utilicen, con el fin de mejorarla en una posible próxima edición. Además, deseo agradecer, particularmente, a Emilio Vilches, estudiante del 5to. año de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile, quien leyó el trabajo cuidadosamente, proponiéndome puntos de vista alternativos a algunos temas tratados en el libro.

## Captulo 1: La integral



Uno de los grandes problemas que ha motivado el desarrollo de las matemáticas y de otras ciencias ha sido el proceso de cálculo de áreas y volúmenes. Desde tiempos muy remotos, el ser humano buscó la manera de calcular estas cantidades y de esta forma resolver problemas con los que se encontraba a menudo. Por ejemplo, en la actualidad, se construyen edificios o recintos para múltiples usos y una pregunta recurrente es ¿cómo calcular la superficie utilizada por ellos? La fotografía<sup>1</sup> muestra una vista aérea del Parque O'Higgins en Santiago. En ella podemos distinguir varias figuras geométricas:



FIGURA 1.1. Parque O'Higgins, Santiago.

1. El recinto mismo es una elipse.
2. Se distingue una superficie encerrada por un rectángulo en sus costados y semicircunferencias en sus cabezales.
3. Un domo al costado izquierdo del parque.
4. Superficies y sólidos algo más irregulares.

¿Cómo calcular el área de estas superficies? ¿podemos encontrar fórmulas para el área de figuras regulares como una elipse? y, más en general ¿existe una manera

---

<sup>1</sup>Fuente: [www.blogdeturismo.com](http://www.blogdeturismo.com)

sistemática de calcular áreas? Para poder responder estas y otras preguntas debemos hacernos otra más fundamental ¿qué entendemos por la noción de área?

El estudio de áreas de regiones poligonales está basado, de acuerdo a la geometría plana clásica, en ciertos postulados. A continuación, recordaremos esos postulados:

**Postulado 1:** A toda región poligonal le corresponde un único número positivo, llamado el área de la región.

**Postulado 2:** El área de una unión de dos o más regiones poligonales que no se traslapan, es la suma de las áreas de cada una de esas regiones poligonales.

**Postulado 3:** Si dos regiones poligonales son congruentes, entonces tienen la misma área.

**Postulado 4:** Si una región poligonal está contenida dentro de otra, entonces el área de la región contenida no puede exceder al área de la región que la contiene.

**Postulado 5:** El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Mediante la aplicación de estos postulados es posible calcular el área de cualquier región poligonal, pero existen regiones de otro tipo, que no son poligonales como, por ejemplo, el círculo y la elipse, a las cuales también queremos asociar la noción de área. Como estas regiones no están contempladas en los postulados anteriores debemos buscar nuevas herramientas que nos permitan definir su áreas. En esta monografía definiremos un objeto matemático llamado integral que permitirá calcular áreas de regiones que no son poligonales. Esta poderosa herramienta permitirá ampliar de manera considerable la clase de regiones planas a las cuales le podremos asociar un número que llamamos área, incluso nos permitirá extender esta noción para definir el área de superficies curvas como la esfera y el manto de un cono.

Idealmente quisiéramos asociarle el área a cualquier región del plano, sin embargo este empeño lleva a dificultades lógicas (contradicciones) que no es del caso analizar aquí. Nuestra meta es definir la noción de área para una clase amplia que incluya regiones comprendidas entre las gráficas de funciones. Para ello agregaremos a los postulados presentados arriba los siguientes principios:

-Si una región está dentro de otra, el área de la región más pequeña no puede exceder al área de la región más grande.

-Si una región se descompone en dos o más partes, la suma de las áreas de las partes individuales debe ser igual al área de la región completa.

En las próximas páginas se entregarán las bases para definir y calcular áreas de regiones planas limitadas por gráficas de funciones. Este programa se llevará a cabo definiendo la integral, una herramienta teórica que permite extender nuestra noción de área a regiones más complejas que las poligonales y que también tiene una extraordinaria utilidad práctica en el cálculo efectivo del área. La versatilidad de la integral permite extenderla sin mayores dificultades al cálculo de volúmenes, longitudes y áreas de superficies curvas.



### 1.1 Preparación para la integral definida

Supongamos que queremos calcular el área de la región  $R$  comprendida entre la gráfica de la función de ecuación  $f(x) = x^2$  y el eje  $x$ , entre las rectas  $x = 0, x = 2$ .

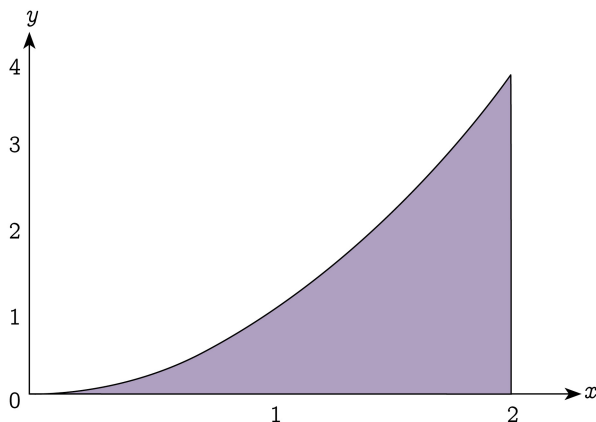


FIGURA 1.2. Áreas encerradas por funciones

Una forma de proceder es utilizar el *Método Exhaustivo* de Arquímedes (287AC y 212AC). Éste consiste en aproximar el área por rectángulos interiores o exteriores a la región como muestran las siguientes figuras:

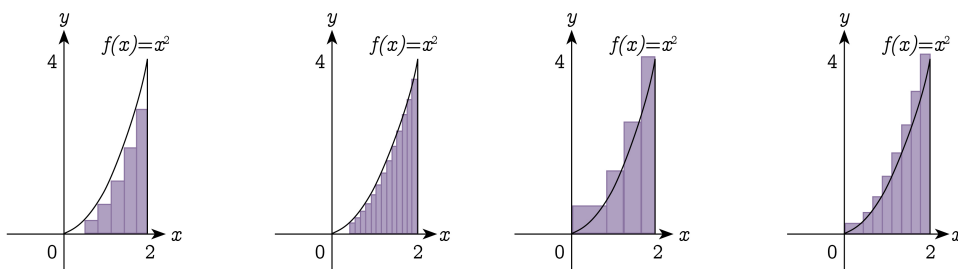


FIGURA 1.3. Método Exhaustivo

De acuerdo a los principios enunciados en la página anterior, el área de la región  $R$  estará comprendida entre el área de la región poligonal formada por los rectángulos que cubren la región por exceso y el área de la región formada por los rectángulos que la cubren por defecto. Podemos apreciar que en la medida que aumentamos el

número de rectángulos, la suma de las áreas de éstos se parece cada vez más al área de la región  $R$ .

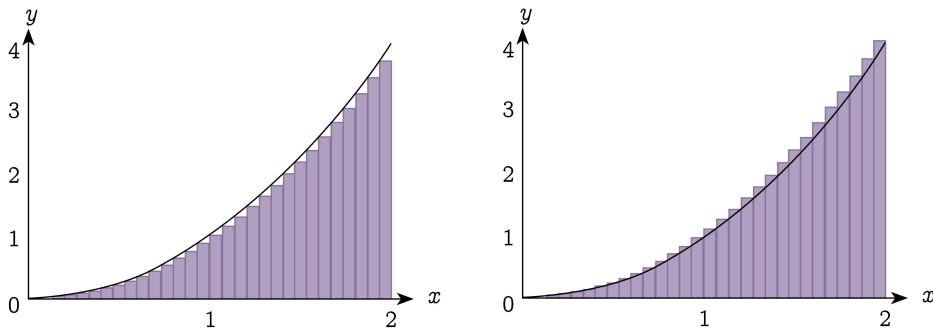


FIGURA 1.4. Método Exhaustivo

¿Cómo podemos formalizar este método?. Observando la Figura 1.4, notemos que para estimar el área se requiere considerar un número finito de puntos en el intervalo  $[0, 2]$  que comienzan en 0 y terminan en 2. Este conjunto finito de puntos recibe el nombre de partición, concepto que a continuación pasamos a definir formalmente.

**Definición 1.1.** Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado. Llamaremos partición de  $I$  a cualquier subconjunto finito  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $I$  tal que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Notemos que una partición  $\mathcal{P}$  siempre contiene a los extremos del intervalo. Las siguientes figuras muestran tres ejemplos de particiones del intervalo  $I = [0, 2]$ :

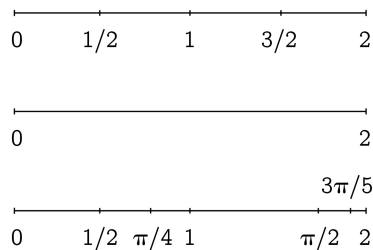


FIGURA 1.5. Particiones

Ahora, cada partición  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  de  $[a, b]$  genera una colección de subintervalos cerrados de la forma:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

cuyas longitudes, denotadas por  $\Delta x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , son

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Observemos que

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = b - a.$$

En el caso de la partición  $\mathcal{P} = \{0, 1/4, 1/2, 1, 3/2, 2\}$  de  $[0, 2]$ ,

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/4, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3/2, \quad x_5 = 2,$$

los subintervalos son:

$$[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 1], [1, 3/2] \text{ y } [3/2, 2],$$

sus respectivas longitudes son:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1/4 \text{ y } \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = 1/2$$

y la suma de estas longitudes es:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5 &= 1/4 + 1/4 + 1/2 + 1/2 + 1/2 \\ &= 2 = 2 - 0. \end{aligned}$$

Para un intervalo  $[a, b]$ , denotaremos por  $\mathfrak{P}([a, b])$  a la colección de todas las posibles particiones de  $[a, b]$ .

## 1.2 Sumas inferiores y sumas superiores

Analicemos la región  $R$  limitada por la gráfica de la función de ecuación  $f(x) = x^2$  en  $[0, 2]$ . En la Figuras 1.4, podemos observar rectángulos que se encuentran bajo la gráfica de  $f$  y rectángulos que sobrepasan esta gráfica. Las bases de estos rectángulos son los subintervalos generados por la partición  $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\}$ . Las respectivas alturas y bases, para aquellos rectángulos que se encuentran por debajo, son  $x_{k-1}^2$  y  $\Delta x_k$ . En consecuencia, sus respectivas áreas son  $x_{k-1}^2 \Delta x_k$  y la suma de las áreas de cada uno de estos rectángulos es

$$x_0^2 \Delta x_1 + x_1^2 \Delta x_2 + \dots + x_{n-1}^2 \Delta x_n = \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2 \Delta x_k.$$

De manera análoga, tenemos la suma de las áreas de los rectángulos que sobrepasan la gráfica

$$x_1^2 \Delta x_1 + x_2^2 \Delta x_2 + \dots + x_n^2 \Delta x_n = \sum_{k=1}^n x_k^2 \Delta x_k.$$

Es claro que el área de la región  $R$ , digamos  $A_R$ , satisface

$$\sum_{k=1}^n x_{k-1}^2 \Delta x_k \leq A_R \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \Delta x_k.$$

La suma de la izquierda la llamaremos suma inferior, pues

$$x_{k-1}^2 = \min \{x^2 : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

y la de la derecha la llamaremos suma superior, pues

$$x_k^2 = \max \{x^2 : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Generalizaremos estas ideas a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cualquiera. Supondremos por el momento que  $f$  es una función continua y no negativa (restricciones que son sólo de carácter didáctico), por tanto es una función acotada, es decir, existe  $M > 0$  tal que  $0 \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ .

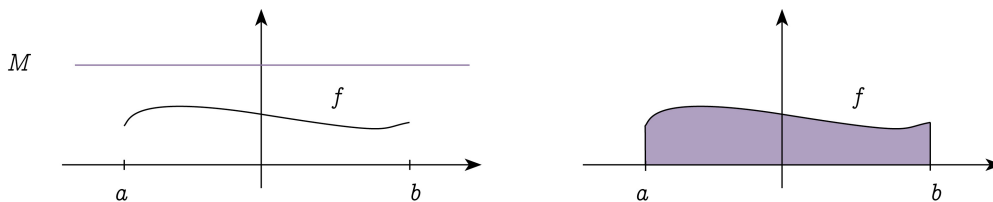


FIGURA 1.6. Regiones

Denotaremos por  $R$  a la región encerrada por la gráfica de  $f$  y por el eje  $x$ , entre las rectas  $x = a, x = b$  (Figura 1.6) y denotemos por  $A_R$  el área de dicha región. Sea  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$ . Como  $f$  es continua, se tiene que  $f$  es continua en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y, por lo tanto,

$$m_k = \min \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

existe. Construiremos los rectángulos (Figura 1.7) cuyas bases miden  $\Delta x_k$  y cuyas alturas miden  $m_k$ .

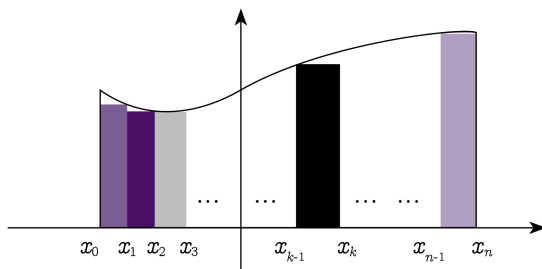


FIGURA 1.7. Sumas inferiores

Denotaremos por  $\underline{S}_f(\mathcal{P})$  a la suma siguiente:

$$\underline{S}_f(\mathcal{P}) = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k$$

y la llamaremos **suma inferior de  $f$  asociada a  $\mathcal{P}$** . Notar que  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos que quedan bajo la gráfica de la función  $f$  (Figura 1.7) y, además, se tiene

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq A_R.$$

Análogamente, denotaremos por

$$M_k = \text{máx} \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

y construiremos los rectángulos con bases  $\Delta x_k$  y alturas  $M_k$  (Figura 1.8) :

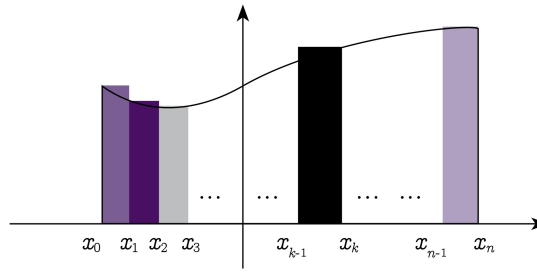


FIGURA 1.8. Sumas superiores

Denotaremos por  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  a la suma

$$\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k$$

y la llamaremos **suma superior de  $f$  asociada a  $\mathcal{P}$** . Notar que  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos que sobrepasan la gráfica de la función  $f$  (Figura 1.8) y se tiene

$$A_R \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

En consecuencia, cualquiera sea la partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  y cualquiera sea la función continua y no negativa  $f$ , tendremos

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq A_R \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

Ejemplifiquemos la situación anterior considerando la función

$$f(x) = 1 + \text{sen } x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

y la partición  $\mathcal{P} = \{0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 2\pi\}$ . La gráfica de esta función la podemos ver en la Figura 1.9.

Determinemos  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  y  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$ :

$$\Delta x_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \Delta x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \Delta x_3 = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \Delta x_4 = \frac{2\pi}{3}.$$

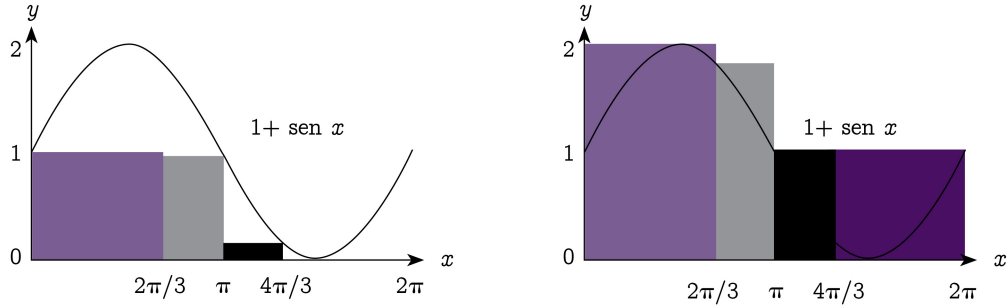


FIGURA 1.9. Rectángulos en gráficos

Para  $\underline{S}_f(\mathcal{P})$  (ver Figura 1.9)

$$m_1 = f(0) = 1, \quad m_2 = f(\pi) = 1,$$

$$m_3 = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad m_4 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_f(\mathcal{P}) &= m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + m_4\Delta x_4 \\ &= 1\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) + 0\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right). \end{aligned}$$

Para  $\overline{S}_f(\mathcal{P})$  (ver Figura 1.9)

$$M_1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad M_2 = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$M_3 = f(\pi) = 1 \quad \text{y} \quad M_4 = f(2\pi) = 1,$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathcal{P}) &= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + M_4\Delta x_4 \\ &= 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \pi\left(\frac{8}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right). \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.** Determine las sumas superiores e inferiores para la función

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2],$$

considerando las particiones  $\mathcal{P} = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$  y  $\mathcal{P}' = \{0, 1/4, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ .

Aún cuando en la definición de suma superior e inferior sólo consideramos funciones continuas y no negativas, esta definición puede ser extendida a la clase de las

funciones acotadas con la única consideración de cambiar el mínimo y el máximo en la definición de  $m_k$  y  $M_k$  por un ínfimo y un supremo respectivamente, es decir,

$$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad y$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Notamos que en el cálculo de una suma inferior (resp. superior) debemos encontrar el ínfimo (resp. supremo) de la función sobre cada uno de los subintervalos generados por la partición. Esta tarea, en general, no es fácil, pero se simplifica enormemente cuando la función es monótona sobre cada uno de estos subintervalos, situación que se puede comprobar en el Ejercicio 1.2.

A continuación, presentaremos dos resultados fundamentales relacionados con las sumas superiores e inferiores para funciones acotadas.

**Proposición 1.3.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  dos particiones de  $[a, b]$  tal que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ . Entonces,*

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}') \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}') \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

**Demostración.** Supongamos que

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}.$$

Veamos el caso en que  $\mathcal{P}'$  contiene exactamente un punto extra  $c \in (x_{k-1}, x_k)$ , para algún  $k$ , es decir,

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k < \cdots < x_n = b\}.$$

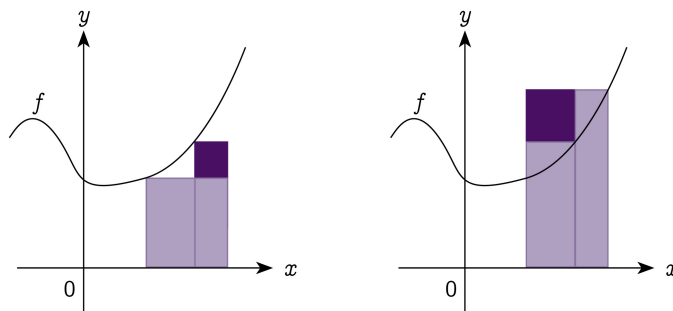


FIGURA 1.10. Particiones más finas

Observando la Figura 1.10, podemos deducir que

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}') \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}') \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

En el caso general en que  $\mathcal{P}'$  contenga varios puntos adicionales, repetimos el argumento anterior varias veces.  $\square$

**Corolario 1.4.** *Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son dos particiones arbitrarias de  $[a, b]$ , entonces*

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}).$$

**Demostración.** Notar que  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$  es una nueva partición de  $[a, b]$  y que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$  y  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}'$ . Luego, por la proposición anterior, se tiene

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}).$$

$\square$

Este resultado nos permite concluir que la colección de sumas superiores es acotada inferiormente y la colección de sumas inferiores es acotada superiormente. En efecto, si consideramos dos particiones arbitrarias  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , entonces el corolario dice que  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q})$ , es decir,  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  es una cota inferior del conjunto

$$\{\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b])\}$$

y, a su vez,  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q})$  es cota superior de

$$\{\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b])\}.$$

En consecuencia,

$$\inf \{\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b])\} \quad \text{y} \\ \sup \{\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b])\}$$

existen.

Por otro lado, si consideramos la partición  $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$ , entonces la Proposición 1.4 dice que para cualquier partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , se tiene:

$$(1.1) \quad m(b-a) = \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_0) \leq \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_0) = M(b-a)$$

donde  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$  y  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  son finitos, pues  $f$  es acotada.

**Observación 1.5.** En términos de área y cuando la función es no negativa, (1.1) nos dice que el área de la región comprendida entre la gráfica de la función y el eje  $x$  está acotada entre dos rectángulos de ancho  $(b-a)$  y de altura  $m$  y  $M$ , respectivamente.

### Ejercicio 1.6.

1. Encontrar la suma superior  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$  y la suma inferior  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$ , donde  $f(x) = \sin x$  y  $\mathcal{P} = \{0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi\}$ .



2. Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 7$ . Considere las particiones  $\mathcal{P} = \{0, 1, 6, 7\}$ ,  $\mathcal{P}' = \{0, 4, 7\}$  y  $\mathcal{P}'' = \left\{0, \frac{7-\sqrt{5}}{2}, 7\right\}$ . Calcule  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$ ,  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}')$  y  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}'')$  y compárelas.
3. ¿Existirá una función  $f$  definida en  $[a, b]$  y una partición  $\mathcal{P}$ , tal que  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = 3$  y la  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = 2$ ? ¿y tal que  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = 2$  y la  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = 3$ ?
4. Muestre que si  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y que  $f(x) \leq g(x)$ , para  $a \leq x \leq b$ , entonces  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_g(\mathcal{P})$  y  $\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_g(\mathcal{P})$ , cualquiera sea la partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ .
5. Suponga que  $f$  es continua y creciente en  $[a, b]$  y suponga que

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k \cdots < x_n = b\}$$

es tal que  $\Delta x_i = h$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Muestre que

$$\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) - \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = h[f(b) - f(a)].$$

### 1.3 La integral definida

En la sección anterior se concluyó que, para una función acotada y no negativa  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y para una partición cualquiera  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ , el área  $A_R$  de la región encerrada por la gráfica de  $f$  y el eje  $x$ , entre las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ , de existir debería ser un número real que satisface

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq A_R \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

Notamos que tal número real  $A_R$  no depende de la partición  $\mathcal{P}$ . Esto sirve de motivación para la siguiente definición de función integrable.

**Definición 1.7.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Diremos que  $f$  es **integrable** en  $[a, b]$  si existe un único número real  $I$  tal que, para cualquier partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , se tiene

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq I \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

En este caso, al único número  $I$  lo llamaremos **integral definida de  $f$  en  $[a, b]$**  y lo denotaremos por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

#### Observación 1.8.

1. Una definición equivalente de función integrable es la siguiente: una función acotada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable si

$$(1.2) \quad \inf \{ \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \} = \sup \{ \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \}.$$

2. La integral definida  $\int_a^b f(x)dx$ , cuando exista, será un número que dependerá de  $f$ , de  $a$  y de  $b$ , solamente. A los números  $a$  y  $b$  los llamaremos “límites de integración”,  $a$  será el límite inferior y  $b$  será el límite superior. La notación  $\int_a^b f(x)dx$  enfatiza

que se está “integrando” la función  $f$  de variable  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ . Dado que el nombre de la variable es nominal, la integral de  $f$  no depende de ésta, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3. Analicemos la función  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}, \quad x \in [0, 1].$$

Cualquiera sea la partición  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  de  $[0, 1]$ , cada  $[x_{k-1}, x_k]$  contiene tanto números racionales como irracionales. Luego, se tiene que

$$m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0 \quad \text{y} \\ M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1,$$

y por lo tanto,

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j = 1.$$

Vemos así que la función  $f$  no es integrable.

**Ejemplo 1.9.** Analicemos el caso simple de la función constante  $f(x) = c$ ,  $x \in [a, b]$ . Para ver si esta es una función integrable no tenemos otra herramienta que la definición que nos hemos dado. Sea  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  una partición arbitraria de  $[a, b]$ . Como  $f$  es constante, se tiene que

$$m_k = c \quad \text{y} \quad M_k = c.$$

En consecuencia,

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a) \quad \text{y} \\ \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a).$$

Como  $\mathcal{P}$  es una partición cualquiera y

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = c(b-a),$$

concluimos que  $f$  es integrable y

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

**Observación 1.10.** Cuando  $c > 0$ , naturalmente la integral coincide con el área del rectángulo de altura  $c$  y ancho  $(b-a)$ .

**Ejemplo 1.11.** Consideremos la función  $f(x) = x$ ,  $x \in [a, b]$ . Afirmamos que  $f$  es integrable y que

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

En este caso, la situación es más laboriosa que la anterior, pero su desarrollo será útil en la comprensión de los conceptos de suma superior e inferior. Más adelante veremos métodos para calcular este número más fácilmente. Comenzamos recordando la siguiente relación en  $\mathbb{R}$ :

$$(1.3) \quad c < d \Rightarrow c < \frac{1}{2} (c + d) < d.$$

Sea  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una partición arbitraria de  $[a, b]$ . Como  $f(x) = x$  es estrictamente creciente,

$$m_k = \underbrace{x_{k-1}}_c < \underbrace{x_k}_d = M_k.$$

Por (1.3), se tiene que

$$m_k < \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k) < M_k,$$

y luego

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \\ &< \frac{1}{2} (x_0 + x_1) (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} (x_1 + x_2) (x_2 - x_1) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_n) (x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} (x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) + \dots + \frac{1}{2} (x_n^2 - x_{n-1}^2) \quad (\text{suma telescópica}) \\ &= \frac{1}{2} (b^2 - a^2) < \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n. \end{aligned}$$

Así,

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$$

cualquiera sea la partición  $\mathcal{P}$ . Por otro lado se encuentra que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) &= \frac{1}{2} (x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1})^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \max\{|x_k - x_{k-1}| / k = 1, 2, \dots, n\} (b - a). \end{aligned}$$

Considerando el ínfimo entre todas las particiones obtenemos que

$$\inf \{ \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \} \leq \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

Similarmente se obtiene que

$$\sup \{ \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \} \geq \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

de donde se puede concluir que

$$\inf \{ \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \} = \sup \{ \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathfrak{P}([a, b]) \} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

Por lo tanto  $f$  es integrable y

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

Para el caso particular  $a = 0$  y  $b = 1$ , hemos obtenido  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Observamos que la gráfica de  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , forma un triángulo rectángulo con el eje  $x$  y la recta  $x = 1$ , cuya área es  $\frac{1}{2}$ .

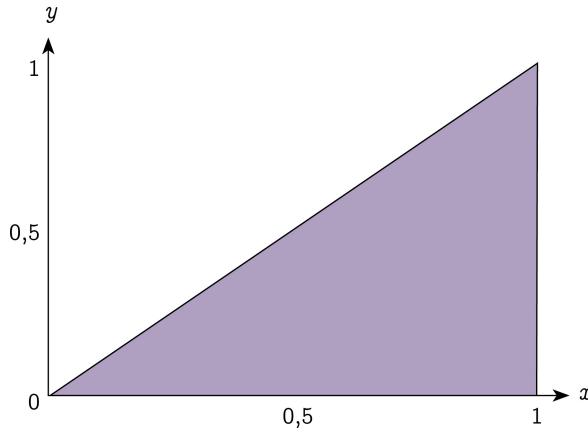


FIGURA 1.11. Área de un triángulo

### Ejercicio 1.12.

1. Muestre, utilizando el método anterior, que

$$\int_a^b c x dx = \frac{c}{2} (b^2 - a^2) \quad \text{y} \quad \int_a^b (x + c) dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) + c(b - a).$$

2. Muestre que si  $0 \leq a \leq b$ , entonces

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

A modo de indicación, utilice la siguiente desigualdad:

$$0 < c < d \Rightarrow c^2 < \frac{c^2 + cd + d^2}{3} < d^2$$

y aplique la misma técnica desarrollada en el Ejemplo 1.11.

3. Conjeture el valor de  $\int_a^b x^4 dx$  y demuestre su conjetura. ¿podría generalizar a  $\int_a^b x^n dx$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ?
4. Suponga que  $f$  y  $g$  son funciones integrables en  $[a, b]$  y que  $f(x) \leq g(x)$ . Muestre que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Indicación: utilice la Observación 1.8, parte 1.

Retomando el ejemplo entregado al inicio de la Sección 1.1, tenemos que la región  $R$  de la Figura 1.2 está encerrada por la parábola de ecuación  $y = x^2$  y el eje  $x$ , entre 0 y 2. Aplicando el Ejercicio 1.12-2, tenemos que

$$A_R = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} (2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}.$$

#### 1.4 Propiedades básicas de la integral definida

En esta sección vemos algunas propiedades básicas que emanan de la definición de función integrable. La primera propiedad es la linealidad de la integral, la que queda expresada en el siguiente teorema:

**Teorema 1.13.** Sean  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables en  $I$  y sea  $k \in \mathbb{R}$ , entonces las funciones  $kf$  y  $f + g$  son integrables en  $I$  y

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

**Demostración.** Si consideramos  $k > 0$ , la primera propiedad surge directamente del simple hecho que para cualquier partición  $\mathcal{P}$  del intervalo  $[a, b]$  se tiene que

$$\underline{\mathcal{S}}_{kf}(\mathcal{P}) = k \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{S}}_{kf}(\mathcal{P}) = k \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

El caso  $k < 0$  requiere un pequeño cambio que dejamos al lector, mientras que el caso  $k = 0$  es trivial.

Por otro lado, la segunda propiedad viene del hecho que para una partición  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} &+ \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\leq \inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} &\leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\quad + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \end{aligned}$$

De donde se obtiene directamente que

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) + \underline{\mathcal{S}}_g(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_{f+g}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_{f+g}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) + \overline{\mathcal{S}}_g(\mathcal{P}).$$

Usando ahora que  $f$  y  $g$  son integrables se obtiene de aquí fácilmente que  $f + g$  es integrable y que se cumple la segunda igualdad en el teorema. Dejamos los detalles como un ejercicio al lector.  $\square$

La próxima propiedad está relacionada con el segundo principio del área que presentamos en la introducción. Tenemos:

**Teorema 1.14.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $I$  y sean  $a, b, c \in I$ . Si  $a < c < b$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$  y*

$$(1.4) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Observación 1.15.** Si  $f$  es positiva y  $a < c < b$ , interpretando la integral como el área entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$ , en el intervalo correspondiente, (1.4) expresa que el área de la región entre  $a$  y  $c$  se puede obtener descomponiendo en dos regiones, una entre  $a$  y  $b$  y la otra entre  $b$  y  $c$ , calculando el área de cada subregión y luego sumando los resultados. Ese es el contenido de nuestro segundo principio, enunciado en la introducción del capítulo.

**Demostración.** Omitiremos la demostración de la integrabilidad de  $f$  en los subintervalos y presentaremos sólo la demostración de la igualdad (se sugiere al lector obtener la demostración de esta parte consultando algún texto de la bibliografía). Sea  $\mathcal{P}$  una partición arbitraria de  $[a, b]$ . Como la función  $f$  es integrable, se tiene que,

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

Intuitivamente, lo que haremos es descomponer  $\mathcal{P}$  en dos conjuntos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , donde  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  corresponden a los términos de  $\mathcal{P}$  que están en el intervalo  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente. Lo que nos gustaría es decir que

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) &= \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_1) + \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_2) \\ \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) &= \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_1) + \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_2), \end{aligned}$$

pero  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  no son necesariamente particiones de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente, pues para ello es necesario que el punto  $c$  pertenezca a  $\mathcal{P}$ . Ahora, nos pondremos en dos casos.

Caso 1. Si  $c \in \mathcal{P}$ , entonces  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  son particiones de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente. Como hemos dicho, la función  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_1) &\leq \int_a^c f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_1) \\ \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_2) &\leq \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}_2).\end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades, se deduce que

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

Caso 2. Si  $c \notin \mathcal{P}$ . Definimos la partición  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{c\}$  de  $[a, b]$ , análogamente, descomponemos  $\mathcal{Q}$  en dos particiones  $\mathcal{Q}_1$  y  $\mathcal{Q}_2$  de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}_1) &\leq \int_a^c f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}_1) \\ \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}_2) &\leq \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}_2)\end{aligned}$$

sumando estas desigualdades, obtenemos

$$(1.5) \quad \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q})$$

pero, gracias a la Proposición 1.3, se tiene que

$$\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}) \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{Q}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$$

y, utilizando (1.5),

$$\overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}),$$

por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

por unicidad de la integral.  $\square$

Quisiéramos extender la propiedad recién demostrada al caso en que los números  $a, b$  y  $c$  son cualesquiera en el intervalo  $I$ . Para ello es necesario darle sentido a expresiones como  $\int_a^a f(x)dx$  y  $\int_b^a f(x)dx$ , con  $a < b$ , de modo que la teoría y las futuras aplicaciones tengan coherencia. Para estos propósitos, definimos:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Con estas definiciones podemos enunciar el siguiente resultado que nos será muy útil en lo que viene:

**Corolario 1.16.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $I$  y sean  $a, b, c \in I$ . Entonces  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$  y

$$(1.6) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Demostración.** La demostración se deja como ejercicio. □

**Ejemplo 1.17.** Analicemos los siguientes ejemplos:

1. Para evaluar la integral

$$\int_1^3 f(x)dx,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

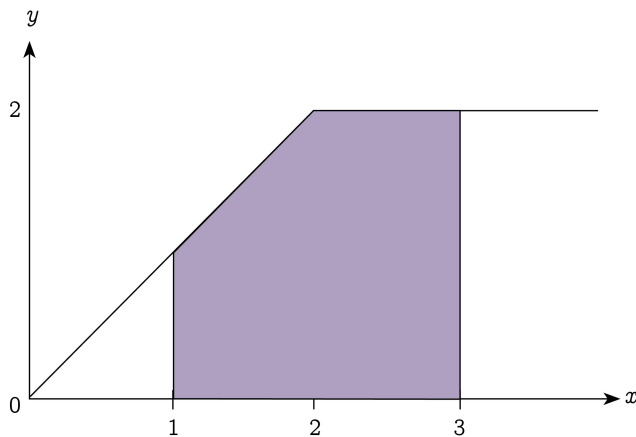


FIGURA 1.12. Suma de áreas

se requiere sólo escribir

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 xdx + \int_2^3 2dx.$$

Interpretando la integral como el área entre la gráfica de la función y el eje  $x$ , vemos que corresponde a la suma del área de un triángulo y de un rectángulo (Figura 1.12).



2. Para evaluar una integral que involucre el valor absoluto, como, por ejemplo,

$$\int_{-1}^2 |x| dx,$$

escribiremos como:

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx.$$

El siguiente resultado nos entregará un intervalo donde podemos encontrar el número real  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Teorema 1.18.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable,  $m = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$  y  $M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**Demostración.** Como  $f$  es integrable en  $[a, b]$  tenemos que

$$\underline{S}_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}_f(\mathcal{P}),$$

cualquiera sea la partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ . En particular, para la partición  $\mathcal{P} = \{a, b\}$ , se tiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

□

**Ejemplo 1.19.** Encontremos cotas para

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

La gráfica de la función  $\sqrt{1+x^4}$  se puede ver en Figura 1.13. Observamos que para  $\sqrt{1+x^4}$  tenemos las siguientes cotas

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Así, aplicando el teorema anterior, tendremos

$$1 \leq 1(1-0) \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}.$$

**Corolario 1.20.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y supongamos que

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

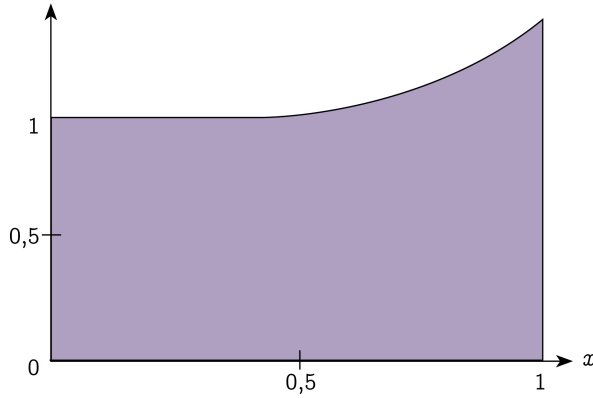


FIGURA 1.13. Cotas para integrales

**Demostración.** Dado que  $f(x) \geq 0$ , tenemos que  $0 \leq m = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$  y, luego,

$$0 = 0(b-a) \leq m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx.$$

□

**Corolario 1.21.** Sean  $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables que satisfacen

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces,

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particular, como

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Demostración.** Como  $0 \leq g(x) - f(x)$ , podemos usar el Corolario 1.20 para obtener

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Ahora, usando la linealidad de la integral,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

El resto es análogo. □

El Corolario 1.21 nos permitirá encontrar cotas inferiores y superiores de una integral definida que, en muchos casos, podría ser difícil o imposible determinar directamente. En el Ejemplo 1.19 mostramos que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \in [1, \sqrt{2}].$$

Usando el Corolario 1.21 podemos refinar esta cota para obtener:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \in [1, \frac{4}{3}].$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1+x^4 \leq 1+2x^2+x^4 = (1+x^2)^2 \quad / \sqrt{\phantom{x}} \\ 1 &\leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+x^2, \end{aligned}$$

luego, aplicando el Corolario 1.21,

$$1 = \int_0^1 dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \int_0^1 (1+x^2) dx = \left( x + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

## 1.5 Funciones continuas y sumas de Riemann

En la Sección 1.3 hemos definido la noción de función integrable y de integral de una función. Aquí hay dos grandes dificultades, la primera es saber cuando una función acotada es integrable y la segunda, en caso que la función sea integrable, encontrar el valor de la integral. Pero ¿en qué radican estas dificultades? Supongamos que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada, entonces la primera dificultad es calcular la suma inferior  $\underline{S}_f(\mathcal{P})$  y la suma superior  $\overline{S}_f(\mathcal{P})$  asociada a una partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  cualquiera, lo que requiere encontrar el ínfimo y el supremo de  $f$  sobre cada subintervalo generado por  $\mathcal{P}$ , tarea raramente fácil. En segundo lugar, para determinar la integrabilidad de la función, es necesario tomar el supremo y el ínfimo de la suma superior e inferior, respectivamente, sobre todas las particiones, cuestión tampoco fácil. Sólo entonces es posible comparar estos números y de coincidir, tenemos la integrabilidad de  $f$  y la integral.

Sería muy útil saber que una clase de funciones conocidas esté constituida de funciones integrables. También sería muy útil que al calcular una integral uno pudiera utilizar algunas particiones y no todas. Estas dos cuestiones están relacionadas con las funciones continuas y serán tratadas en esta sección.

Ante la pregunta ¿cuándo una función acotada es integrable, es decir,  $\int_a^b f(x) dx$  existe? una respuesta parcial la entrega el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar al final de la monografía en el Apéndice.

**Teorema 1.22.** *Para una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , el número  $\int_a^b f(x)dx$  siempre existe.*

Este resultado sólo provee un criterio para la integrabilidad de la función  $f$ , es decir, establece que para esta clase de funciones la integral existe, pero el teorema no nos dice cuál es ese número. Nuestro objetivo cercano será buscar métodos para determinar dicho número.

La definición de la integral no depende de la partición  $\mathcal{P}$  considerada. Entonces, si supieramos que  $\int_a^b f(x)dx$  existe, ¿podríamos usar alguna partición especial para encontrar, al menos, una aproximación del valor de esta integral? Para responder a esta pregunta, daremos un tratamiento distinto a las sumas superiores e inferiores. En vez de calcular ínfimos y supremos de  $f$  sobre cada subintervalo de  $[a, b]$ , situación que pudiese ser difícil, elegiremos un punto  $t_k$  en cada uno de éstos y consideraremos simplemente  $f(t_k)$ . Con esto en mente, introduciremos el siguiente concepto. Sea

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

una partición y sea  $t_k$  un punto elegido en el  $k$ -ésimo subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces, la siguiente suma

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

la llamaremos **suma de Riemann** de  $f$  con respecto a  $\mathcal{P}$ . Dado que  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  se tiene que

$$(1.7) \quad m_k \leq f(t_k) \leq M_k.$$

y por (1.7)

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \mathcal{S}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}).$$

Antes de ver la utilidad de las sumas de Riemann, definimos el **largo de la partición**  $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$  como

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}.$$

**Observación 1.23.** Notamos que  $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$  quiere decir que el ancho máximo de los rectángulos usados para aproximar el área entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  entre las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , es cada vez más pequeño y, por lo tanto, la suma de las áreas de todos estos rectángulos debería constituir cada vez una “mejor aproximación”, (ver Figura 1.10).

El siguiente teorema muestra la utilidad de las sumas de Riemann.

**Teorema 1.24.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces*

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

*cualquiera sea la elección de  $t_k$  en el subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .*

**Observación 1.25.**

1. Notamos que en el caso de funciones continuas, el teorema anterior nos permite calcular  $\int_a^b f(x)dx$ , que originalmente fue definida como un supremo o un ínfimo, a través de un límite. Se puede además concluir que una aproximación de la integral  $\int_a^b f(x)dx$  es precisamente la suma de Riemann, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k,$$

donde los puntos  $t_k$  han sido arbitrariamente elegidos en el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , para todo  $k = 1, \dots, n$ .

2. La demostración de este teorema utiliza el concepto más avanzado de continuidad uniforme y, por tanto, no la analizaremos en esta monografía.

**Ejercicio 1.26.**

1. Suponga que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son dos particiones del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\mathcal{Q}$  es más fina que  $\mathcal{P}$ , es decir,  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ . Muestre que  $\|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|$ .
2. Considere las sumas

$$\begin{aligned} i) & \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) (x_i^2 - x_{i-1}^2) . \\ ii) & \sum_{i=1}^n [\sin x_i \cos x_{i-1} + \sin x_{i-1} \cos x_i] (x_i^2 - x_{i-1}^2) , \end{aligned}$$

donde los  $x_i$  pertenecen a una partición  $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$ . Muestre que estas son sumas de Riemann, identificando la función correspondiente.

3. Calcule, de manera aproximada, las siguientes integrales:
  1.  $\int_1^3 (x^2 - x) dx$  con la partición  $\mathcal{P} = \{1, 3/2, 2, 9/4, 12/5, 3\}$  y donde  $t_i$  es elegido como el punto medio de cada intervalo.
  2.  $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$  con la partición  $\mathcal{P} = \left\{0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right\}$  y donde  $t_i$  es elegido como el extremo superior de cada intervalo.
  3.  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  con la partición  $\mathcal{P} = \left\{1, \frac{9}{8}, \frac{8}{7}, \frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}$  y donde  $t_i$  es elegido como el extremo inferior de cada intervalo.

**1.5.1 La partición equiespaciada**

A continuación definiremos una partición especial, conocida como la partición equiespaciada y que, gracias al teorema anterior, puede ser utilizada para realizar cálculos de integrales definidas.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , se define la partición equiespaciada  $\mathcal{P}_n$  del intervalo  $[a, b]$  como:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + 1 \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2 \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = a + n \frac{b-a}{n} = b,$$

es decir,

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

En este caso,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) - \left( a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n}$$

luego,

$$\|\mathcal{P}_n\| = \frac{b-a}{n}$$

y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n\| = 0.$$

Así, para  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , la suma de Riemann de  $f$  con respecto a  $\mathcal{P}_n$  es

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k),$$

y, usando el teorema anterior, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.27.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k).$$

Este corolario nos aclara el uso de la notación  $\int_a^b f(x) dx$  para representar la integral de una función, pues para  $n$  suficientemente grande,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

y, por lo tanto, se puede pensar que para  $n$  muy grande, el símbolo  $dx$  representa  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  y  $\int$  representa el símbolo de la suma, escrito como una  $S$  alargada.

Las elecciones más típicas de  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  son: el extremo izquierdo  $t_k = x_{k-1} = a + (k-1) \frac{b-a}{n}$ , el extremo derecho  $t_k = x_k = a + k \frac{b-a}{n}$  y el punto medio  $t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}$ .

En la siguiente subsección veremos una aplicación de las sumas de Riemann.

### Ejercicio 1.28.

1. Utilizando la suma de Riemann  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$  y, usando calculadora, evalúe las siguientes integrales:
  1.  $\int_1^3 (x^2 - x) dx$ ; eligiendo a  $t_k$  como el punto medio y  $n = 10$ .
  2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ ; eligiendo a  $t_k$  como el extremo superior y  $n = 10$ .
  3.  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ; eligiendo a  $t_k$  como el extremo inferior y  $n = 10$ .
  4.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ; eligiendo a  $t_k$  como el extremo inferior y  $n = 10$ .

2. La fórmula entregada por el Corolario 1.27 puede ser particularizada como sigue:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(t_k).$$

Utilice esta fórmula para mostrar que:

1. Si  $f$  es una función continua e impar en  $[-a, a]$ , entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2. Si  $f$  es una función continua y par en  $[-a, a]$ , entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

### 1.5.2 La ley de Poiseuille

El fisiólogo y físico francés Jean Poiseuille (1797 – 1869), interesado en la presión sanguínea, observó que un líquido, independiente de su viscosidad, no fluía a la misma velocidad a través de una tubería. Se dio cuenta que el líquido cercano a las paredes del tubo fluía a menor velocidad respecto de aquel que fluía por el centro del tubo, producto del roce. Descubrió que, para un tubo que está en posición horizontal (Figura 1.14, próxima página) y despreciando la fuerza de gravedad (en posición vertical, esta fuerza no se puede despreciar), la velocidad del fluido a través del tubo se rige por la siguiente ley

$$v(r) = \frac{P}{4kL} (R^2 - r^2), \text{ donde } \begin{cases} R & \text{es el radio del tubo} \\ L & \text{es el largo del tubo} \\ P & \text{es el cambio de presión} \\ k & \text{es el coeficiente de viscosidad,} \end{cases}$$

conocida actualmente como ley de Poiseuille.

Usaremos esta ley para calcular el caudal  $Q$  a través del tubo, es decir, el volumen de fluido que sale después de cruzar el tubo por unidad de tiempo. Sea

$$\mathcal{P}_n = \{0 = r_0 < r_1 = \frac{R}{n} < \dots < r_k = \frac{kR}{n} < \dots < r_n = R\}$$

una partición equiespaciada del radio del cilindro y consideremos  $t_k$  como el punto medio de  $r_{k-1}$  y  $r_k$ , donde cada  $r_k$  es el radio de un cilindro concéntrico.

El volumen de fluido que pasa a través del anillo generado por  $r_{k-1}$  y  $r_k$  por unidad de tiempo, está dado por la velocidad del fluido multiplicado por el área del anillo. Por lo tanto, el caudal  $Q$  a través del tubo es aproximadamente:

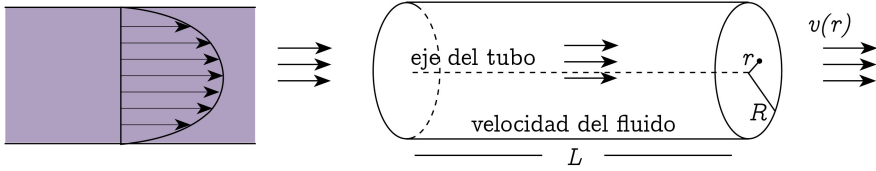


FIGURA 1.14. Ley de Poiseuille

$$\begin{aligned}
 Q &\approx \sum_{k=1}^n v(t_k) (\pi r_k^2 - \pi r_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n \pi v(t_k) (r_k + r_{k-1}) \Delta r_k \\
 &= \frac{R}{n} \sum_{k=1}^n 2\pi v(t_k) t_k.
 \end{aligned}$$

Esta suma es la suma de Riemann de la función de ecuación  $f(r) = 2\pi r v(r)$  en el intervalo  $[0, R]$  y, usando la ley de Poiseuille, ésta queda como

$$f(r) = \frac{2\pi P}{4kL} (R^2 - r^2) r.$$

Por la continuidad de esta función, podemos aplicar el Corolario 1.27 para obtener:

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{n} \sum_{k=1}^n 2\pi v(t_k) t_k = \int_0^R \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r dr.$$

Ahora calcularemos la suma de Riemann y después tomaremos límite. Para ello recordamos las siguientes sumas, cuyas demostraciones se pueden hacer por inducción:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{n} \sum_{k=1}^n 2\pi v(t_k) t_k &= \frac{R}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2\pi P}{4kL} (R^2 - t_k^2) t_k \\
 &= \frac{\pi R^4 P}{2kLn} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{2k-1}{n} \right)^2 \right) \left( \frac{2k-1}{2n} \right) \\
 &= \frac{\pi R^4 P}{4kLn} \left( 1 + \frac{n^2}{2n} \right),
 \end{aligned}$$



y tomando límite

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^4 P}{4kLn} \left(1 + \frac{n^2}{2n}\right) = \frac{\pi R^4 P}{4kL} \frac{1}{2},$$

es decir,

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8kL},$$

expresión conocida como la ley de Poiseuille para el caudal de un tubo.

**Observación 1.29.** En ausencia de viscosidad, la velocidad del fluido es constante dentro del tubo, así, por ejemplo, si la velocidad del fluido es  $v = \frac{PR^2}{4kL}$ , igual a la velocidad del fluido en el centro del tubo, entonces  $Q = \frac{\pi R^4 P}{4kL}$ . Vemos que esta ley proporciona una descripción más realista de lo que sucede en los fluidos, puesto que en la mayoría de ellos la viscosidad no puede ser despreciada.

A continuación daremos una muestra de cómo obtener métodos para calcular integrales de manera aproximada. Denotemos por

$$E_n^R = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) \right|$$

al error obtenido al calcular  $\int_a^b f(x)dx$  usando la suma de Riemann  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$  asociada a la partición equiespaciada  $\mathcal{P}_n$ . El siguiente teorema nos entrega cotas para el cálculo aproximado de integrales definidas usando este tipo de sumas. Su demostración involucra el Teorema del Valor Medio.

**Teorema 1.30.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $f'$  es continua en  $[a, b]$  y  $K \in \mathbb{R}$  es tal que  $|f'(x)| \leq K$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces

$$E_n^R \leq \frac{K}{2n} (b-a)^2.$$

**Observación 1.31.** Si queremos calcular  $\int_a^b f(x)dx$  de manera aproximada usando  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$  con un error de magnitud menor que  $\epsilon > 0$ , entonces lo único que debemos hacer es plantearnos la inecuación

$$E_n^R \leq \frac{K}{2n} (b-a)^2 < \epsilon$$

y despejar  $n$ , es decir,

$$\frac{K}{2\epsilon} (b-a)^2 < n.$$

Así, eligiendo el entero  $n$  mayor que  $\frac{K}{2\epsilon} (b-a)^2$ , sabremos cuantos subintervalos requerimos para obtener una buena aproximación del valor de la integral definida con un error menor que el  $\epsilon > 0$  elegido, esto es,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k).$$

**Ejemplo 1.32.** Como una aplicación del Teorema 1.30 y de las sumas de Riemann vamos a encontrar aproximaciones de

$$(1.8) \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos la partición equiespaciada  $\mathcal{P}_n$  de  $[0, 1]$ , es decir,

$$x_k = 0 + k \frac{1-0}{n} \quad \text{y} \quad \Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

con  $t_k = \frac{(k-1)}{n}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Luego,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{k-1}{n}\right)^4}$$

y, además,

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} \right| \leq 2, \quad x \in [0, 1].$$

Por lo tanto, aplicamos el teorema anterior con  $K = 2$ , para conocer el número de subintervalos necesarios para acotar el error  $E_n^R$  por  $\epsilon > 0$  dado,

$$E_n^R \leq \frac{K(b-a)^2}{2n} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{K(b-a)^2}{2\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} < n.$$

Por ejemplo, si queremos acotar el error cometido por  $\epsilon = 0,1$ , necesitamos que  $\frac{1}{0,1} = 10 < n$ . Luego, tomando  $n = 11$ , obtenemos

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} \approx \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{11} \sqrt{1 + \left(\frac{k-1}{11}\right)^4} = 1,0716.$$

La siguiente tabla resume el valor aproximado de la integral y cota para el error cometido para distintos valores de  $\epsilon$ .

$\epsilon$	número de subintervalos $(n-1)$	valor aproximado	cota del error
$10^{-1}$	10	1.0716	0.0178
$10^{-2}$	$10^2$	1.0874	0.0002
$10^{-3}$	$10^3$	1.0894	0.00003

## 1.6 El Teorema del Valor Medio para Integrales

A continuación veremos un resultado sorprendente, conocido como Teorema del Valor Medio para Integrales.

Antes de ver este teorema, definiremos el promedio de una función. Para una cantidad finita de números, digamos  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , el promedio aritmético está dado

por

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{n},$$

típico en el cálculo de notas de una asignatura, cuando cada nota tiene la misma ponderación.

Ahora, si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  es una partición, con  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ , entonces el promedio aritmético de los valores  $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  es

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \end{aligned}$$

es decir, el promedio aritmético es una suma de Riemann. Luego, por la continuidad de  $f$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Todo esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.33.** Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ . Se define el promedio de la función  $f$  sobre  $[a, b]$  como

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Ejemplo 1.34.** Supongamos que la temperatura  $T$  de un día de invierno está dada por la función

$$T(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in 0 \leq t \leq 12, \\ 24 - t & \text{si } t \in 12 < t \leq 24, \end{cases}$$

donde  $t$  se mide en horas y  $T$  en grados Celsius. Usando la definición recién dada, vemos que la temperatura promedio es

$$\begin{aligned} T_{\text{promedio}} &= \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt \\ &= \frac{1}{24} \left( \int_0^{12} t dt + \int_{12}^{24} (24 - t) dt \right) \\ &= 6, \end{aligned}$$

es decir, la temperatura promedio durante ese día fue de 6 grados Celsius. Para este día de invierno ¿Existe un momento durante el día en que la temperatura haya sido igual a la temperatura promedio? Al analizar esta situación gráficamente, no es difícil darse cuenta que la respuesta es afirmativa. Lo sorprendente es que se puede demostrar que la respuesta a esta pregunta es cierta en general, independiente de la función temperatura del día, que es lo que haremos a continuación.

**Teorema 1.35.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$(1.9) \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

**Demostración.** Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , se tiene que existen  $x_0, x_1 \in [a, b]$ , donde  $f$  alcanza su mínimo y su máximo, respectivamente, es decir,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad x \in [a, b].$$

Por el Teorema 1.18, sabemos que

$$f(x_0)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)(b-a),$$

de donde

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1).$$

Ahora, utilizando el Teorema del Valor Intermedio con  $\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ , podemos afirmar que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

□

### Observación 1.36.

1. Notemos que, dividiendo por  $(b-a)$  en (1.9), podemos interpretar el Teorema del Valor Medio para integrales diciendo que existe un número  $c \in [a, b]$  para el cual el valor de  $f$  es igual al promedio de la función, es decir,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

2. Si  $f$  representa un modelo de la función temperatura de un día cualquiera y  $[a, b]$  representa el intervalo de tiempo de un día, entonces, aplicando el Teorema del Valor Medio para integrales, podemos asegurar que existe un momento durante el día en que la temperatura es igual a la temperatura promedio.

3. En términos geométricos, el Teorema del Valor Medio para Integrales, nos dice que el área encerrada por la gráfica de una función positiva  $f$  y el eje  $x$  en  $[a, b]$  es igual al área de un cierto rectángulo (de ancho  $b - a$  y altura  $f(c)$ ), como lo muestra la Figura 15.

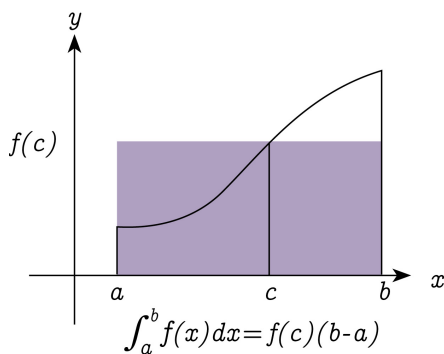


FIGURA 1.15. Teorema del Valor Medio

**Ejemplo 1.37.** Determinemos el valor  $c$ , dado por el Teorema 1.35, para  $f(x) = x^2$  en  $[0, 2]$ .

**Solución:**

$$(1.10) \quad \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} (2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}.$$

Utilizando el Teorema del Valor Medio para integrales, tenemos

$$(1.11) \quad \int_0^2 x^2 dx = f(c) (2 - 0) = 2c^2.$$

Luego, de (1.10) y (1.11),

$$2c^2 = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Ejercicio 1.38.**

- Determine un intervalo donde se encuentra  $\int_a^b f(x) dx$ , para:
  - $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x \in [2, 3]$ .
  - $f(x) = \tan x$ ;  $x \in [0, \pi/3]$ .
  - $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ ;  $x \in [0, \pi]$ .
- Sea  $f(x) = x$ , para  $0 \leq x \leq b$ . Muestre que el valor promedio de  $f$  en  $[0, b]$  es  $\frac{b}{2}$ .
- Sea  $f(x) = x^2$ , para  $a \leq x \leq b$ . Muestre que:

- a. el valor promedio de  $f$  en  $[a, b]$  es  $\frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)$ .
- b. la ecuación  $x^2 = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)$  tiene una solución en el intervalo  $[a, b]$ .
4. Muestre, utilizando el Teorema del Valor Medio para integrales, que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $m \leq f(x) \leq M$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

5. Muestre, utilizando el Teorema del Valor Medio para integrales, que si  $f$  es continua y  $f(x) \geq (>) 0$ , para  $a \leq x \leq b$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq (>) 0$ .
6. En el Ejemplo 1.34, el modelo de temperatura es muy simple y no refleja la realidad ¿Puede encontrar un modelo más realista?

Hasta este momento, sabemos que, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces podemos garantizar la existencia del único número  $\int_a^b f(x) dx$ . De aquí en adelante nuestros esfuerzos se centrarán en tratar de determinar, en la medida de lo posible, este número.

## 1.7 Teorema Fundamental de Cálculo

El teorema que estudiaremos en esta sección vino a revolucionar el cálculo del siglo XVII, relacionando la integral con la derivada. Se estima que el Teorema Fundamental del Cálculo es un gran logro de la mente humana. Fue el matemático Isaac Barrow quien dio una primera demostración de este teorema, la cual fue completamente geométrica y muy distinta a la que entregaremos en esta monografía. Isaac Barrow (1630-1677) fue profesor en la Universidad de Cambridge, Inglaterra y tuvo dentro de sus estudiantes a Isaac Newton. Pero, este último y Leibniz son los que se llevan los elogios de este magnífico descubrimiento, debido a que fueron ellos los que lograron comprender su importancia, entregando grandes aportes al desarrollo de la ciencia en base a este espectacular resultado.

El Teorema 1.22, dado en la Sección 1.5, garantiza que, si  $f$  es una función continua en un intervalo  $[a, b]$ , entonces el número  $\int_a^b f(x) dx$  existe y el Teorema 1.24, por otra parte, nos entrega un método para el cálculo de integrales definidas a través de sumas de Riemann,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k.$$

Es obvio que resulta poco práctico la utilización de este último método. En esta sección, entregaremos una herramienta para determinar el número  $\int_a^b f(x) dx$ , en algunas ocasiones, de manera más eficiente.

Partamos considerando una función continua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  y elijamos un real  $c \in I$ . Entonces, para cada  $x \in I$ ,  $f$  es continua en el intervalo cerrado de extremos  $c$  y  $x$ . Por tanto, la función

$$G(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad t \in I,$$

resulta estar bien definida. Por ejemplo, si  $f(x) = x$ , hemos visto que

$$G(x) = \int_c^x t dt = \frac{1}{2} (x^2 - c^2).$$

Notemos que, en este caso,

$$G'(x) = x = f(x).$$

Miremos esta última propiedad en general. Si  $f$  es una función como la de la Figura 1.16 y si  $c < x < z$ , entonces

$$G(z) = \int_c^z f(t) dt = \text{Área encerrada por la gráfica de } f \text{ y el eje } x \text{ en } [c, z] \text{ y}$$

$$G(x) = \int_c^x f(t) dt = \text{Área encerrada por la gráfica de } f \text{ y el eje } x \text{ en } [c, x].$$

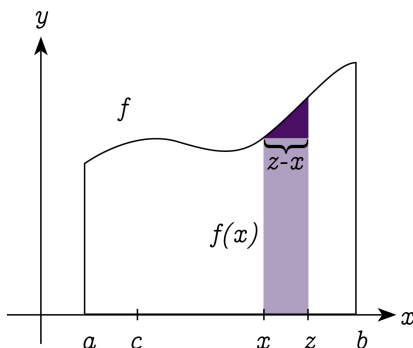


FIGURA 1.16. Teorema Fundamental del Cálculo

Por lo tanto,  $G(z) - G(x)$  es el área encerrada por la gráfica de  $f$ , entre  $x$  y  $z$  (área achurada de la Figura 1.16) y si  $z$  está suficientemente cerca de  $x$ , entonces esta área es, aproximadamente,  $f(x)(z - x)$  (área del rectángulo achurado de la Figura 1.16). Así,

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} \approx f(x), \quad \text{si } z \approx x.$$

El siguiente teorema, que llamaremos “Primer Teorema Fundamental del Cálculo”, muestra que toda función continua admite una función que, al derivarla, nos entrega la original.

**Teorema 1.39.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $c \in I$ . Entonces, la función  $G$ , definida por*

$$G(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in I,$$

*es derivable en  $I$  y  $G'(x) = f(x)$  en el interior de  $I$ .*

**Demostración.** Sea  $x$  un punto en el interior de  $I$ . Demostremos que

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{G(z) - G(x)}{z - x} = f(x).$$

Por propiedades de la integral

$$G(z) - G(x) = \int_c^z f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^z f(t)dt.$$

Ahora, como  $f$  es continua en el intervalo cerrado de extremos  $x$  y  $z$ , se tiene que para  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |t - x| < \delta &\Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon \\ &\Rightarrow f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Luego, si  $0 < |z - x| < \delta$ , entonces el Teorema 1.18 dice que

$$\begin{aligned} x < z &\Rightarrow (f(x) - \epsilon)(z - x) < G(z) - G(x) < (f(x) + \epsilon)(z - x) \quad y \\ z < x &\Rightarrow (f(x) - \epsilon)(x - z) < G(x) - G(z) < (f(x) + \epsilon)(x - z), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$f(x) - \epsilon < \frac{G(z) - G(x)}{z - x} < f(x) + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{G(z) - G(x)}{z - x} = f(x).$$

□

### Ejemplo 1.40.

1. Sea  $I = (0, \infty)$  y  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in I$ . Entonces, la función definida por

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

es derivable y  $G'(x) = \frac{1}{x}$ .

2. Un caso más general. Supongamos que  $f$  es una función continua y  $g$  es derivable en  $I$ , entonces para  $c \in I$ , la función definida por

$$F(x) = \int_c^{g(x)} f(t)dt,$$

es derivable en el interior de  $I$ . En efecto,  $F(x) = G(g(x))$  es la composición de las funciones derivables  $G(x) = \int_c^x f(t)dt$  y  $g(x)$ . Entonces, usando el primer Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena, tenemos que

$$F'(x) = f(g(x))g'(x).$$



Más aún, sea

$$H(x) = \int_{k(x)}^{g(x)} f(t) dt,$$

con  $g$  y  $k$  funciones derivables en  $I$ . Entonces,  $H$  es derivable en el interior de  $I$  y

$$H'(x) = f(g(x))g'(x) - f(k(x))k'(x).$$

**Definición 1.41.** Una función  $F$  tal que  $F' = f$  se llama Primitiva, Antiderivada o Integral Indefinida de  $f$ .

**Observación 1.42.**

1. De acuerdo al Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función  $G$  es una primitiva de  $f$ .
2. Notemos que, si  $F$  y  $G$  son dos primitivas de  $f$ , entonces  $F$  y  $G$  difieren en una constante, es decir, existe una constante  $C$  tal que  $G = F + C$ . En efecto, esto resulta de las reglas de derivación:

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

En consecuencia,  $G - F$  es una constante, es decir  $G(x) - F(x) = C$ , para todo  $x$ . La Tabla 1.1 muestra algunas funciones con sus respectivas primitivas. Esta tabla será de utilidad al momento de calcular integrales definidas.

Función	Primitiva
$c$ ( $c$ cte.)	$cx + C$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$x^2$	$\frac{1}{3}x^3 + C$
$x^r$ ( $r \neq -1$ )	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$px + q$	$\frac{1}{2}px^2 + qx + C$
$\text{sen } x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\text{sen } x + C$

TABLA 1.1. Primitivas

A continuación, presentamos el resultado más importante de la monografía que se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Teorema 1.43** (TFC). *Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y sea  $F$  una de sus primitivas. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Demostración.** *Notar que para la función  $G(x) = \int_a^x f(x)dx$ , dada en el Teorema 1.39, se tiene*

$$G(a) = 0 \quad \text{y} \quad G(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

*luego,*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

*Ahora, si  $F$  es otra primitiva de  $f$ , entonces  $G$  se diferencia de  $F$  por una constante, es decir,  $G = F + C$  ( $C = \text{cte.}$ ). Por lo tanto,*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

□

#### Observación 1.44.

1. Para efectos prácticos, adoptaremos la siguiente notación

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Puesto que  $G' = f$ , lo que realmente tenemos es lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x).$$

Ahora, por el Teorema Fundamental del Cálculo, también tenemos

$$\int_a^x \frac{d}{dt} F(t)dt = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Por lo tanto, los procesos de derivación e integración son procesos inversos uno del otro.

3. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que para evaluar una integral definida de una cierta función  $f$ , basta con encontrar otra función, cuya derivada sea exactamente la función  $f$ . Este método no es del todo simple, pero al menos entrega una forma alternativa al cálculo del límite de sumas de Riemann.
4. El proceso de encontrar una primitiva no siempre es fácil, es por esto que necesitaremos desarrollar algunas técnicas para encontrarlas.

**Ejemplo 1.45.** Al final de la Sección 1.5.2 tratamos la famosa ley de Poiseuille. Usando esta ley, encontramos que el volumen de fluido que sale al cruzar el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4 P}{8kL},$$

resultado que obtuvimos calculando el límite de la suma de Riemann asociada. Veremos que, usando el Teorema Fundamental del Cálculo, la dificultad se reduce enormemente. Para ello, notemos que una primitiva de

$$f(r) = \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r$$

es la función

$$F(r) = -\frac{\pi P}{4kL} (R^2 - r^2)^2,$$

pues

$$\frac{d}{dr} F(r) = \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r = f(r).$$

Entonces, usando el TFC

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r dr &= \int_0^R \frac{\pi P}{2kL} (R^2 - r^2) r dr \\ &= F(r) \Big|_0^R \\ &= F(R) - F(0) = \frac{\pi R^4 P}{8kL}, \end{aligned}$$

que corresponde a lo encontrado anteriormente.

**Ejercicio 1.46.**

1. Evalúe  $\int_a^b f(x) dx$  para cada  $f$ :
  - a.  $f(x) = \sin x$ ;  $x \in [0, \pi]$ .
  - b.  $f(x) = 1 + 2x$ ;  $x \in [1, 4]$ .
  - c.  $f(x) = \sec^2 x$ ;  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi]$ .
2. Realice un estudio completo de la gráfica de la función  $G$ , es decir, estudie dónde crece, dónde decrece, máximos y/o mínimo relativos, puntos de inflexión y concavidades, donde:
  - a.  $G(x) = \int_0^x (t^3 - 1)^{17} dt$ ;  $x \in (-\infty, \infty)$ .
  - b.  $G(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ;  $x \in (-\infty, \infty)$ .
3. Encuentre el número  $I$  tal que:
  - a.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + 4x_i) \Delta x_{i+1} \leq I \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 4x_i) \Delta x_i,$$

para cualquier partición  $P = \{1 = x_0, x_1, \dots, x_n = 2\}$  del intervalo  $[1, 2]$ .

b.

$$\sum_{i=1}^n (\cos x_i - \operatorname{sen} x_i) \Delta x_i \leq I \leq \sum_{i=0}^{n-1} (\cos x_i - \operatorname{sen} x_i) \Delta x_{i+1},$$

para cualquier partición  $P = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = \pi/2\}$  del intervalo  $[0, \pi/2]$ .

## 1.8 Reglas de integración

En la Sección 1.7 vimos que el problema de calcular la integral de una función es equivalente a encontrar una primitiva o antiderivada de ésta. Además, mostramos que dos primitivas de una misma función  $f$  se diferencian a lo más en una constante. Así, el conjunto de todas las primitivas de  $f$  es  $\{G : G = F + C, F' = f, C \in \mathbb{R}\}$ . Esto nos permite entregar la siguiente definición.

**Definición 1.47.** Sea  $f$  una función que admite antiderivada o primitiva  $F$  (i.e.  $F' = f$ ). Llamaremos *Integral Indefinida* al conjunto de todas las primitivas de  $f$ , es decir,  $\{G : G = F + C, F' = f, C \in \mathbb{R}\}$ . A este conjunto lo denotaremos por  $\int f(x)dx$ , es decir,

$$\int f(x)dx = \{G : G = F + C, F' = f, C \in \mathbb{R}\}$$

y que, por simplicidad, escribiremos

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = cte.$$

Así, por ejemplo,

$$\int \cos x dx = \begin{cases} \operatorname{sen} x + 1 \\ \operatorname{sen} x - 2 \\ \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \\ \operatorname{sen} x + \frac{\pi}{4} \\ \text{etc.} \end{cases}.$$

La notación  $\int f(x)dx$  fue introducida por Leibnitz en su famoso artículo científico publicado el 29 de Octubre de 1675. Veremos cómo esta notación resulta muy útil y poderosa en el desarrollo del cálculo integral. Previo a mostrar ejemplos, enunciaremos el siguiente teorema:

**Teorema 1.48.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones con primitivas en un dominio común y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $f + g$  y  $cf$  admiten primitivas en dicho dominio y

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int cf(x)dx &= c \int f(x)dx. \end{aligned}$$

**Demostración.** *Esto es directo de la linealidad de la derivada:*

$$(F + G)' = F' + G'$$

$$(cF)' = cF'.$$

□

Como consecuencia del TFC y de la propiedad de linealidad de las primitivas recién demostrado tenemos el siguiente corolario que recupera el Teorema 1.13 en el caso de funciones continuas.

**Corolario 1.49.** *Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad y$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

**Ejemplo 1.50.** Calcular:

1.  $\int (5x - 3 \cos x) dx$

**Solución:**  $\int (5x - 3 \cos x) dx = 5 \int x dx - 3 \int \cos x dx = \frac{5}{2}x^2 - 3 \sin x + C.$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x^2 + 5 \sin x) dx$

**Solución :**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x^2 + 5 \sin x) dx = [2x^3 - 5 \cos x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi^3 + 5.$

3.  $\int x^n dx$ , cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solución :** Usando la regla de derivación de potencias, se encuentra que

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

4.  $\int [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0] dx$ , cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solución :** Aplicando el Ejemplo 3, la linealidad de la primitiva e inducción, tenemos que

$$\begin{aligned} \int [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0] dx \\ = \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{c_1}{2} x^2 + c_0 x + C. \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.51.**

1. Encontrar las integrales indefinidas

a.  $\int (2x^{1/3} - 3x^{3/4} + x^{2/5}) dx.$

b.  $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta) d\theta.$

c.  $\int (t + \frac{1}{t})^2 dt.$

d.  $\int \sin \theta \cos \theta d\theta.$

## 2. Evaluar las integrales definidas

a.  $\int_{-1}^2 (3x + 4) dx.$

b.  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$

c.  $\int_{-\pi/4}^0 \sec \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta.$

d.  $\int_4^7 |x - 5| dx.$

### 1.8.1 Integración por sustitución

El método que veremos en esta subsección es la contraparte de la regla de la cadena y lo llamaremos *método de integración por sustitución*. Este método nos permitirá obtener primitivas de funciones más complejas. A modo de motivación, observemos la integral indefinida

$$\int 3x^2 (x^3 + 5)^9 dx.$$

Una forma de obtener una primitiva de  $3x^2 (x^3 + 5)^9$  sería desarrollando el binomio de potencia 9, pero resulta ser un método poco eficiente.

Si  $G$  y  $f$  son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx} (G(f(x))) = G'(f(x))f'(x).$$

Es decir,  $G(f(x))$  es una primitiva de  $G'(f(x))f'(x)$ . Así, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.52.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones tales que  $g \circ f$  y  $f'$  son ambas continuas. Si  $G$  es la primitiva de  $g$ , entonces

$$(1.12) \quad \int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + C.$$

**Demostración.** Como  $G$  es la primitiva de  $g$ , tenemos que  $G' = g$ . Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (G(f(x))) = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x).$$

En términos de integrales indefinidas, esto significa

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + C.$$

□

Para aplicar más fácilmente este teorema, usaremos variables auxiliares en la fórmula (1.12). Si llamamos  $u = f(x)$ , entonces

$$\frac{du}{dx} = f'(x).$$

A modo de notación, escribiremos esta última expresión como

$$du = f'(x)dx.$$

De esta manera, (1.12) se reduce a

$$\int g(\underbrace{f(x)}_u) \underbrace{f'(x) dx}_{du} = \int g(u) du = G(u) + C = G(f(x)) + C.$$

Aplicando este método a la integral indefinida  $\int 3x^2 (x^3 + 5)^9 dx$  dada como motivación, si llamamos  $u = x^3 + 5$  tenemos que  $du = 3x^2 dx$ , por lo tanto,

$$\int 3x^2 (x^3 + 5)^9 dx = \int (\underbrace{x^3 + 5}_u)^9 \underbrace{3x^2 dx}_{du} = \int u^9 du = \frac{1}{10} u^{10} + C = \frac{1}{10} (x^3 + 5)^{10} + C.$$

**Ejemplo 1.53.** Calculemos  $\int \sin^4 x \cos x dx$ . Para ello denotamos por  $u = \sin x$ , luego  $du = \cos x dx$ . Entonces,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \left( \underbrace{\sin x}_u \right)^4 \underbrace{\cos x dx}_{du} = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

**Ejercicio 1.54.** Calcular

1.  $\int \frac{1}{2} \cos 2x dx$ .
2.  $\int x \sqrt{2x+1} dx$ .
3.  $\int x^5 \sqrt{x^2-1} dx$ .
4. Considerando la sustitución  $x = \sin u$ , muestre que

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^m u \cos^{2n+1} u) du.$$

Utilice esta fórmula para evaluar

$$\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{10} dx.$$

5. Si  $\int_0^1 f(z) dz = 8$ , entonces evalúe  $\int_0^3 f(\frac{1}{3}t) dt$ .
6. Muestre que

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

y aplíquelo a

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{10} dx.$$

**Ejemplo 1.55.** Evaluemos

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(x^6+1)^3} dx.$$

Para evaluar esta integral tenemos dos alternativas:

- (i) Primero, encontraremos la integral indefinida. Poniendo  $u = x^6 + 1$ , obtenemos  $du = 6x^5 dx$  ( $\Leftrightarrow \frac{1}{6} du = x^5 dx$ ) y luego,

$$\int \frac{x^5}{(x^6 + 1)^3} dx = -\frac{1}{12(x^6 + 1)^2} + C.$$

Entonces, aplicando los límites de integración, se concluye

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(x^6 + 1)^3} dx = -\frac{1}{12(x^6 + 1)^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{16}.$$

- (ii) Ahora veamos la integral definida. Nuevamente, ponemos  $u = x^6 + 1$ , obtenemos  $\frac{1}{6} du = x^5 dx$  y, además,

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = 0^6 + 1 = 1 \quad \text{y} \\ x = 1 &\Rightarrow u = 1^6 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(x^6 + 1)^3} dx = \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{16}.$$

### 1.8.2 Integración por partes

En esta subsección introduciremos el *método de integración por partes*, que es la contraparte de la regla de derivación de un producto. A modo de motivación consideremos la función de ecuación

$$f(x) = x \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

cuya gráfica es

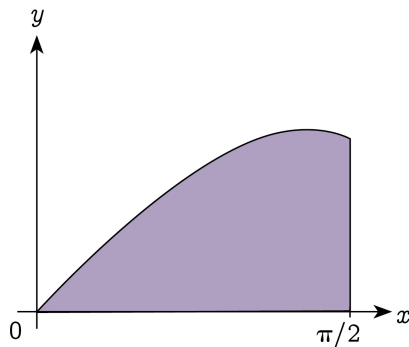


FIGURA 1.17. Integración por partes



Supongamos que queremos calcular el área bajo la curva de esta función en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , es decir, queremos calcular

$$A_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Al intentar este cálculo, se nos presentan dificultades en la búsqueda de una primitiva. Pues bien, veremos cómo la integración por partes nos entrega la solución.

Si  $F$  y  $G$  son derivables, entonces sabemos que el producto también lo es y su derivada está dada por:

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

De esto último, tenemos

$$(1.13) \quad FG' = (FG)' - F'G,$$

y, si  $F'$  y  $G'$  son ambas continuas, entonces (1.13) es integrable y su integral indefinida es:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \int F(x) G'(x) dx &= \int (FG)'(x) dx - \int F'(x) G(x) dx \\ &= F(x) G(x) - \int F'(x) G(x) dx. \end{aligned}$$

La forma de utilizar esta fórmula para obtener  $\int f(x) dx$  es tratar de re-escribir la función  $f$  en factores  $FG'$ , es decir,

$$\int f(x) dx = \int F(x) G'(x) dx,$$

aplicar (1.14) para obtener

$$(1.15) \quad \int f(x) dx = F(x) G(x) - \int G(x) F'(x) dx,$$

y esperar que la integral de la derecha

$$\int G(x) F'(x) dx,$$

sea posible de calcular. Así, por ejemplo, para calcular la integral  $\int x \cos x dx$ , debemos identificar a  $F$  y  $G$ :

$$F(x) = x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 1; \quad G'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad G(x) = \sin x$$

y luego,

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int F(x) G'(x) dx = F(x) G(x) - \int G(x) F'(x) dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

**Observación 1.56.** Si en el ejemplo anterior elegimos

$$F(x) = \cos x \quad \text{y} \quad G'(x) = x,$$

entonces

$$F'(x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{1}{2}x^2$$

y luego,

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int F(x)G'(x)dx = F(x)G(x) - \int G(x)F'(x)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cos x + \int \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x dx. \end{aligned}$$

En este caso,  $\int \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x dx$  es “más difícil” de calcular que la integral inicial, lo que nos muestra que este método depende fuertemente de la buena elección de las funciones  $F$  y  $G$ . No existe un método que nos indique, a priori, la elección correcta y sólo la ejercitación y experiencia ayudan a no elegir equivocadamente.

Con el fin de simplificar el uso de la integración por partes, usaremos las siguientes notaciones: si  $u = F(x)$ ;  $v = G(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dx} = F'(x) \quad \Rightarrow \quad du = F'(x)dx, \\ v' &= \frac{dv}{dx} = G'(x) \quad \Rightarrow \quad dv = G'(x)dx. \end{aligned}$$

Así, en (1.13), tendremos

$$\int f(x) dx = \int F(x)G'(x)dx = \int u dv = uv - \int v du,$$

es decir,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ahora bien, para evaluar la integral definida, utilizando integración por partes, debemos considerar la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Aplicando lo anterior a nuestro ejemplo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= x \operatorname{sen} x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.57.** Para evaluar  $\int 2xe^{3x}dx$ , intentamos con  $u = 2x$  y  $dv = e^{3x}dx$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx; \quad dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int 2xe^{3x}dx &= (2x) \left( \frac{1}{3}e^{3x} \right) - \int \left( \frac{1}{3}e^{3x} \right) 2dx \\ &= \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x}dx = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Ahora, si nuestra elección hubiese sido  $u = e^{3x}$  y  $dv = 2xdx$ , tendríamos

$$du = 3e^{3x}dx; \quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int 2xe^{3x}dx &= e^{3x} \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} 3e^{3x}dx \\ &= e^{3x} \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{3x}dx, \end{aligned}$$

pero esta última integral  $\int x^2 e^{3x}dx$  es más complicada que la inicial.

**Ejemplo 1.58.** En ciertas ocasiones se requiere aplicar más de una vez la integración por partes. Para evaluar  $\int_0^1 x^2 e^{-x}dx$ , comenzaremos eligiendo  $u = x^2$  y  $dv = e^{-x}dx$ , luego,

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

y, así,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x}dx &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) (2xdx) \\ (1.16) \qquad &= -e^{-1} + 2 \int_0^1 x e^{-x}dx. \end{aligned}$$

Observamos que la última integral  $\int_0^1 x e^{-x}dx$  requiere, nuevamente, el uso de la integración por partes. En este caso,

$$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

y, por tanto,

$$\int_0^1 x e^{-x}dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + (-e^{-x}) \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1.$$

Reemplazando en (1,15), tenemos

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}dx = -e^{-1} + 2(-2e^{-1} + 1) = -5e^{-1} + 2.$$

**Ejemplo 1.59.** Encontremos  $\int e^{-x} \cos x dx$ . Este ejemplo tiene por finalidad mostrar situaciones donde la integración por partes se traduce en un problema algebraico. Comencemos con

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}; \quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x,$$

luego,

$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx.$$

La última integral es del mismo tipo que la que buscamos. Aplicamos nuevamente integración por partes a esta última:

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}; \quad dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x,$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos x dx &= e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \\ &= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx. \end{aligned}$$

Trabajando esto último algebraicamente, tenemos que

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} (e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x) + C.$$

**Observación 1.60.** Es importante notar lo difícil que puede llegar a ser el proceso de integración. En el caso de la derivación, siempre es posible obtener la derivada de una función en forma explícita, en términos de sus componentes, en cambio existen funciones que tienen primitiva, pero no es posible conocerla en forma explícita. Un par de ejemplos célebres lo constituyen las funciones  $f(x) = e^{-x^2}$  y  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  con  $g(0) = 1$ , las cuales son continuas, por tanto, el TFC nos dice que ambas poseen primitiva, digamos,

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx.$$

La única forma de trabajar con estas funciones es calcular numéricamente el valor para un  $x$  dado. Antigüamente, existían tablas donde se podía encontrar los valores de estas funciones en un cierto rango, pero con la aparición de los computadores, éstas pasaron al olvido. El desarrollo de programas computacionales que permiten cálculos, tanto simbólicos como numéricos, ha revolucionado el mundo de la matemática, la física y la ingeniería, permitiendo atacar problemas "impensados" antes de la aparición de ellos.

Como comentario final de esta sección, podemos decir que existen muchas técnicas de integración que ocuparían una gran extensión de esta monografía, pero debido al desarrollo de programas de cálculo simbólico, este tema pasa a tener una menor importancia. A pesar de lo anterior, estos métodos permiten desarrollar y entender los conceptos subyacentes al cálculo.

### Ejercicio 1.61.

- Suponga que  $\int_0^1 f(t)e^t dt = 2$ ,  $f(1) = 3$  y  $f(0) = 0$ . Utilizando integración por partes, calcule

$$\int_0^1 f'(t)e^t dt.$$

- Considere un elástico de longitud  $L$ . Ubíquelo en un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que sus extremos estén en  $(-L/2, 0)$  y  $(L/2, 0)$ . Tome el elástico de su punto medio (a la altura del origen) y estírelo verticalmente lo más que pueda. Suponga que la altura máxima que alcanza es  $H$ , formando un triángulo isósceles cuya base es el segmento  $[-L/2, L/2]$  en el eje  $x$ .

- Determine la función  $f$ , cuya gráfica genera los lados de este triángulo.
- Evalúe la integral

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos \frac{\pi}{L} x dx.$$

- Recordemos que, si  $f'(x) > 0$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente y, por tanto,  $f$  tiene inversa, la que también resulta ser derivable. Esto es,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y); \quad (f^{-1})'(y) = 1/f'(x).$$

- Utilizando adecuadamente integración por partes, muestre que

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x) dx.$$

- Usando (a), muestre que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

- Aplice las fórmulas obtenidas en ejercicio 3 para calcular

$$\int_0^{1/2} \arcsen x dx.$$

5. Sea  $f$  una función continua en  $[0, 1]$ , derivable en  $(0, 1)$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ . Si suponemos que

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3},$$

evalúe

$$\int_0^1 f^{-1}(y) dy.$$

## 1.9 Cálculo de áreas

En esta sección profundizaremos en el concepto de área, obteniendo una de las primeras aplicaciones de la integral. Como recordarán, en un intento por encontrar el área de la región comprendida entre la gráfica de una función positiva y el eje  $x$  en un cierto intervalo, partimos definiendo las sumas superiores e inferiores, las cuales "aproximan" el área de la región por exceso y por defecto, respectivamente. Luego definimos de manera precisa la integral de la función como el único número comprendido entre la suma inferior y la suma superior de cualquier partición del intervalo, cuando este número existe.

Antes de continuar, recordemos un par de ejemplos. En el Ejemplo 1.9 de la Sección 1.3, se calculó la integral de la función constante,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = c \in \mathbb{R}$ , usando la definición. Si dicha constante  $c$  es positiva, entonces la región encerrada por la gráfica de esta función, el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  es un rectángulo, cuya área es  $c(b - a)$ , que naturalmente coincide con  $\int_a^b f(x) dx$ .

En el Ejemplo 1.11 de la misma sección, mostramos que  $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ , mediante un cálculo usando la definición de la integral. Por otro lado, si  $0 < a < b$ , entonces la región encerrada por la gráfica de  $f(x) = x$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , se puede descomponer en un triángulo de base  $(b - a)$  y altura  $(b - a)$  y un cuadrado de base  $(b - a)$  y altura  $a$  (Figura 1.18). Luego, el área de esta región es  $A = \frac{1}{2}(b - a)(b - a) + (b - a)a = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$  que nuevamente coincide con  $\int_a^b f(x) dx$ .

En general, si la región definida por la gráfica de una función y el eje  $x$ , entre  $a$  y  $b$  con  $a < b$ , es una región poligonal, entonces podemos calcular el área de acuerdo a los postulados de área dados en la introducción. Por otro lado, podemos calcular la integral correspondiente y obtendremos el mismo número. Así, para definir el área de una región definida por una función positiva cualquiera podemos usar la integral correspondiente, cuando la integral existe. De manera más precisa:

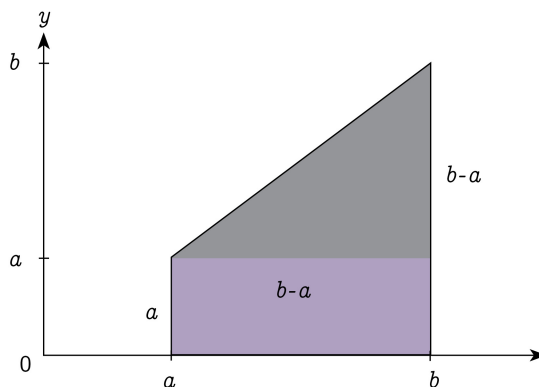


FIGURA 1.18. Área de regiones

**Definición 1.62.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y no negativa (es decir,  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ ). Si  $R$  es la región encerrada por las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ , el eje  $x$  y la gráfica de  $f$  (Figura 1.19), definimos el área de la región  $R$  como

$$A_R = \int_a^b f(x) dx.$$

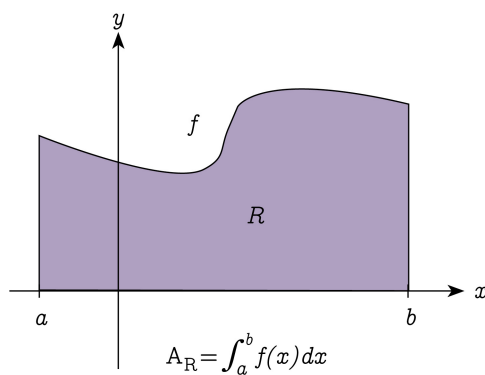


FIGURA 1.19. Área de regiones

**Observación 1.63** (Consistencia). Sea  $f$  una función integrable y no negativa en  $[a, b]$ . Mostraremos que la definición de área que hemos dado es consistente con las ideas intuitivas acerca del área expresadas en los principios presentados en la introducción.

1. En la Sección 1.4 mostramos que, si  $f$  es integrable y no negativa en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ , lo que corresponde a la idea de que el área es positiva.
2. Si  $f$  y  $h$  son funciones integrables y no negativas en  $[a, b]$ , tal que  $0 \leq h(x) \leq f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (la región bajo la gráfica de  $h$  está contenida en la región bajo la gráfica de  $f$ ), en la Sección 1.4 mostramos que, con estas mismas hipótesis, se tiene

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx,$$

que corresponde a la idea de que si una región está dentro de otra, el área de la región más pequeña no puede exceder a la de la región más grande, es decir, nuestro primer principio.

3. También vimos en la Sección 1.4 que si  $a \leq c \leq b$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

lo que corresponde a la idea de que el área de una región se puede calcular como la suma del área de dos regiones, es decir, nuestro segundo principio.

**Ejemplo 1.64.** Mostremos que el área de un círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ . Por simetría de la circunferencia, basta calcular el área del semicírculo.

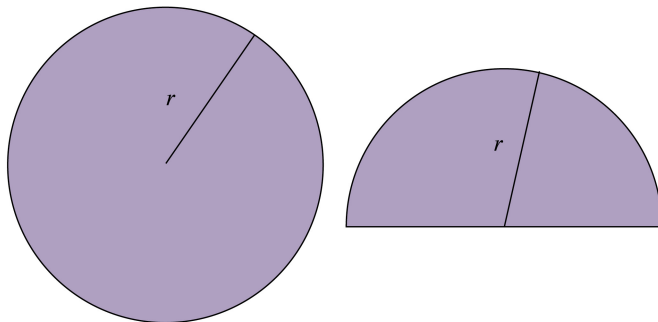


FIGURA 1.20. Área del círculo



La ecuación de la circunferencia de radio  $r$  y de centro el origen en un sistema rectangular o cartesiano, está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Despejando  $y$ , para  $y \geq 0$ , tenemos la función  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . De acuerdo a nuestra definición, el área del semicírculo viene dado por

$$A_{SC} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Ahora, nuestro interés es obtener una primitiva de  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  de manera de invocar al Teorema Fundamental del Cálculo para obtener el valor de la integral. Para ello, aplicaremos un cambio de variable conocido por sustitución trigonométrica y que es el siguiente:

$$x = r \operatorname{sen} t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = r \cos t, \quad \text{por lo tanto } dx = (r \cos t) dt.$$

Desarrollando algebraicamente, tenemos

$$r^2 - x^2 = r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t = r^2 \underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}_{\cos^2 t} = r^2 \cos^2 t.$$

De donde

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 t} = r \cos t, \quad \text{pues } \cos t \geq 0, \text{ si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x = -r \Rightarrow \operatorname{sen} t = -1 \Rightarrow t = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y}$$

$$x = r \Rightarrow \operatorname{sen} t = 1 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Así,

$$A_{SC} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos t) (r \cos t) dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

y, aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t),$$

tenemos

$$A_{SC} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{r^2}{2} \pi$$

para obtener finalmente el área del círculo  $A_C$

$$A_C = 2A_{SC} = \pi r^2.$$

Este resultado coincide con la fórmula conocida desde la secundaria.

**Ejercicio 1.65.** Generalice el resultado anterior para la región encerrada por una elipse de centro el origen, de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y muestre que el área de la región encerrada por la elipse es  $\pi ab$ .

Si consideramos dos funciones no negativas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces el área de la región  $R$  que se encuentra entre las gráficas de  $f$  y  $g$  y entre las rectas  $x = a$  y  $x = b$  queda determinada por

$$A_R = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Observamos que en esta fórmula no es importante el signo de las funciones, sino que la gráfica de  $f$  se encuentre por arriba de la de  $g$ . Con esta idea podemos definir el área de una enorme variedad de regiones del plano.

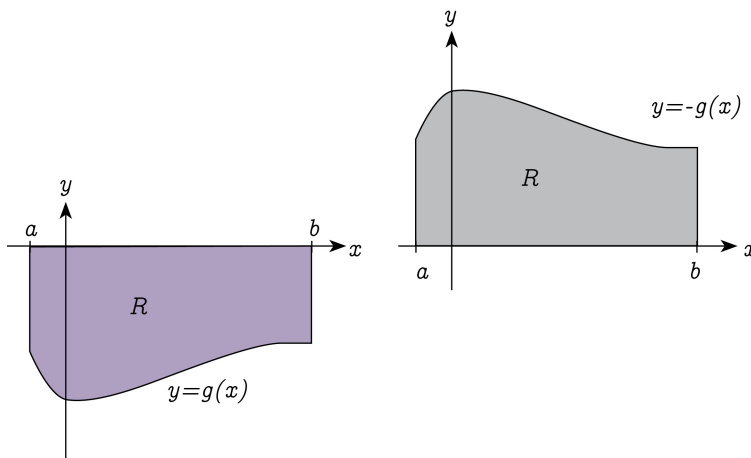


FIGURA 1.21. Áreas de regiones

Esta fórmula también aplica al caso de la Figura 1.21, donde  $g \leq 0$ ;  $x \in [a, b]$  y, por lo tanto, la gráfica de  $-g$  está sobre el eje  $x$ , como lo muestra la figura. Por simetría, ambas regiones tienen la misma área. Así obtenemos

$$A_R = \int_a^b [-g(x)] dx.$$

**Ejercicio 1.66.**

1. En la siguiente situación, ¿cómo podríamos calcular el área de la figuras achuradas?

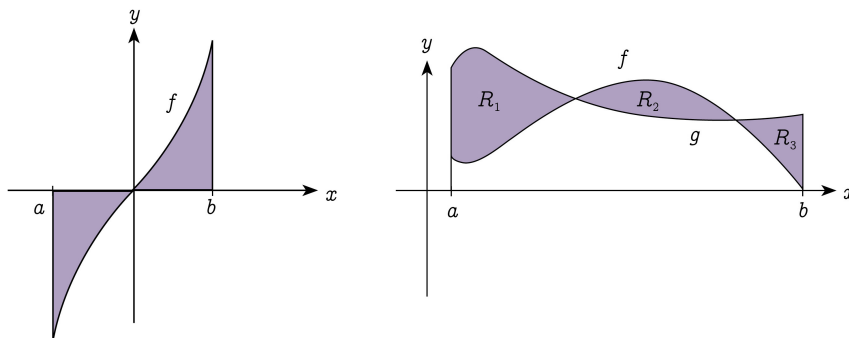


FIGURA 1.22. Áreas de regiones

2. Determinar el área de la región indicada:

- a) Encerrada por  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = \sin x$ ;  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  (Figura 1.23. a)).

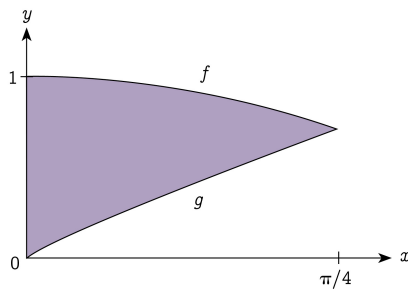


FIGURA 1.23. a)

b) Encerrada por  $y = x^2 - x - 4$  e  $y = x - 1$  (Figura 1.23. b)).

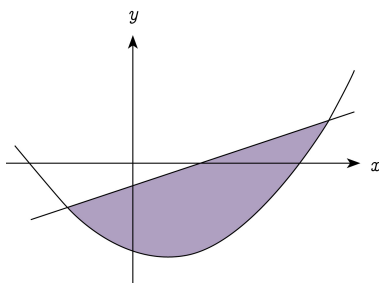


FIGURA 1.23 b)

c) Encerrada por  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \cos x$ ;  $x \in [0, 2\pi]$  (Figura 1.23. c)).

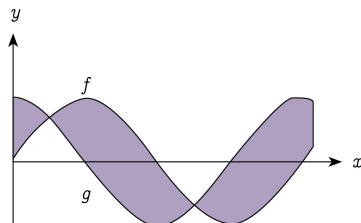


FIGURA 1.23 c)

3. Se quiere producir cerámica con dos colores y con un diseño como lo muestra la Figura 1.23. d), donde las curvas son  $y = x^{\frac{1}{2}}$  e  $y = x^2$ .

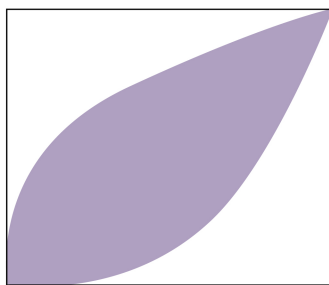


FIGURA 1.23 d)

El productor necesita saber la cantidad del color blanco que debe usar en cada cerámica, versus la cantidad del color gris.

### 1.9.1 Una mirada más profunda al número $\pi$

Como es conocido en geometría, el número  $\pi$  es la constante que relaciona el perímetro  $C$  de una circunferencia con su diámetro  $d$ , a través de la proporción  $C/d$ . Los primeros registros que se tienen de la existencia del número  $\pi$  se remontan a la cultura egipcia (1650 A.C.) y babilónica (1600 A.C.). Para la primera cultura, la evidencia está en un papiro y ese registro indica que  $\pi \approx \frac{256}{81} = 3,16049$ . En cambio, para la segunda cultura la evidencia está en una lápida y ese registro indica que  $\pi \approx \frac{25}{8} = 3,125$ . Después, Arquímedes (250 A.C.) fue capaz de determinar que el valor de  $\pi$  está comprendido entre 3,1408 y 3,1429. El método usado por Arquímedes consistía en circunscribir e inscribir polígonos regulares de  $n$ -lados y calcular el perímetro de dichos polígonos. Arquímedes empezó con hexágonos circunscritos e inscritos y fue doblando el número de lados hasta llegar a polígonos de 96 lados. Recién en el siglo XVII este número fue identificado con la letra griega  $\pi$ , letra que viene de la palabra *periphēria*, nombre que los griegos le daban al perímetro de la circunferencia.

Una forma de entender que esta constante es independiente de la circunferencia, es la siguiente: consideremos dos circunferencias  $C$  y  $C'$  con diámetros  $d$  y  $d'$ , radios  $r$  y  $r'$  y con polígonos regulares de  $n$  lados inscritos.

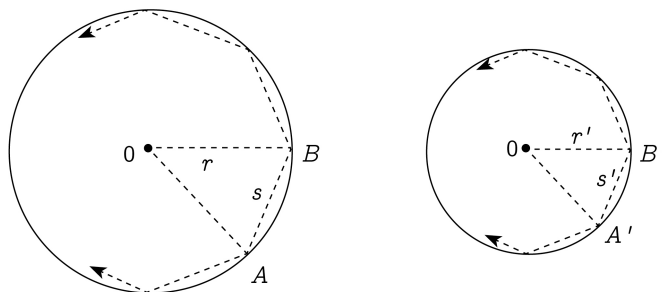


FIGURA 1.24. El número  $\pi$

Los triángulos que se ven en la Figura 1.23 son semejantes, por tanto, tenemos

$$\frac{ns}{ns'} = \frac{s}{s'} = \frac{r}{r'} = \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d'} = \frac{d}{d'}.$$

Ahora, suponiendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns = C \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} ns' = C',$$

que intuitivamente equivale a aumentar indefinidamente el número de lados de los polígonos regulares inscritos, tenemos que

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} \Leftrightarrow \frac{C}{d} = \frac{C'}{d'} = \pi.$$

Esta constante  $\pi$  resulta ser un número irracional y a continuación mostraremos este hecho utilizando la teoría de integración.

**Teorema 1.67.**  $\pi$  es un número irracional.

**Demostración.** Notemos que para mostrar la irracionalidad de  $\pi$  es suficiente mostrar que  $\pi^2$  es irracional. Supondremos, por el contrario, que  $\pi^2 = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , situación que nos llevará a un absurdo.

Tomemos un natural  $n$  fijo, pero arbitrario y consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}.$$

Usando el teorema del binomio de Newton, la función  $f$  se puede reescribir como

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} k_i x^i,$$

con los coeficientes  $k_i \in \mathbb{N}$ . Además, esta función satisface:

1.  $f(0) = 0$ .
2. Si  $x \in (0, 1)$ , entonces  $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ .
3. Las derivadas de  $f$  están dadas por

$$(1.17) \quad f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n, \\ 0 & \text{si } 2n < m, \\ \frac{m!}{n!} k_m & \text{si } n \leq m \leq 2n. \end{cases}$$

y  $f^{(m)}(0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

4.  $f(1-x) = f(x)$ .

Se invita al lector a demostrar estas cuatro propiedades. Notemos que gracias a la Propiedad 4. las Propiedades 1. y 3. también valen para  $x = 1$ . Intentaremos encontrar una primitiva de la función

$$\pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x.$$

Para ello, definimos la siguiente función  $F$  en términos de  $f$

$$(1.18) \quad F(x) = b^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \pi^{2n-j} f^{(2j)}(x),$$

donde  $a$  y  $b$  son números naturales tales que  $a = \pi^2 b$ . Usando (1.17), tenemos que  $F(0)$ ,  $F(1)$  son enteros y después de un cálculo, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x] &= [F''(x) + F(x)] \operatorname{sen} \pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \operatorname{sen} \pi x. \end{aligned}$$

Como  $a = b\pi^2$ , tenemos que  $b^n \pi^{2n+2} = \pi^2 a^n$  y entonces obtenemos que

$$\frac{d}{dx} [F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x] = \pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x.$$

Por lo tanto,  $F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x$  es una primitiva de  $\pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x$  y, de acuerdo al Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned}
 (1.19) \quad \int_0^1 \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} [F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x] \Big|_0^1 \\
 &= F(1) + F(0),
 \end{aligned}$$

lo que nos dice que  $\int_0^1 \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx$  es un entero, pues  $F(0)$  y  $F(1)$  lo son. Por otro lado, como  $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ , tenemos que

$$0 < \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x < \frac{\pi a^n}{n!}$$

y, por la monotonía de la integral, concluimos que

$$(1.20) \quad 0 < \int_0^1 \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \int_0^1 \frac{\pi a^n}{n!} dx = \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Finalmente, recordamos que el número natural  $n$  es arbitrario, entonces podemos elegir un  $n$  suficientemente grande de tal manera que  $\pi a^n < n!$  o, equivalentemente,  $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$ , obteniendo una contradicción, pues en la ecuación (1.19), el término  $\int_0^1 \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx$  es un entero, en cambio, en la ecuación (1.20) no lo es. Por lo tanto,  $\pi$  no puede ser un número racional.  $\square$

El número  $\pi$ , como ya vimos, es un número irracional, pero tiene una naturaleza muy distinta a otros irracionales como  $\sqrt{2}$  ó  $\sqrt{3}$ . Los números  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2 & \text{y} \\
 x^2 &= 3.
 \end{aligned}$$

En general, un número se dice *algebraico* si es solución de una ecuación polinomial con coeficientes enteros y se dice *trascendental*, si no es algebraico. Así vemos que  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  son números algebraicos. Por otro lado, se ha demostrado, y no es fácil hacerlo, que  $\pi$  es un número trascendental, es decir no es solución de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Este hecho, aparentemente algebraico, tiene una consecuencia muy importante en geometría, a saber, no se puede construir con regla y compás un cuadrado de área  $\pi$ , es decir, no se puede *cuadrar el círculo con regla y compás*. La cuadratura del círculo fue uno de los problemas más enigmáticos para los griegos. Cuadrar superficies, entre ellas el círculo, consiste en calcular el área de un cuadrado de superficie equivalente a la superficie buscada, en términos prácticos, este proceso, en la mayoría de los casos, resulta mucho más simple.

## Las Lunas de Hipócrates.

Fue Hipócrates de Quios quien creó una falsa esperanza de cuadrar el círculo al resolver la cuadratura de ciertas figuras que él llamó lúnulas o simplemente lunas. Pero, ¿en qué consistió la cuadratura de las lunas de Hipócrates de Quios? Una luna para nosotros será la intersección de dos círculos de manera que uno ellos pase por el centro del otro, como lo muestra la figura:

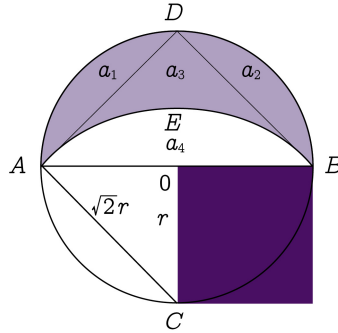


FIGURA 1.25. Lunas de Hipócrates

Distingamos los dos círculos involucrados,  $\odot ADB$  con diámetro  $\overline{AB}$  y  $\odot AEB$  con centro en  $C$ . Lo propuesto por Hipócrates dice que el área de la luna es igual al área del cuadrado achurado. Notar que el radio del círculo  $\odot AEB$  es  $\sqrt{2}r$ , por el teorema de Pitágoras, donde  $r$  es el radio de  $\odot ADB$ . La demostración es bastante ingeniosa y depende del siguiente resultado, conocido en geometría:

”El cuociente entre las áreas achuradas con ángulos centrales iguales, es igual al cuociente entre los cuadrados de sus respectivos radios”.

Al observar la Figura 1.24, tenemos que los segmentos  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  son tangentes a la circunferencia de  $\odot AEB$  y, por tanto,  $\overline{AD} = \overline{BD}$ . Ahora, si llamamos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  las áreas de la regiones, entonces tenemos que

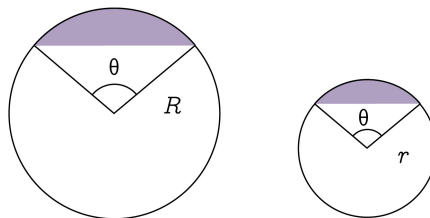
$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{r^2}{(\sqrt{2}r)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2}a_4 = a_2.$$

Así, el área de la luna es

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_3 = \text{área del } \triangle ABD = \frac{1}{2}(2r)r = r^2,$$

que es igual al área del cuadrado achurado.





$$\frac{A_r}{A_R} = \frac{r^2}{R^2}$$

FIGURA 1.26. Áreas de figuras semejantes

**Ejercicio 1.68.** Compruebe, utilizando el cálculo de áreas con integrales, la cuadratura de las lunas de Hipócrates.

Consideremos ahora, relaciones del tipo  $f(x, y) = C$ , por ejemplo,

$$\frac{1}{2}y^2 - x = 0.$$

Se quiere determinar el área encerrada por la gráfica de la curvas  $\frac{1}{2}y^2 - x = 0$  y  $2x - y = 2$  (ver Figura 1.27).

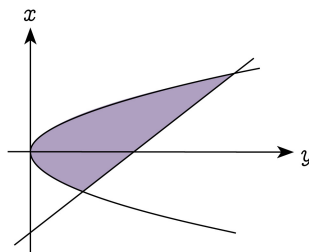


FIGURA 1.27. Área de regiones

Para esto, primero determinamos los puntos de intersección de las curvas, las cuales resultan ser  $(\frac{1}{2}, -1)$  y  $(2, 2)$ . Es muy conveniente mirar la región considerada como una región encerrada por **funciones dependientes de la variable  $y$** , a diferencia de los casos anteriores en que las funciones eran dependientes de la variable  $x$  :

$$x = k(y) = \frac{1}{2}y^2; \quad x = h(y) = \frac{1}{2}(y + 2).$$

Notar que  $0 \leq k(y) \leq h(y)$  y, por tanto, el área encerrada por estas funciones viene dada por:

$$A = \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}(y+2) - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \frac{9}{4}.$$

**Ejercicio 1.69.** Encontrar el área de la región  $R$  encerrada por:

1.  $x = y + \sin y$ ;  $y \in [0, \pi/2]$  y el eje  $y$ .
2. la gráfica de  $f$  y el eje  $x$ , donde
  - a.  $f(x) = 3x^2 + 4$ ,  $x \in [-1, 1]$ .
  - b.  $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$ ,  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ .
  - c.  $f(x) = 8x^{1/3} - x^{-1/3}$ ,  $x \in [1, 8]$ .
3. las siguientes figuras:

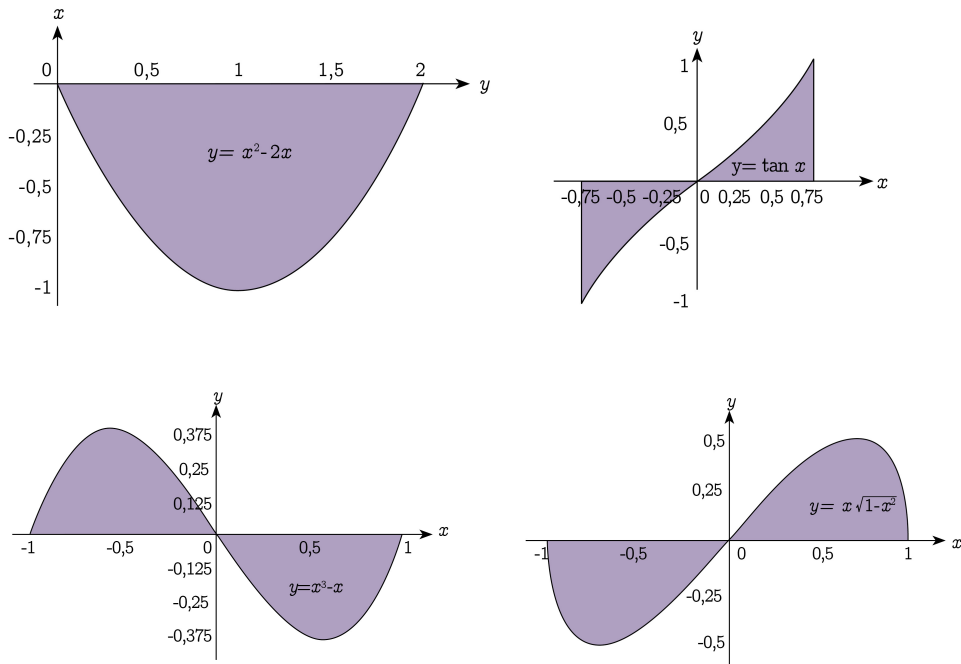


FIGURA 1.28. Cálculo de áreas

## 1.10 La función logaritmo

La motivación de la integral fue basada en cálculo de áreas de regiones encerradas por funciones. De hecho, hemos utilizado la integral para calcular áreas, pero este concepto no sólo se remite a dichas aplicaciones. Como veremos en esta sección, la

integral nos permitirá definir nuevas funciones o justificar la existencia de algunas ya conocidas.

Es probable que el lector haya tenido la oportunidad de conocer el logaritmo en base 10. La definición que usualmente se entrega es: para  $x > 0$ ,

$$(1.21) \quad \log x = y \Leftrightarrow 10^y = x.$$

En base a esta definición es posible demostrar, por ejemplo, que

$$\log(uv) = \log u + \log v.$$

Esta definición de la función logaritmo es bien clara para ciertos números como, por ejemplo, para  $x = 10^3$  se obtiene  $y = \log 10^3 = 3$ . Si  $x = 10^{\sqrt{2}}$  o  $x = 10^\pi$ , sería fácil decir que  $y = \sqrt{2}$  o  $y = \pi$ , respectivamente. Pero en realidad ¿qué sentido tiene  $10^{\sqrt{2}}$  o  $10^\pi$ ? y si consideramos  $x = 2$  o  $x = 5$  ¿qué sentido tiene  $\log 2$  o  $\log 5$ ?

Para definir  $10^{\sqrt{2}}$ ,  $\log 2$  o en general  $b^u$  y  $\log u$ , con  $u \in \mathbb{R}$ , necesitamos conceptos más profundos de los números reales tales como el Principio de Supremo. Y luego se se desearía tener la ley del producto de potencias,  $b^u b^v = b^{u+v}$  y otras propiedades de las potencias y del logaritmo obtenidas a partir de esta definición.

Afortunadamente, es posible obtener todo lo anterior desde el punto de vista de la integral, definiendo una función que, después de analizar sus propiedades, nos daremos cuenta que es una función logaritmo. Esta función es similar al logaritmo en base 10 y la llamaremos Función Logaritmo Natural.

Para definir este logaritmo, comencemos estudiando la función continua

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

La gráfica de  $f$  es bien conocida:

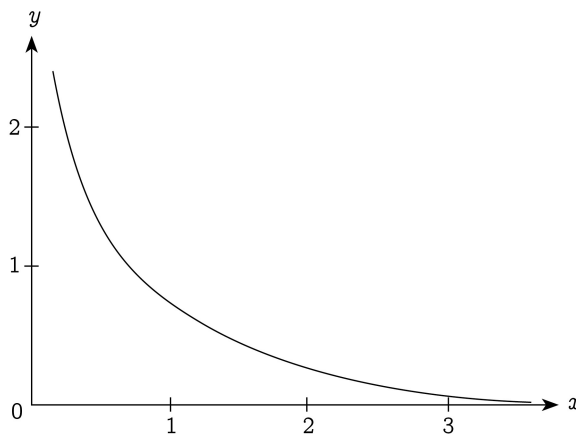


FIGURA 1.29. Función  $\frac{1}{x}$

Según el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función  $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

es derivable y, por tanto, continua.  $G$  es una primitiva de  $f$ .

Uno puede evaluar la función  $G$ , por ejemplo en  $x = 2$  y obtenemos

$$G(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt,$$

pero, inmediatamente surge la pregunta, ¿cuál es este número? o en general ¿cómo es la función  $G$ ?

A pesar de las dificultades para evaluar  $G$ , gracias a que  $G'(x) = \frac{1}{x}$ , podemos conocer muchas propiedades de su gráfica, utilizando todas las herramientas que nos entrega el Cálculo Diferencial.

Observemos que, como  $f(x) > 0$ , se tiene

$$x > 1 \Rightarrow G(x) > 0; \quad 0 < x < 1 \Rightarrow G(x) < 0,$$

y como  $G(1) = 0$ , la gráfica de  $G$  corta al eje  $x$  en 1. Además,  $G'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ;  $x \in (0, \infty)$ , lo que nos dice que  $G$  es estrictamente creciente. Por otro lado, como  $G''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ;  $x \in (0, \infty)$ , se tiene que  $G$  es cóncava hacia abajo. Así, un bosquejo de la gráfica de  $G$  es, aproximadamente, lo que muestra la Figura 1.30:

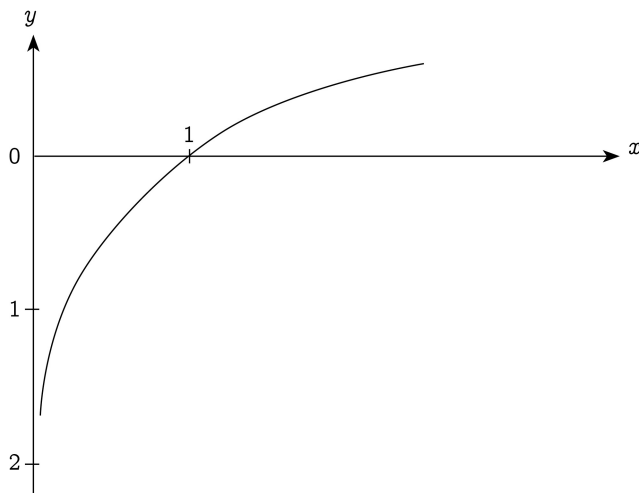


FIGURA 1.30. Función logarítmica

La función  $G$  tiene las siguientes propiedades:

**Teorema 1.70.** Para  $b > 0$  y  $c > 0$ , se tiene

$$G(bc) = G(b) + G(c).$$

**Demostración.** Fijaremos  $b > 0$  y definiremos  $g(x) = G(bx)$ , para  $x > 0$ . Por la Regla de la Cadena,

$$g'(x) = \frac{1}{bx}b = \frac{1}{x}.$$

Luego,  $G$  y  $g$  son ambas primitivas de  $\frac{1}{x}$ . Por tanto, estas funciones difieren en una constante, es decir,

$$g(x) = G(bx) = G(x) + C; \quad x > 0.$$

Si evaluamos  $g$  en  $x = 1$ , tenemos  $g(1) = G(b) = G(1) + C = C$ . Así,  $G(bx) = G(x) + G(b)$  y, por tanto, si  $x = c$ , tenemos

$$G(bc) = G(b) + G(c).$$

□

En suma, de acuerdo al teorema la función  $G$  transforma la multiplicación en adición. Denotaremos a esta función  $G$  por  $\ln$  y la llamaremos Función Logaritmo Natural o Logaritmo Neperiano, en memoria del matemático escocés John Neper (1550-1617). Neper, en su afán de simplificar las operaciones aritméticas, transformó la multiplicación en adición y la división en restas o diferencias. Históricamente, el primer logaritmo que se utilizaba era el logaritmo en base 10, llamado logaritmo común, debido al sistema decimal que imperaba. Aun cuando este sistema sigue en uso, sorpresivamente, el logaritmo en base 2 irrumpe gracias al desarrollo de la computación. Sin embargo, el logaritmo más recurrente en las aplicaciones es el logaritmo natural que acabamos de definir. Si hablamos de logaritmo en base 10 y en base 2, nos podríamos preguntar si el logaritmo natural está asociado a alguna base. La respuesta es afirmativa, como lo veremos más adelante.

Por el momento, notemos que la función  $G = \ln$  es una primitiva de la función  $f$  de ecuación  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Por tanto, podemos escribir

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C; \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a; \quad \text{para } 0 < a < b$$

Otras propiedades de la función  $G = \ln$  son las siguientes:

**Corolario 1.71.** Supongamos  $b, c > 0$ . Entonces,

1.  $\ln b^r = r \ln b$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ ;
2.  $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ ;
3.  $\ln \frac{b}{c} = \ln b - \ln c$ .

**Demostración.** Definamos

$$g(x) = \ln x^r, \quad x > 0.$$

1. Su derivada es

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{r}{x} &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{r} g \right)'(x) = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{r} g(x) = \ln x + C \\ (1.22) \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{r} \ln x^r = \ln x + C. \end{aligned}$$

Evaluando (21) en  $x = 1$ , obtenemos que  $C = 0$ . Así, para  $x = b$ ,

$$(1.23) \quad \ln b^r = r \ln b.$$

2. Basta tomar en (22)  $r = -1$  para tener

$$\ln \frac{1}{b} = \ln b^{-1} = -\ln b.$$

3. La tercera resulta de las propiedades anteriores de  $\ln$  :

$$\begin{aligned} \ln \frac{b}{c} &= \ln bc^{-1} \\ &= \ln b + \ln c^{-1} \\ &= \ln b - \ln c. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.72.** Si  $f$  es positiva, entonces podemos definir  $\ln(f(x))$ . Si, además,  $f$  es derivable, entonces la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**Ejercicio 1.73.** Obtener la siguientes derivadas:

1.  $\frac{d}{dx} \ln(x^2 + x); \quad x > 0.$
2.  $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}; \quad x > 3.$
3.  $\frac{d}{dx} \ln(\ln t).$

Aún cuando en las demostraciones del Teorema 1.70 y del Corolario 1.71 se utilizaron técnicas del cálculo, las propiedades de la función Logaritmo Natural obtenidas son propiedades de tipo algebraico.

A continuación, presentaremos otras propiedades del logaritmo natural:

1. Por el Teorema Fundamental del Cálculo,  $\ln$  es continua en  $(0, \infty)$ .
2. Como  $\ln b^n = n \ln b$  y  $\ln 1 = 0$ , para  $b > 1$ ,  $b$  fijo, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln b = \infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln b^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \ln b = -\infty.\end{aligned}$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  y, por tanto,  $\ln$  es sobreyectiva.

3. Observando la Figura 1.30, nos damos cuenta que la función  $\ln$  crece con cierta lentitud, más aún, se afirma que su crecimiento es más lento que cualquier polinomio ¿cómo podemos entender esto? El siguiente resultado nos da la respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \text{cualquiera sea } n \in \mathbb{N}.$$

Para demostrar este resultado, partimos con la simple desigualdad conocida  $\sqrt{t} \leq t$ , de donde tenemos para  $t \geq 1$ :

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Integrando esta última desigualdad se obtiene

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(\sqrt{x} - 1)$$

y dividiendo por  $x^n$

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq 2 \left( \frac{1}{x^{n-1/2}} - \frac{1}{x^n} \right).$$

Así, por el Teorema del Sandwich, se concluye

$$(1.24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

Esta propiedad tiene una gran utilidad en la confección de gráficos de datos. Por ejemplo, si los datos son de gran magnitud, podemos reescalar, utilizando en uno o ambos ejes el logaritmo de los datos. Ejemplos se pueden encontrar en la escala de Richter, que mide magnitudes de sismos, y las escalas utilizadas en las telecomunicaciones, que miden los decibeles.

4. Hemos demostrado, entre otras propiedades, que la función  $\ln$  es biyectiva, por tanto, la ecuación

$$\ln x = 1$$

tiene una única solución. A esta solución la denotaremos con la letra  $e$ . Así,

$$\ln e = 1.$$

El número  $e$  tiene algunas características comunes con el número  $\pi$ , aún cuando su aparición dista en el tiempo. La primera aparición del número  $e$ , de manera muy incipiente, fue el año 1618 en un trabajo de John Neper sobre logaritmos y que se publicó después de su muerte. Pero, no fue hasta 1648 que el número  $e$  irrumpe con fuerza en el ambiente matemático, con la publicación del libro "Introduction in Analysis Infinitorum" de Leonhard Euler, en donde podemos encontrar un completo tratamiento de las ideas que circundaban a este número. Mayores detalles del número  $e$  serán analizadas en la Sección 3.2.5 de esta monografía.

Sin lugar a dudas, los números 0, 1,  $\pi$ ,  $e$  y el número imaginario  $i$  son de gran importancia en la matemática y fue Euler quien los relacionó a través de una bella identidad

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

A continuación, entregamos una forma diferente de expresar este número  $e$ . Sabemos que  $\ln$  es derivable en su dominio, en particular en  $x = 1$ , donde  $\frac{d}{dx} \ln x|_{x=1} = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dx} \ln x|_{x=1} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \overbrace{\ln 1}^0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \Delta x)^{1/\Delta x}. \end{aligned}$$

Como este límite existe, podemos tomar la sucesión  $x_n = \frac{1}{n}$  para obtener

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Por la continuidad de  $\ln$  tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \ln \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

de donde, usando que  $\ln$  es inyectiva y  $\ln e = 1$ , concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Se puede comprobar que esta convergencia es bastante lenta. Sugerimos confeccionar una tabla con los primeros 10 términos de la sucesión para verificar la lentitud de convergencia.

Aún cuando no conocemos explícitamente este número neperiano, mostraremos que

$$2 < e < 3.$$

Como la función  $\ln$  es estrictamente creciente, esto último equivale a mostrar que

$$(1.25) \quad \ln 2 < 1 < \ln 3.$$



Pues bien, para comprobar (1,24), usaremos las sumas de Riemann:

Para la desigualdad  $1 < \ln 3$ , utilizaremos la partición  $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3\}$  y la suma inferior  $\sum_{i=1}^8 m_i \Delta x_i$ , con  $m_i = \frac{1}{x_i}$  y  $\Delta x_i = \frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \int_1^3 \frac{1}{x} dx \geq \sum_{i=1}^8 m_i \Delta x_i \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{4}{8} + \frac{4}{9} + \frac{4}{10} + \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{28\,271}{27\,720} > 1. \end{aligned}$$

Para mostrar que  $\ln 2 < 1$ , utilizaremos la partición  $\mathcal{P} = \{1, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}, \frac{13}{8}, \frac{14}{8}, \frac{15}{8}, 2\}$  y la suma superior  $\sum_{i=0}^7 M_i \Delta x_i$ , con  $M_i = \frac{1}{x_{i-1}}$  y  $\Delta x_i = \frac{1}{8}$ .

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^8 M_i \Delta x_i \\ &= \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \frac{8}{12} + \frac{8}{13} + \frac{8}{14} + \frac{8}{15} \right) \\ &= \frac{52\,270}{72\,072} < 1. \end{aligned}$$

Con el fin de tener una primitiva para la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definimos la función  $g(x) = \ln(-x)$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  y la derivamos, utilizando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

De esta manera

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

**Ejemplo 1.74.** Expresar la integral  $\int_{-8}^{-7} \frac{1}{x} dx$  en términos de logaritmos.

$$\int_{-8}^{-7} \frac{1}{x} dx = \ln|-7| - \ln|-8| = \ln 7 - \ln 8 = \ln \frac{7}{8}.$$

La fórmula de la derivada de la función compuesta  $\ln f(x)$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

nos permitirá determinar primitivas de funciones del tipo  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ . En efecto, utilizando la sustitución  $u = f(x)$ , tenemos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_u \overbrace{f'(x) dx}^{du} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C.$$

**Ejemplo 1.75.** Encontrar  $\int \frac{x^4}{x^5+1} dx$ . Haciendo

$$u = x^5 + 1,$$

$$du = 5x^4 dx \Leftrightarrow \frac{1}{5} du = x^4 dx,$$

tenemos

$$\int \frac{x^4}{x^5+1} dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \ln |u| + C = \frac{1}{5} \ln |x^5 + 1| + C.$$

**Ejemplo 1.76.** Calculemos  $\int \sec x dx$ . Notemos que

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx,$$

luego, utilizando la sustitución  $u = \sec x + \tan x$ , tenemos que

$$du = (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$$

y por lo tanto,

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

**Ejemplo 1.77.** Desde su aparición, el logaritmo ha sido usado fuertemente en las aplicaciones a la física, en particular en muchas escalas de intensidad. Un ejemplo de esto es la escala de Richter que mide la magnitud de un sismo. Richter, en 1935, calculó que la magnitud de un terremoto puede ser medida conociendo el tiempo transcurrido entre la aparición de las ondas  $P$  y las ondas  $S$ , y la amplitud de éstas. Las primeras comprimen y estiran el medio terrestre y las segundas lo hacen vibrar perpendicularmente. Richter desarrolló el siguiente modelo

$$M = \log A + 3 \log(8\Delta t) - 2,92,$$

donde

$A$  = amplitud de las ondas en milímetros.

$t$  = tiempo en segundos.

$\Delta t$  = longitud de tiempo desde la aparición de las ondas  $P$  a las de las ondas  $S$ .

$M$  = Magnitud del terremoto.

El mayor sismo registrado ha sido el terremoto de Valdivia de 1960, el cual tuvo una magnitud de 9,5 grados en esta escala.

**Ejercicio 1.78.**

1. Mostrar, usando inducción, que si  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , entonces

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = \sum_{i=1}^n \ln a_i.$$

2. Encontrar el área de la región encerrada por la función y el eje  $x$  en el intervalo indicado:
1.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x \in [e, e^2]$ .
  2.  $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$ ;  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .
3. Cuando una cantidad de gas se expande desde un volumen inicial  $v_1$  a un volumen final  $v_2$ , la cantidad de trabajo hecha por el gas durante su expansión viene dado por

$$T = \int_{v_1}^{v_2} P(v) dv,$$

donde  $P$  es la presión expresada como función del volumen  $v$ . Durante una expansión en la cual la temperatura permanece constante,  $P$  está relacionado con el volumen  $v$  a través de una ley conocida como la Ley de Boyle que dice que

$$P = \frac{c}{v},$$

donde  $c$  es una constante positiva. Suponga que  $c > 1$ , que el volumen inicial  $v_1$  es  $\sqrt[n]{c}$  unidades cúbicas y que el volumen final  $v_2$  es  $c$  unidades cúbicas. Determine el trabajo  $T$  realizado por el gas en ese intervalo.

4. Utilizando una partición adecuada muestre que, para todo natural  $n \geq 2$  se tiene que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

5. Utilizando el hecho conocido  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  y aplicando el ejercicio anterior, muestre que la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

puede ser tan grande como queramos, si elegimos  $n$  suficientemente grande.

6. Muestre que para cualquier número racional  $r > 0$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0.$$

Para esto proceda como en la demostración de (1.24), partiendo de la desigualdad

$$t^s \leq t, \quad \text{para todo } t \geq 1,$$

con  $0 < s < 1$  un racional elegido apropiadamente.

### 1.10.1 La función exponencial

Como vimos en la sección anterior, la función logaritmo natural, cuya fórmula está dada por  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ , es derivable y biyectiva. La función inversa del logaritmo natural la llamaremos **Función Exponencial** o, simplemente, **Exponencial** y la denotaremos por

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \exp(x),$$

así que

$$\exp(x) = y \iff x = \ln y.$$

En todo lo que sigue usaremos también la notación  $\exp(x) = e^x$ , la que es muy natural después de la Propiedad 1. que vemos más abajo (ver también Definición 1.80). A continuación veremos algunas propiedades de la función exponencial que son consecuencia de propiedades del logaritmo.

1. Si  $a, b$  son números reales entonces

a.  $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ .

b.  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ .

c.  $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ .

Dejamos la demostración al lector. Ver Corolario 1.71.

2. Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ , pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .
3. Para obtener la derivada de la exponencial recordamos que que

$$y = \exp(x) \iff x = \ln y,$$

y derivamos implícitamente la expresión de la derecha para obtener

$$1 = \frac{y'}{y},$$

de donde  $y' = y$  o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x).$$

De aquí obtenemos además que

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + C.$$

4. Es común escuchar decir que algo crece exponencialmente, por ejemplo, una pandemia. Esto proviene del hecho que  $\exp(x)$  crece, a diferencia de  $\ln x$ , muy rápidamente, lo que se refleja en el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, como

$$y = \exp(x) \iff x = \ln y$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{(\ln y)^n} = \infty$$

pues,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(y)}{y^{1/n}} = 0$  y para  $y > 1$   $\ln(y)/y > 0$  (ver Ejercicio 1.78, 6).

### Ejercicio 1.79.

1. Evaluar  $\int_0^\pi (\sin x) e^{\cos x} dx$ . Indicación: poner  $u = \cos x$ .
2. Encontrar las siguientes integrales

$$\int e^{\sqrt{2x+3}} dx; \quad \int e^t e^{e^t} dt; \quad \int \sqrt{e^x} dx; \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx.$$

3. Evaluar las siguientes integrales

$$\int_0^{\pi/3} \frac{e^{\tan y}}{\cos^2 y} dy; \quad \int_{-1}^1 \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} dz.$$

4. Encontrar el área de la región encerrada por las funciones  $f(x) = e^{2x}$  y  $g(x) = e^{-2x}$  y la recta  $x = \frac{1}{2}$ .
5. Sea  $f$  una función definida en  $(-\infty, \infty)$  tal que satisface: (i)  $f(0) = 1$ ; (ii)  $f(a+b) = f(a)f(b)$  cualquiera sean los números reales  $a$  y  $b$ ; (iii)  $f$  es derivable en 0 con derivada  $f'(0) = 1$ . Entonces,
  - a. Muestre que  $f$  es derivable en  $(-\infty, \infty)$  y que  $f'(x) = f(x)$ , para todo  $x$ ;
  - b. Muestre que

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} f(x)) = 0;$$

- c. Deduzca que  $f(x) = e^x$ .

### 1.10.2 Funciones provenientes del logaritmo

El logaritmo y la función exponencial nos permiten definir la función potencia con base un número real positivo y exponente un número real. Recordemos que el Corolario 1.71 dice que si  $b > 0$  y  $r \in \mathbb{Q}$ , entonces  $\ln b^r = r \ln b$ , esto lo podemos reescribir como

$$b^r = \exp(r \ln b), \text{ para } b \in (0, \infty) \text{ y } r \in \mathbb{Q}.$$

Ahora bien, el número  $\exp(r \ln b)$  está bien definido para cualquier real  $r$  (y no solamente racionales). Así podemos definir lo siguiente:

**Definición 1.80.** Sea  $b$  un número real positivo y  $r$  un número real, definimos la  $r$ -ésima potencia de  $b$ , como

$$(1.26) \quad b^r = \exp(r \ln b).$$

Aquí  $b$  es llamado la *base* y  $r$  es llamado el *exponente*.

Ahora, si consideramos el caso especial  $b = e$ , entonces se tiene

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp x \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

expresión que es consistente con la notación que introdujimos en la subsección anterior. Es necesario llamar la atención sobre la definición de  $b^r$  dada en la expresión (1.26), la que probablemente fue tratada en un primer curso de cálculo, incluso al nivel escolar, y aceptada sin mayores justificaciones.

**Ejercicio 1.81.** Muestre que con la Definición 1.80 se recuperan las propiedades usuales de potencias, es decir,

1.  $b^{r+s} = b^r + b^s$ , para todo  $b > 0$  y  $r, s \in \mathbb{R}$ ,
2.  $(b^r)^s = b^{rs}$ , para todo  $b > 0$  y  $r, s \in \mathbb{R}$ ,
3.  $(b_1 b_2)^r = (b_1)^r (b_2)^r$ , para todo  $b_1, b_2 > 0$  y  $r \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.82.** Inicialmente nos preguntamos por  $10^{\sqrt{2}}$ . Con la definición anterior tenemos que

$$10^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \ln 10).$$

El lado derecho de la igualdad anterior tiene sentido, pues está bien definido. Ahora bien, no es fácil determinar explícitamente el número  $\exp(\sqrt{2} \ln 10)$ .

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de definir las siguientes funciones:

**Definición 1.83.** Para  $a \in (0, \infty)$  y para  $b \in \mathbb{R}$  fijos, definimos la función exponencial  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con base  $a$  y la función potencia  $g_b: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , con exponente  $b$ , como

$$f_a(x) = a^x \quad \text{y} \quad g_b(x) = x^b.$$

**Observación 1.84.**

1. Sea  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , entonces la función  $f_a$  es invertible y su inversa  $f_a^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  define una nueva función denotada por  $\log_a(x)$  y conocida como el logaritmo en base  $a$ , que satisface

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y.$$

2. Notemos que, si  $f$  y  $g$  son dos funciones, tales que  $g(x) > 0$ , entonces podemos definir la siguiente función

$$f(x)^{g(x)} = \exp(f(x) \ln g(x)).$$

En particular, para  $x > 0$ , se tiene que

$$x^x = \exp(x \ln x).$$

Usando la Regla de la Cadena y las definiciones anteriores, tenemos que

$$\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x, \quad \frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$$

y, por tanto, sus primitivas son

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{y} \quad \int x^x (\ln x + 1) dx = x^x + C.$$

Otras funciones que son importantes en las aplicaciones a la física, química o la ingeniería y que provienen de la función exponencial, son las llamadas funciones

hiperbólicas. Estas funciones tienen un comportamiento similar a las trigonométricas o, también llamadas, funciones circulares. Tales funciones se definen como sigue:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Sus nombres se deben al hecho que satisfacen la ecuación de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , esto es,

$$(1.27) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

en efecto:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x \quad \text{y} \\ e^{-x} &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x - \sinh x. \end{aligned}$$

Multiplicando estas ecuaciones obtenemos (1.27).

Las funciones hiperbólicas aparecen a menudo en el estudio de modelos físicos. El más común es el problema de la catenaria, cuya formulación es la siguiente:

*Encontrar la forma que toma una cuerda (o cadena) perfectamente flexible y homogénea, por la acción de su propio peso, cuando está atada en sus extremos a sendos postes.*

La forma resultante se llama catenaria, palabra proveniente del latín *catenarius* y que significa “propio de la cadena”. Por mucho tiempo se pensó que la catenaria estaba descrita por una parábola. Fueron, independientemente, Johann Bernoulli, Leibnitz y Huygens los que resolvieron el problema en el año 1691, respondiendo a un desafío planteado por Jakob Bernoulli. Ellos encontraron que la ecuación de la “catenaria” estaba dada por

$$y = c \cosh \frac{x}{c}, \quad c > 0.$$

La gráfica de esta función la vemos a diario en nuestro trayecto a la universidad, por ejemplo, si observamos los cables aéreos de la electricidad desde un poste al otro, la forma del cable es la de una catenaria. En la naturaleza, las telas que teje una araña forman catenarias. Pero, no sólo vemos a las catenarias colgando, también las vemos soportando peso. Por ejemplo, muchos de los ventanales o entradas principales de catedrales católicas en Europa tienen la forma de una catenaria invertida.

Un arco con tal forma será capaz de soportar su propio peso y el peso de lo construido, tanto sobre ella como en sus lados. El arquitecto finlandés Eero Saarinen usó esta curva en una de sus obras más impactantes, el “Gateway Arch of the West”, ubicado en la ciudad de San Luis en el estado de Missouri en Estados Unidos.

### Ejercicio 1.85.

- La catenaria invertida esta dada por la fórmula  $y = b - c \cosh \frac{x}{c}$ . Suponga que la gráfica corta al eje  $x$  en  $-c$  y  $c$ . Con esta información, muestre que
  - $b = c \cosh 1 \approx 1.54308c$ .



FIGURA 1.31

- b. La altura del arco que se forma es  $0,54308c$ , aproximadamente, y por tanto, su amplitud (la distancia entre los puntos de la base) nunca será igual a su altura.
  - c. Si cambiamos la fórmula de la catenaria invertida por  $y = b - a \cosh \frac{x}{c}$ , con  $a, b, c > 0$  y con amplitud  $2c$ . Encuentre  $a$  y  $b$  tal que la altura de la catenaria invertida coincida con la amplitud.
2. El Arco de San Luis en Estados Unidos es una catenaria invertida. Es conocido que su altura y su amplitud miden igual, 192 m. Determine la fórmula de la catenaria invertida que describe el Arco de San Luis.

Al igual que en el caso de las funciones trigonométricas, se pueden definir otras cuatro funciones a partir del seno y el coseno hiperbólicos:

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} & \text{y} & \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}. \end{aligned}$$

Notar que la función  $\sinh x$  tiene inversa, la que se define por  $\sinh^{-1} x = y \iff \sinh y = x$ . Con el objeto de determinar una expresión para dicha inversa, comenzamos con

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y},$$

así,

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \Rightarrow 2e^y x = e^{2y} - 1 \Rightarrow (e^y)^2 - 2e^y x - 1 = 0$$

Esta última ecuación de segundo grado tiene como única solución positiva a

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1},$$



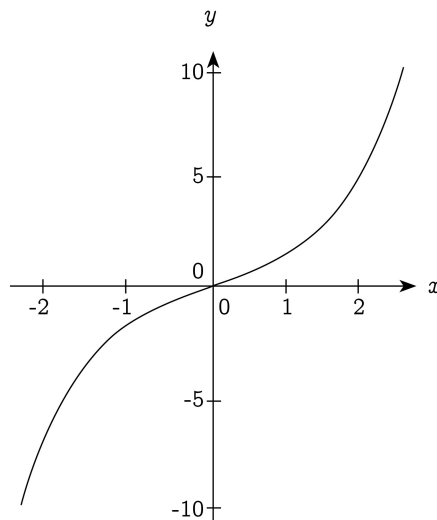


FIGURA 1.32. Seno hiperbólico

de donde

$$y = \sinh^{-1} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta última expresión, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

y de esta manera, tenemos una nueva fórmula de integración:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sinh^{-1} x + C.$$

**Ejemplo 1.86.** Evaluemos  $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ .

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sinh^{-1} x \Big|_{-1}^3 = \ln \frac{3 + \sqrt{10}}{-1 + \sqrt{2}}.$$

Al igual que para las funciones trigonométricas, existen identidades que resultan útiles al momento de trabajar con las funciones hiperbólicas. Mencionaremos algunas de ellas y se invita al lector a demostrarlas:

### Ejercicio 1.87.

1.  $\sinh(-x) = -\sinh x$ , es decir,  $\sinh$  es una función impar.
2.  $\cosh(-x) = \cosh x$ , es decir,  $\cosh$  es una función par.
3.  $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ .
4.  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ .
5.  $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$ .
6.  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ .

### 1.10.3 Crecimiento poblacional

En esta sección mostraremos una bella aplicación de la función exponencial al crecimiento demográfico humano. Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo Thomas Malthus, economista inglés en 1798. En esencia, la idea del modelo malthusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país es proporcional a la población  $P(t)$  de ese país en cualquier momento  $t$ . De forma más precisa, esta hipótesis se puede expresar como

$$(1.28) \quad \frac{dP}{dt} = kP,$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad que, en este caso corresponde a la tasa de natalidad. Este sencillo modelo fue capaz de predecir con mucha exactitud la población de Estados Unidos desde 1790 hasta 1860, a pesar de que no tiene en cuenta muchos factores (por ejemplo, inmigración, emigración y agotamiento de recursos). La ecuación (1.28) es un ejemplo *ecuación diferencial*, que es una ecuación para la función incógnita  $P$  que involucra a su derivadas. Para conocer  $P$ , procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = kP &\Leftrightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln |P| = k \\ &\Leftrightarrow \ln |P| = kt + C. \end{aligned}$$

Como  $P$  debe ser positiva obtenemos

$$P(t) = e^{kt+C}$$

y si llamamos  $K = e^C$ , entonces la ecuación de la población está dada por

$$(1.29) \quad P(t) = Ke^{kt}.$$

¿Cómo calculamos  $K$ ? Para calcular  $K$  basta con conocer la población en el instante desde el cual se desea predecir dicha población. Esto es conocido como la condición inicial. Si suponemos que en el tiempo  $t = 0$ , la población inicial viene dada por  $P(0)$ , entonces reemplazando en (1.29) tenemos  $K = P(0)$ . Así la población en el instante  $t$ , según el modelo malthusiano es:

$$P(t) = P(0)e^{kt}.$$

La constante de proporcionalidad  $k$  se puede encontrar “calibrando el modelo”, es decir, tomando mediciones de la población en dos instantes de tiempo y reemplazando en la ecuación anterior.

**Ejercicio 1.88.** Suponiendo que la población en dos instantes de tiempo  $t_1, t_2$  es  $P(t_1)$  y  $P(t_2)$ , respectivamente, muestre que la constante de proporcionalidad viene dada por:

$$k = \frac{\ln P(t_1) - \ln P(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

En la Figura 1.33 se presenta la gráfica para una población inicial de 4000 personas, con  $k = 0,030$  y  $t$  medido en años.

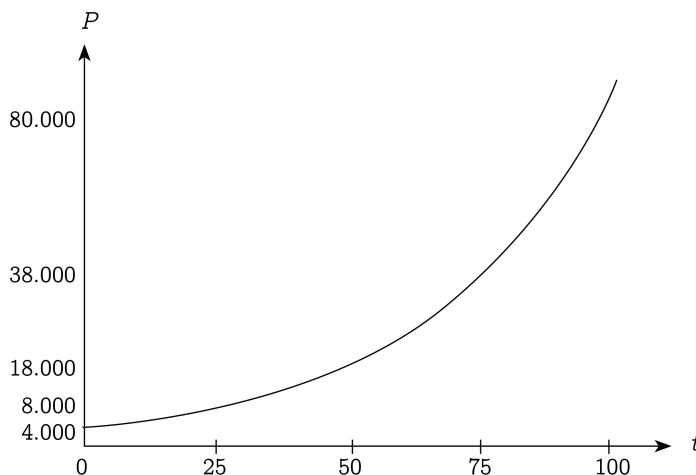


FIGURA 1.33. Estudios poblacionales

Vemos que la población crece “exponencialmente”, lo cual no sucede en la realidad. Es por esto que este modelo es utilizado sólo durante intervalos cortos de tiempo. Ahora, si consideramos la misma población, pero con  $k = -0,030$ , entonces, como muestra la Figura 1.34, la población se extingue.

Es importante notar que el modelo (1.29) también se puede utilizar para modelar poblaciones de bacterias y de animales pequeños durante cortos intervalos, como también para el estudio del decaimiento radioactivo de algunos elementos químicos (aquí,  $k$  es negativo).

Un modelo más sofisticado lo constituye “el crecimiento poblacional inhibido”, que describimos a continuación. El éxito de una población depende de muchos factores, por ejemplo, de los depredadores, las enfermedades, el lugar físico donde se desarrolla, etc. Supongamos que disponemos de una isla con suficiente alimento del

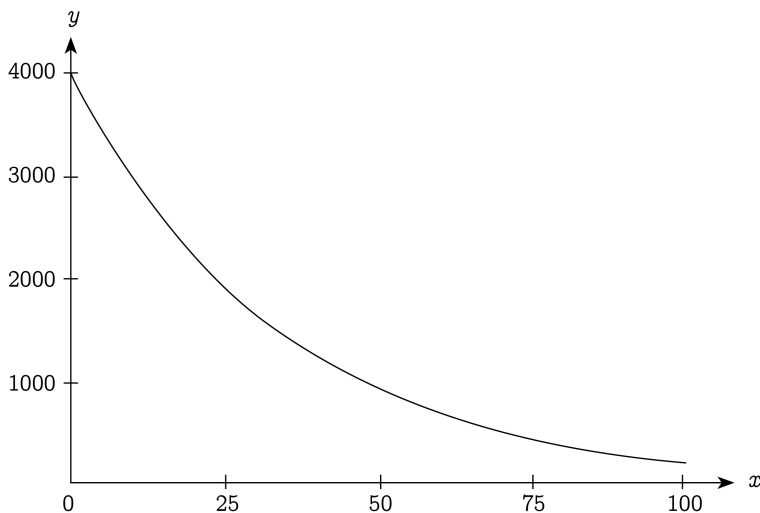


FIGURA 1.34. Estudios poblacionales

gusto de los conejos y que no tiene depredadores. Instalemos una pequeña colonia de  $C_0$  conejos en la isla, por tanto, en el instante  $t = 0$  la cantidad de conejos es de  $C_0$ . Es intuitivo considerar que cuando una población es pequeña tiende a crecer a una tasa proporcional a sí misma; pero cuando es más grande y existe mayor competencia por la comida y el espacio, la población crece a una tasa más pequeña. Llamemos  $C(t)$  a la población de conejos en la isla, en el instante  $T$  y  $C_1$  a la población máxima de conejos que puede soportar la isla. Con lo anterior podemos suponer que la tasa de crecimiento de la población es directamente proporcional a  $C$  y a  $C_1 - C$ , esto es, existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\frac{dC}{dt} = kC(C_1 - C).$$

Para encontrar  $C$  procedemos como en el modelo anterior.

$$\frac{dC}{dt} = kC(C_1 - C) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{C(C_1 - C)} \frac{dC}{dt} = k$$

Desarrollando el primer miembro,

$$\frac{1}{C(C_1 - C)} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 - C} \right),$$

así que

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} = kC(C_1 - C) &\Leftrightarrow \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{C_1 - C} \frac{dC}{dt} \right) = k \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln C - \frac{d}{dt} \ln(C_1 - C) = kC_1 \\
&\Leftrightarrow \ln |C| - \ln |C_1 - C| = kC_1 t + K.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\ln \left| \frac{C}{C_1 - C} \right| = kC_1 t + K,$$

donde  $K$  es una constante. Evaluando en  $t = 0$ ,  $C(0) = C_0$ , obtenemos

$$K = \ln [C_0 / (C_1 - C_0)]$$

y, por lo tanto,

$$C(t) = \frac{C_0 C_1 e^{kC_1 t}}{C_0 e^{kC_1 t} + (C_1 - C_0)}.$$

La Figura 1.35 muestra la gráfica de  $C(t)$ , para  $C_1 = 100$ ,  $k = 0,001$  y para dos poblaciones tales que  $C_0 = 10$  y  $C_0 = 85$ , respectivamente. Vemos que la primera

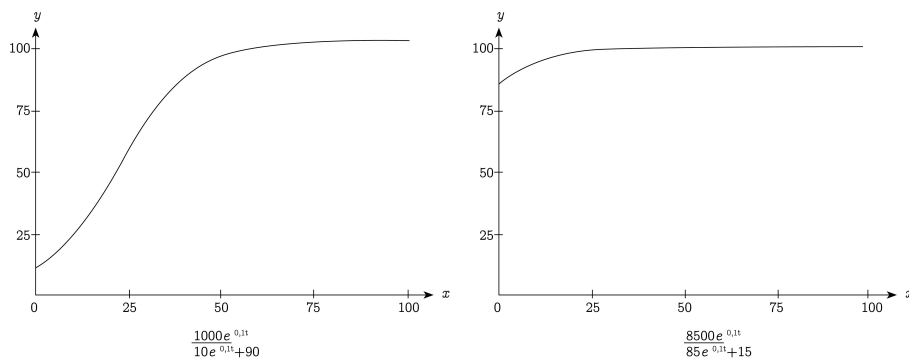


FIGURA 1.35. Estudios poblacionales

población tiene un período de crecimiento rápido, para después crecer más lento hacia el “equilibrio”, pues al principio existe poca competencia por la comida y el espacio, a diferencia de la segunda que crece lentamente desde el inicio, para alcanzar el mismo equilibrio, pues inicialmente tiene más individuos y así existe más competencia.

Como comentario final, podemos recalcar la utilidad de la integración para resolver modelos que involucran “ecuaciones diferenciales”. En general, en muchos modelos provenientes de la física y la ingeniería aparecen ecuaciones que se pueden resolver integrando de forma explícita o numérica.

### 1.11 Integración impropia

Analizaremos la función de ecuación  $f(t) = \frac{1}{t^2}$ , para  $t \in [1, \infty)$ , cuya gráfica de  $f$  se presenta en la Figura 1.36.

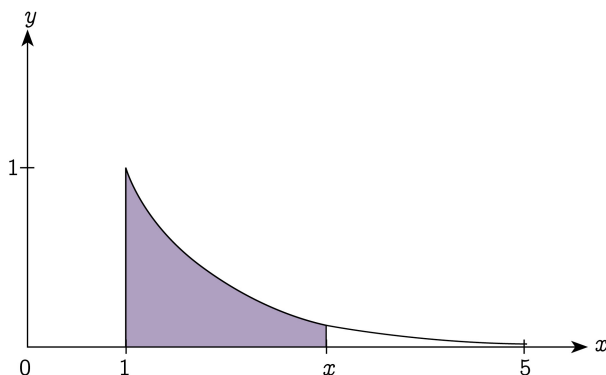


FIGURA 1.36. Integral impropia

Si denotamos por

$$H(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$$

entonces  $H(x) = 1 - \frac{1}{x}$  y entonces, aplicando nuestros conocimientos de límites obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

¿Qué sentido geométrico podríamos darle a este cálculo analítico? Notar que bajo la gráfica de  $f$  y sobre el eje  $x$  se forma una región que está “cercada sólo por tres lados”, digamos, la recta  $x = 1$ , el eje  $x$  y la gráfica de  $f$ , es decir, estamos en presencia de una región infinita. Por otro lado, para cada  $x \in [1, \infty)$ ,  $H(x)$  representa el área de la región achurada en la Figura 1.36. Por tanto, podríamos definir el área de esta región como

$$A_R = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

y que, en este caso particular, su área resulta ser finita. Una notación natural para este límite es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

y la llamaremos integral impropia.

Podemos extender nuestro análisis un poco más allá. Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 1$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = 1$ , es decir,

$$(1.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Ahora, recordando las propiedades de la integral, tenemos que

$$(1.31) \quad \int_1^n \frac{1}{t^2} dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{t^2} dt = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)},$$

luego, reemplazando en (1.30) tenemos

$$(1.32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1,$$

es decir, una suma que crece en términos a medida que avanza el natural  $n$ . Al igual que la integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ , denotaremos la expresión (1.32) por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

A esta última expresión la llamaremos serie numérica y, más adelante, haremos un completo estudio de ella. Lo relevante en este análisis es la relación que se formó entre estos dos conceptos: serie e integral impropia.

Recordemos que el estudio de integrales se efectuó para funciones  $f$  con dos características bien precisas:

1. El dominio de  $f$  era un intervalo cerrado del tipo  $[a, b]$ .
2. La función  $f$  era acotada, es decir,  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

Por tanto, en este punto nos podríamos preguntar si es posible debilitar las exigencias 1. y 2. y todavía tener algún concepto de integral satisfactorio. La respuesta en muchos casos es afirmativa, es decir, podemos definir un concepto de integral para funciones no acotadas en un intervalo del tipo  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  o  $(a, b)$  como lo muestra la Figura 1.37 (a) y un concepto de integral para funciones con dominio no acotado  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  o  $(-\infty, \infty)$  como lo muestra la Figura 1.37 (b).

En esta monografía sólo nos dedicaremos al estudio de funciones con dominio no acotado, lo cual será de utilidad en el estudio de series. El concepto de integral impropia de funciones no acotadas en un intervalo es también importante, pero no se discutirá en detalle aquí. Sin embargo, se mostrará un ejemplo como una manera de

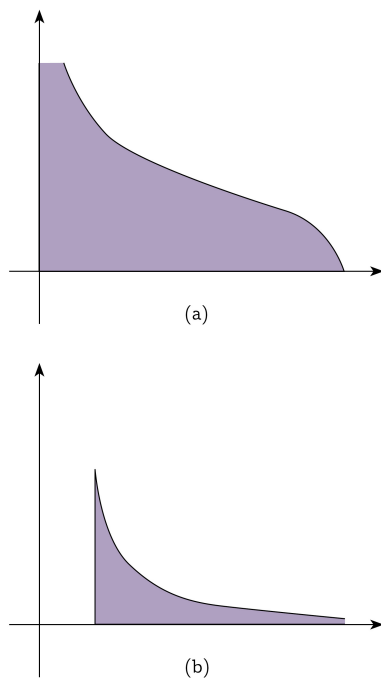


FIGURA 1.37. Funciones e intervalos no acotados

llamar la atención sobre errores relacionados a este concepto y que pueden cometerse si no se consideran las propiedades que debe satisfacer la función para ser integrable.

**Ejemplo 1.89.** Sabemos que si  $f$  es una función integrable no negativa entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Analicemos la siguiente situación

$$(1.33) \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = - \left. \frac{1}{x-1} \right|_0^2 = -1 - (-1) = -2 < 0.$$

Vemos que la función  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  es no negativa en su dominio y que su integral es negativa ¿qué está mal en este cálculo?

En primer lugar, notemos que  $f$  no está definida en  $x = 1$ , en segundo lugar que  $f$  no es acotada en  $[0, 2]$  y en tercer lugar que si definiésemos  $f$  en  $x = 1$ , la función resultante no es continua en  $[0, 2]$ . Por tanto, esta función no cumple con las condiciones que nos dimos al momento de iniciar el estudio de la integral. Más aún, notemos que la función definida por  $F(x) = -\frac{1}{x-1}$  no es una primitiva de  $f$  en el intervalo  $[0, 2]$ .



Observemos que una situación similar ocurre cuando se trata de evaluar  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ . Si escribimos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \log(|x|)|_{-1}^1 = \log 1 - \log 1 = 0,$$

aparentemente no hay problema con el cálculo, más aún es un resultado esperado pues la función es impar. Pero una mirada más detenida muestra que el cálculo no es correcto pues la función  $1/x$  no es integrable en  $[-1, 1]$ .

Como ejercicio, se sugiere al lector estudiar los siguientes límites y discutir su relación con las situaciones presentadas arriba.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-1}^x \frac{1}{x} dx.$$

Consideremos funciones definidas en intervalos del tipo  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  y  $(-\infty, \infty)$  y analicemos lo que vamos a entender por integrales de la forma

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx,$$

y que llamaremos integrales impropias.

**Definición 1.90.** Diremos que una integral impropia  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge, si  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  existe y, en tal caso, escribiremos

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

En caso contrario, diremos que  $\int_a^\infty f(x) dx$  diverge. Entenderemos por "el comportamiento de la integral impropia" a la condición de convergencia o divergencia de la integral  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

Analicemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.91.** Consideremos la función  $f(x) = e^{-x}$  en  $[1, \infty)$  y estudiemos el comportamiento de la integral impropia

$$\int_1^\infty e^{-x} dx.$$

Tomando  $b > 1$ , procedemos como sigue

$$\int_1^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^b = e^{-1} - e^{-b}$$

entonces

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-b}) = e^{-1}.$$

Por lo tanto,  $\int_1^\infty e^{-x} dx$  converge y lo hace a  $e^{-1}$ . La gráfica de  $f(x) = e^{-x}$  está ilustrada en la Figura 1.37 (b).

Este segundo ejemplo lo utilizaremos más adelante, en el capítulo de series:

**Ejemplo 1.92.** Analicemos, en primer lugar, la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

y luego

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad \text{para } p > 0.$$

Para la primera tenemos

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{b}$$

entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1,$$

lo que muestra que  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  es convergente. Para la segunda integral, una primitiva de  $\frac{1}{x^p}$  es:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } p = 1, \\ -\frac{1}{p-1} x^{-p+1} & \text{si } p \neq 1. \end{cases}$$

Si  $p = 1$  tenemos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty,$$

es decir, la integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge. Ahora, si  $p < 1$  entonces se tiene que

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

y, como  $1-p > 0$ , se obtiene

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} b^{1-p} = \infty,$$

es decir, nuevamente  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  diverge. Finalmente, si  $p > 1$ , entonces  $1-p < 0$  y

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = -\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1},$$

pues

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} b^{1-p} = 0,$$

por lo que se concluye que, para  $p > 1$ , la integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  converge.

En resumen:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{converge,} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge,} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Para las integrales impropias del tipo  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  se puede hacer una definición análoga a la de integrales del tipo  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ . En el caso de las integrales del tipo  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ , diremos que converge, si las integrales impropias

$$\int_{-\infty}^d f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_d^{\infty} f(x)dx$$

convergen, para algún  $d \in \mathbb{R}$ . En tal caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^d f(x)dx + \int_d^{\infty} f(x)dx.$$

La elección del número real  $d$  puede hacerse arbitrariamente, pues lo que realmente importa es el límite en  $+\infty$  y  $-\infty$ .

Como las integrales impropias son límites de integrales definidas, tenemos un problema para estudiar la convergencia de una integral impropia si no podemos encontrar explícitamente la integral definida. Por ejemplo, si queremos estudiar la existencia de la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

necesitaríamos una fórmula explícita para una primitiva de  $f(x) = e^{-x^2}$  que, como vimos anteriormente, no tiene una fórmula explícita. Ante este problema podríamos tratar de calcular aproximaciones, pero nadie garantiza que así podamos encontrar el valor de  $I$ . Lo primero que debemos hacer es tratar de probar que  $I$  es finita y, en dicho caso, procedemos a calcular numéricamente  $I$ .

Pues bien, ¿cómo ver que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  converge? Primero, notamos que  $e^{-x^2}$  es una función positiva, entonces  $G(b) = \int_0^b e^{-x^2} dx$  es creciente. Así que para mostrar que su límite existe, basta con demostrar que es acotada. Para ello, notamos que

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \quad \implies \quad x^2 \geq -1 + 2x,$$

luego,

$$-\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} - x \quad \implies \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}-x} = e^{1/2}e^{-x},$$

entonces

$$\int_0^b e^{-x^2/2} dx \leq \int_0^b e^{1/2}e^{-x} dx.$$

Pero el lado derecho de la igualdad anterior está acotado porque

$$\int_0^{\infty} e^{1/2}e^{-x} dx = e^{1/2}e^{-1} = e^{-1/2},$$

de donde concluimos que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  converge. Análogamente  $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$  converge y, así, la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  converge. Con herramientas matemáticas más avanzadas

(integrales dobles) se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Esta es una relación bastante sorprendente, pues involucra a los dos números emblemáticos  $\pi$  y  $e$ .

**Observación 1.93.** Notemos que, si definimos la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

La función  $f$  se conoce como "función de densidad de probabilidad normal estándar" y su gráfica se conoce como campana de Gauss:

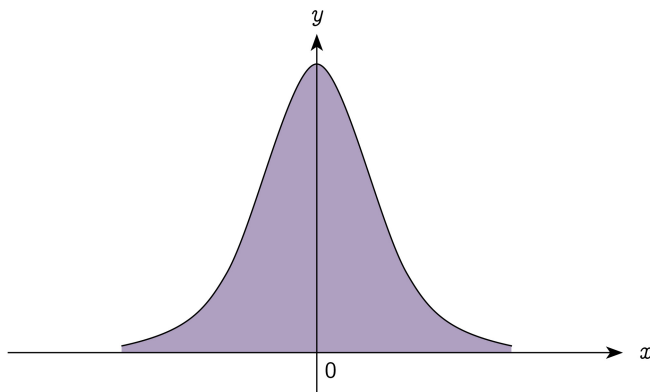


FIGURA 1.38. Campana de Gauss

Esta función es frecuentemente utilizada en probabilidades y estadística. El propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos pueden modelarse usando esta función.

**Ejercicio 1.94.**

1. Determine el comportamiento de:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^4} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

2. Suponga que  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  y  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  convergen. Muestre que  $\int_a^{\infty} (f(x) + g(x)) dx$  también converge.

3. Considere

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

y muestre, utilizando integración por partes, que  $I_n = nI_{n-1}$ . Concluya que

$$I_n = n!.$$

4. Para estudiar el comportamiento de

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

se podría utilizar  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ . ¿Será posible afirmar que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{x+1} dx?$$

Justifique su respuesta.



## Captulo 2: Aplicaciones de la Integral



En el colegio o liceo se entregaron fórmulas para los volúmenes de ciertos sólidos regulares, tales como el paralelepípedo, el cilindro, la esfera y el cono:

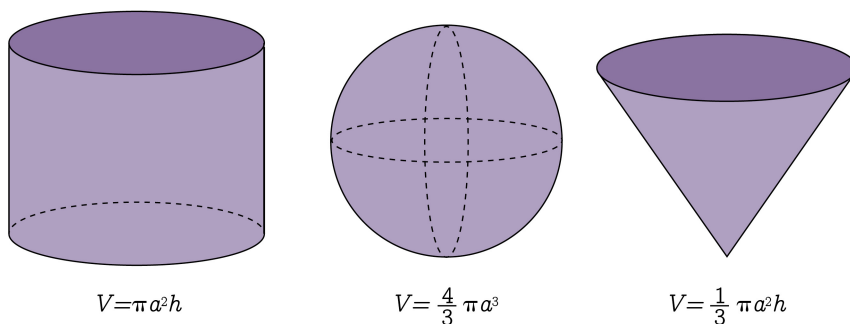


FIGURA 2.1. Sólidos estándares

Estas fórmulas son conocidas desde tiempos remotos. Arquímedes descubrió el volumen de la esfera basándose en el ya conocido volumen del cilindro y del cono, descubierto anteriormente por Demócrito. En vista de lo ingenioso del método, y a modo de motivación, veremos cómo logró esto.

Se dispone de un disco de radio  $a$ . Para obtener una esfera, hacemos girar el disco en torno a su diámetro. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la ecuación de la circunferencia generadora de la esfera es

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

cuyo centro se ubica en el punto  $(a, 0)$ ,  $a > 0$ . Consideremos dos sólidos: un cono con vértice en el origen y ángulo de apertura  $\frac{\pi}{4}$  y un cilindro con radio  $2a$  y altura  $2a$ , ambos con eje de rotación que coincide con el eje  $x$ . La Figura 2.2 nos muestra un corte transversal de los sólidos involucrados, en el plano  $xy$ .

El segmento grueso representa un círculo, correspondiente al corte transversal del cono, ubicado a distancia  $x$  a la derecha del origen, mientras que el segmento más fino representa un círculo correspondiente al corte transversal de la esfera, ubicado también a distancia  $x$  del origen. El área de cada uno de los círculos es  $\pi x^2$  y  $\pi y^2$ , respectivamente. Si multiplicamos la ecuación de la circunferencia por  $2a\pi$  obtenemos

$$(2.1) \quad 2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2,$$

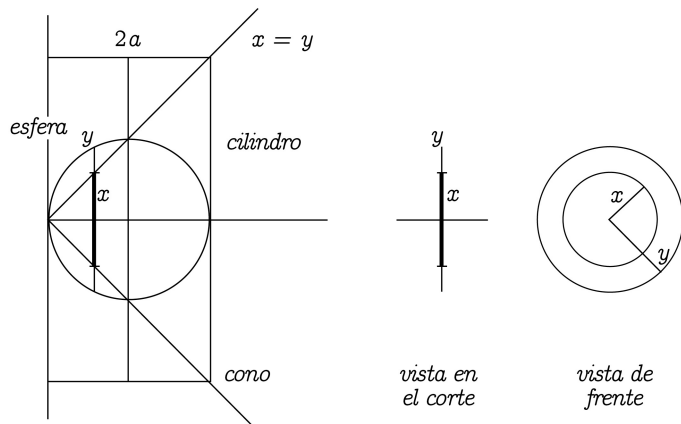


FIGURA 2.2. Volumen de la esfera

donde observamos que al lado derecho aparece  $\pi (2a)^2$  que es el área del círculo correspondiente al corte transversal del cilindro, ubicado también a distancia  $x$  del origen.

Arquímedes, al notar que la suma de las áreas de los círculos multiplicada por  $2a$  es igual al área de otro círculo multiplicado por  $x$ , tuvo la genial idea que se visualiza en la Figura 2.3.

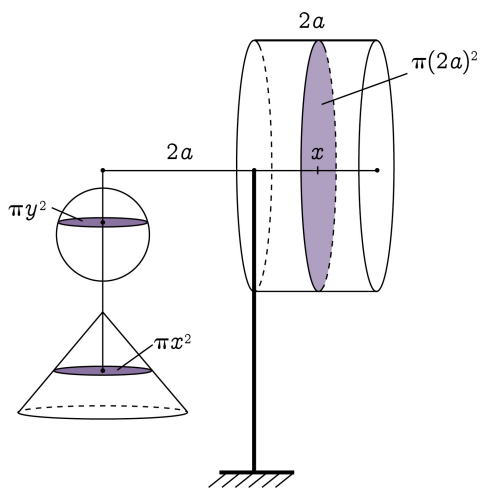


FIGURA 2.3. Volumen de la esfera



Arquímedes realizó la siguiente interpretación física. Consideró al eje  $x$  como una palanca con punto de apoyo ubicado en el origen. Entonces, para cada  $x$  la ecuación (2.1) representa el equilibrio del disco de radio  $2a$  a distancia  $x$  del punto de apoyo con la suma de los otros dos discos a distancia  $2a$ , al otro lado del punto de apoyo. Como los tres discos recorren los correspondientes sólidos desde 0 a  $2a$ , Arquímedes concluyó que el volumen del cilindro debía estar en equilibrio con la suma del volumen del cono y el volumen de la esfera y planteó

$$2a \cdot (\text{volumen del cono} + \text{volumen de la esfera}) = a \cdot (\text{volumen del cilindro}).$$

Es importante notar que el volumen del cilindro está multiplicado por  $a$ , pues esa es la posición del centro de masa del cilindro, con respecto al punto de apoyo (ver Sección 2.4). De aquí, utilizando las fórmulas obtenidas por Demócrito para el cono y el cilindro se tiene

$$2a \cdot \left( \underbrace{\frac{1}{3}\pi (2a)^2 (2a)}_{\text{volumen del cono}} + \underbrace{V_E}_{\text{volumen de la esfera}} \right) = a \cdot \underbrace{2a\pi (2a)^2}_{\text{volumen del cilindro}}$$

y, despejando  $V_E$  concluyó que

$$V_E = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Otras versiones de esta genial idea de Arquímedes se pueden encontrar en internet.

Como comentario final a esta introducción, debemos mencionar que, entre los años 1598-1647, Bonaventura Cavalieri planteó el siguiente postulado:

**Postulado de Cavalieri:** *Si dos sólidos tienen la misma altura  $h$  y si los cortes seccionales, obtenidos mediante planos paralelos a las bases a altura  $x$  desde dichas bases, tienen áreas iguales, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.*

Con este postulado, la geometría contemporánea muestra que la esfera tiene el mismo volumen del cilindro al que se le ha extraído el cono regular.

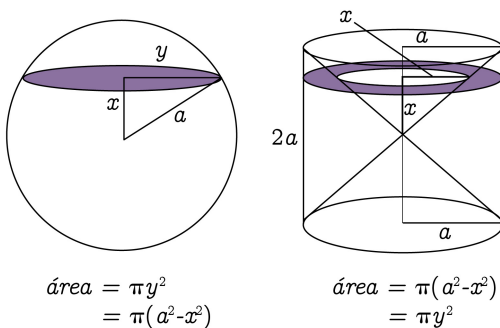


FIGURA 2.4. Postulado de Cavalieri

### Ejercicio 2.1.

1. Utilice el Postulado de Cavalieri para obtener el volumen de la esfera, suponiendo conocido el volumen del cilindro y del cono.

### 2.1 Volúmenes de figuras geométricas

Encontrar el volumen de un sólido es un problema análogo al de calcular el área de una superficie. Al igual que en el caso del área, tenemos una idea intuitiva de lo que es volumen. Veremos cómo la integral nos permite dar una definición exacta de este concepto. Para ello, usaremos sumas de Riemann de una función continua  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$ , con respecto a una partición  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ . Recordemos que esta suma está definida por

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i,$$

donde  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  es la longitud de cada subintervalo y  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Si, en particular,  $f$  es continua, entonces

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Queremos usar estas ideas para estudiar el volumen de un sólido y para ello vamos a suponer que tenemos un sólido  $S$  con forma más o menos irregular, como muestra la Figura 2.5. Podemos hacer cortes paralelos al eje  $y$  y éstos tendrán un área  $A(x)$  que depende de  $x$ , como lo muestra la parte achurada. El volumen de la porción o rebanada que se ve en la figura es, aproximadamente,  $A(x) \Delta x$ , donde  $\Delta x$  es el ancho de la rebanada.

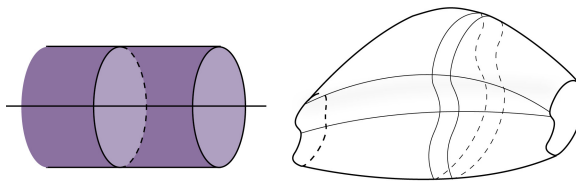


FIGURA 2.5. Método del disco

Para hacer esto de manera más sistemática, consideremos una partición  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ , entonces la Figura 2.6 nos muestra las porciones o rebanadas del sólido generada por esta partición. Intuitivamente, el volumen aproximado de cada porción está dado por  $V_i = A(t_i) \Delta x$ , donde  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

y, por tanto, el volumen del sólido  $S$  es, aproximadamente,

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(t_i) \Delta x_i,$$

lo que corresponde a la suma de Riemann de la función  $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A(x)$

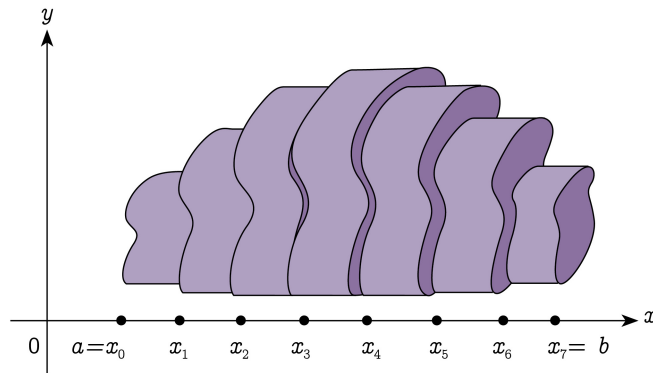


FIGURA 2.6. Suma de Riemann

denota el área del corte hecho a la altura  $x$ , con respecto a  $\mathcal{P}$ . Ver Figura 2.6.

Pues bien, si suponemos que la función  $A$  es continua, entonces

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(t_i) \Delta x_i = \int_a^b A(x) dx,$$

y así podemos definir el volumen del sólido  $S$  como

$$V_S = \int_a^b A(x) dx.$$

En consecuencia, para determinar el volumen de un sólido, debemos encontrar la función  $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  apropiada.

Un ejemplo muy simple que nos ayuda a entender es el caso del volumen del cilindro. Si consideramos un cilindro como el de la Figura 2.7, entonces vemos que la parte achurada corresponde a un corte del cilindro, perpendicular al eje de simetría del cilindro, que forma un círculo. El área de ese corte es  $A(x) = \pi r^2$ , la cual resulta ser constante a lo largo del eje  $x$ .

En consecuencia, el volumen del cilindro debería ser

$$V_C = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \pi r^2 dx = \pi r^2 h,$$

lo que naturalmente recupera el volumen del cilindro (que fue nuestro punto de partida.)

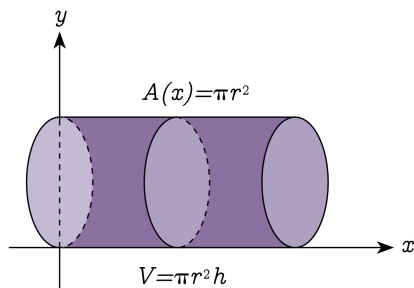


FIGURA 2.7. Método del disco

**Ejemplo 2.2.** Determinemos el volumen de la Figura 2.8, donde el corte transversal es un semicírculo y el lomo de la figura es la gráfica de la función  $f(x) = x^2$  para  $x \in [0, 1]$ .

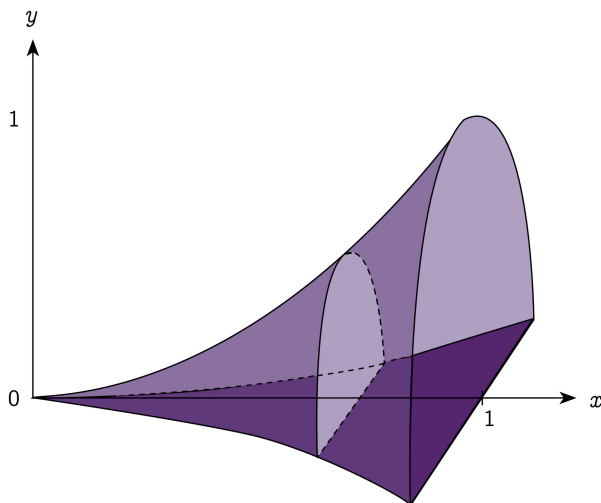


FIGURA 2.8. Cortes transversales

De acuerdo a la figura, el radio del semicírculo achurado en algún punto  $x \in [0, 1]$ , es  $r = x^2$  y, por tanto, su área es  $A(x) = \frac{1}{2}\pi x^2$ . La función  $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $A(x) = \frac{1}{2}\pi x^2$  es continua y así, el volumen del sólido viene dado por

$$V_S = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi x^2 dx = \frac{1}{6}\pi.$$

Hemos definido el volumen de un sólido, utilizando la integral, con bastante generalidad. Entonces podríamos aplicar esta definición para calcular el volumen de una esfera de radio  $r$ . Utilizando el sistema cartesiano, ubiquemos su centro de la esfera en el origen, entonces la ecuación de la esfera viene dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

El corte transversal, como se ve en la Figura 2.9, es un círculo y su área está dada por

$$A(x) = \pi y^2.$$

Pero, por el teorema de Pitágoras  $y^2 = r^2 - x^2$ , entonces

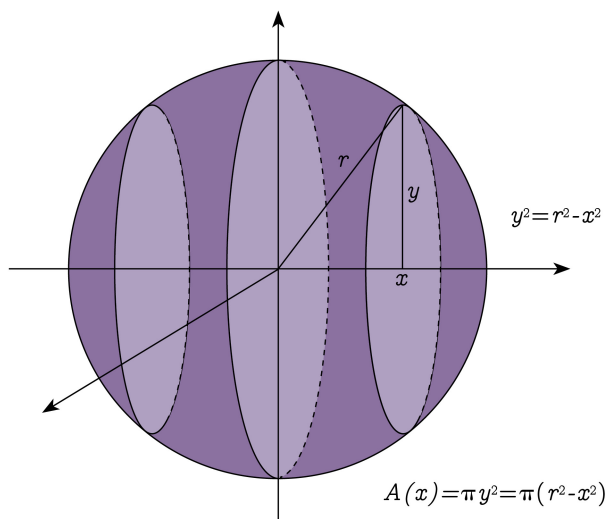


FIGURA 2.9. La esfera

$$A(x) = \pi (r^2 - x^2),$$

la que claramente es una función continua. Aplicando la definición de volumen que hemos dado, resulta que

$$V = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

valor que es coincidente con el obtenido por Arquímedes y conocido de la educación secundaria.

Es evidente que el método que hemos presentado es más eficiente que los métodos utilizados por Arquímedes, pero debemos tener en cuenta que él no contó con las herramientas aquí desarrolladas.

Una variante del desarrollo anterior es considerar la función

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad x \in [0, r],$$

cuya gráfica es la semicircunferencia superior que muestra la Figura 2.10. Si hacemos

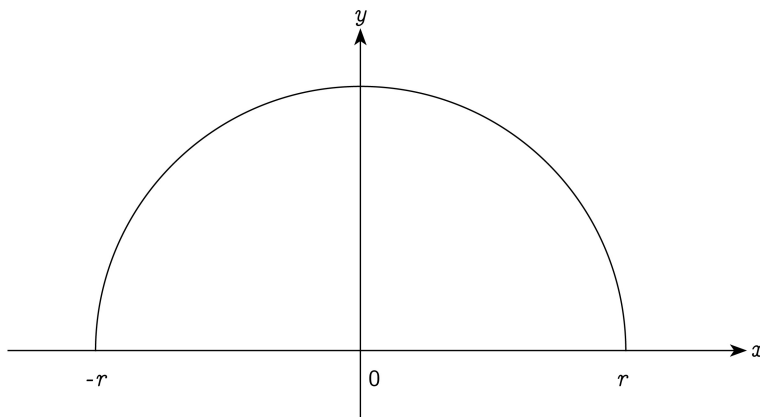


FIGURA 2.10. La esfera: Sólido de revolución

girar esta gráfica en torno al eje  $x$  obtenemos una esfera de centro el origen y radio  $r$ . En este caso,  $y = f(x)$  y luego,

$$A(x) = \pi [f(x)]^2 = \pi (r^2 - x^2).$$

Así,

$$V = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Siguiendo este esquema, podemos generalizar la situación a otras figuras geométricas. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y no negativa y consideremos la región  $R$  encerrada por su gráfica, el eje  $x$  y las recta  $x = a$  y  $x = b$ . Hagamos girar esta región en torno al eje  $x$ . El sólido resultante es llamado **sólido de revolución** (ver Figura 2.11).

Notar que, al hacer un corte transversal al sólido, el área de la zona achurada es  $A(x) = \pi [f(x)]^2$ . Entonces, el volumen del sólido de revolución es

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

A este método se le llama Método del Disco.

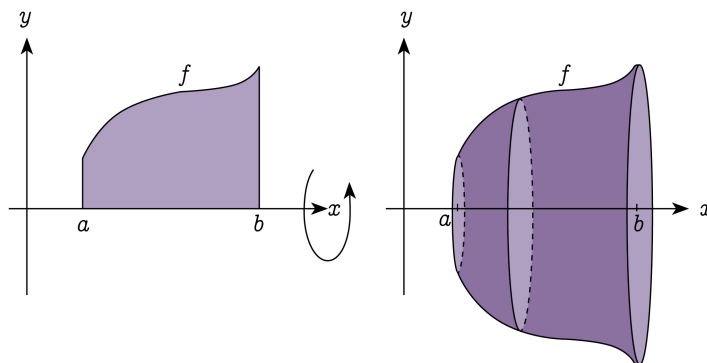


FIGURA 2.11. Sólido de revolución

Apliquemos este método para encontrar el volumen del sólido de revolución, obtenido al hacer girar la región encerrada por el segmento que une los puntos  $(0, b)$  y  $(h, a)$ , el eje  $y$  y la recta  $x = h$ .

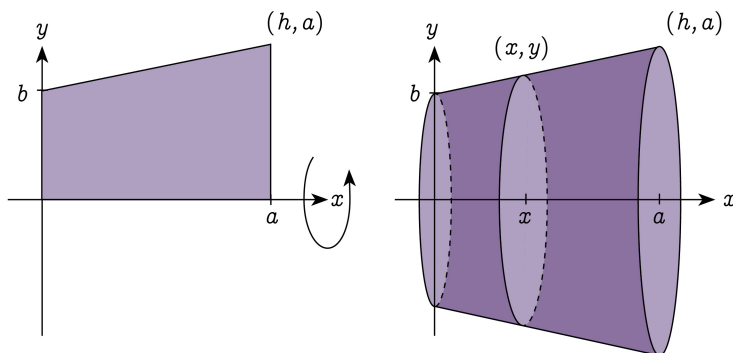


FIGURA 2.12. Método del disco

Este sólido resulta ser una porción de un cono determinado por el segmento de recta de ecuación

$$\frac{y-b}{x-0} = \frac{a-b}{h-0} \Rightarrow y = b + \frac{a-b}{h}x.$$

Luego,

$$A(x) = \pi \left( b + \frac{a-b}{h}x \right)^2$$

y entonces

$$V = \int_0^h \pi \left( b + \frac{a-b}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

Notar que si  $b = 0$ , entonces la figura se convierte en un **cono** de radio  $a$  y vértice en  $(0, 0)$ . Reemplazando  $b$  por 0 tenemos que  $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ , lo cual es coincidente con lo ya conocido.

Una variante del método del disco es conocido como el método de la centrífuga, que permite calcular el volumen entre dos sólidos de revolución. Supongamos que  $R$  es la región encerrada por las gráficas de las funciones no negativas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfacen  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ . Hacemos girar esta región en torno al eje  $x$  y el sólido resultante es el que muestra la figura: Basándonos en la fórmula anterior, el volumen

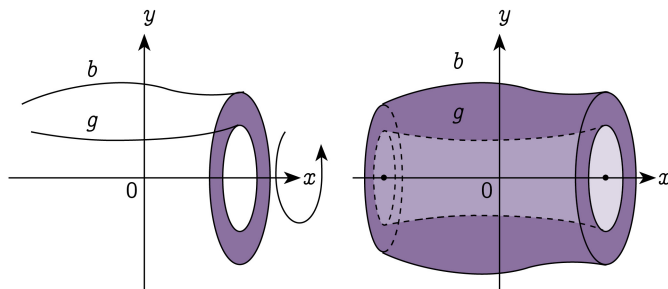


FIGURA 2.13. Método de la centrífuga

de este sólido está dado por:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi [g(x)]^2 dx = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

**Ejemplo 2.3.** Consideremos las funciones  $f(x) = 5x$  y  $g(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 3]$ . La figura muestra el sólido obtenido al hacer rotar la región encerrada por estas funciones.

Como  $0 \leq x^2 \leq 5x$  si  $0 \leq x \leq 3$ , su volumen viene dado por

$$V = \int_0^3 \pi ([5x]^2 - [x^2]^2) dx = \pi \int_0^3 (25x^2 - x^4) dx = \frac{882}{5}\pi.$$



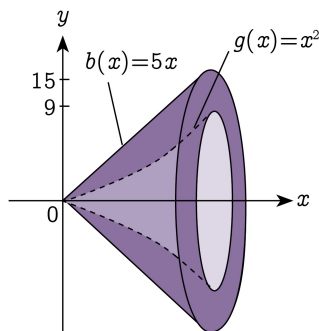


FIGURA 2.14. Método de la centrífuga

Otra situación de sólidos de revolución, es la que se obtiene al hacer girar región  $a$  considerar en torno al eje  $y$ . Para atacar este problema, utilizaremos como base el volumen encerrado por dos cilindros concéntricos. Supongamos que los cilindros tienen altura  $c$  y radios  $a$  y  $b$ , respectivamente, con  $a \leq b$ , entonces el volumen del sólido que se encuentra entre los dos cilindros viene dado por

$$V = \pi b^2 c - \pi a^2 c = \pi c (b^2 - a^2) = \pi c (b + a) (b - a).$$

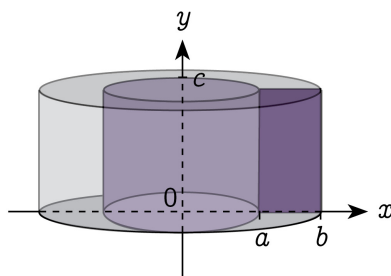


FIGURA 2.15. Cilindros concéntricos

Ahora, supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, no negativa y que  $a \geq 0$ . La región  $R$ , encerrada por esta función, se hace girar en torno al eje  $y$ , generando un sólido como se ve en la Figura 2.16.

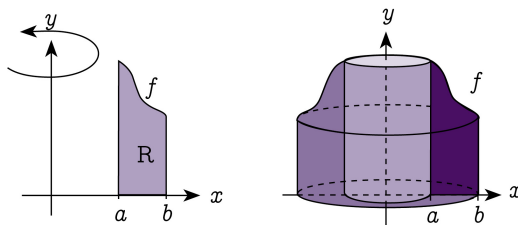


FIGURA 2.16. Método de la cáscara

Consideremos una partición  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ . Si hacemos girar las rectas  $x = x_{k-1}$  y  $x = x_k$ , con  $a \leq x_{k-1} \leq x_k \leq b$ , obtendremos un sólido como lo muestra la Figura 2.17, cuyo volumen, de acuerdo a la fórmula

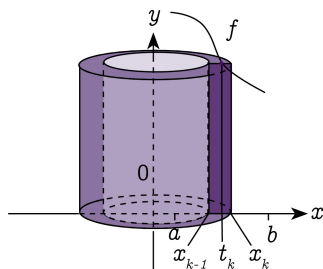


FIGURA 2.17. Método de la cáscara

entregada anteriormente, es

$$V_k = \pi f(t_k) (x_k + x_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) = \pi f(t_k) (x_k + x_{k-1}) \Delta x_k,$$

donde  $t_k$  es el punto medio del intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ . Ahora, la suma  $\sum_{k=1}^n V_k$  es, aproximadamente, el volumen de la Figura 2.16. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n V_k &= \sum_{k=1}^n \pi f(t_k) (x_k + x_{k-1}) \Delta x_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \pi f(t_k) \left( \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right) \Delta x_k = 2 \sum_{k=1}^n \pi f(t_k) t_k \Delta x_k. \end{aligned}$$

Esta última es la suma de Riemann asociada a la función  $g(x) = 2\pi x f(x)$  en  $[a, b]$ . Por tanto, podemos obtener el volumen del sólido dado en la Figura 2.16 calculando

$$(2.2) \quad V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Este método es conocido como el Método de la Cáscara o Método de Capas Cilíndricas.

**Ejemplo 2.4.** Si consideramos la función  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq r$ , y la giramos en torno del eje  $y$  se obtiene la mitad superior de la esfera. Aplicando la fórmula (2.2) y multiplicando por 2, debido a la simetría de la esfera, el volumen de la esfera es

$$V = 2 \int_0^r 2\pi x \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Utilizando la sustitución  $u = r^2 - x^2$ , obtenemos nuevamente que  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

**Ejemplo 2.5.** Otro ejemplo interesante es calcular el volumen del Toro, que es un sólido de revolución que se asemeja a un neumático.

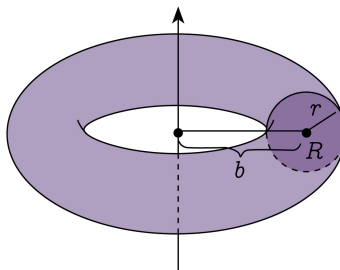


FIGURA 2.18. El toro

Esta figura se obtiene al hacer girar un disco de radio  $r$  en torno a un eje que se encuentra a una distancia  $b$  del centro de este disco. Para fijar ideas, supongamos que el centro del disco es un punto  $(b, 0)$ , con  $b > r$ . La ecuación de la circunferencia está dada por

$$(x - b)^2 + y^2 = r^2.$$

Por simetría, basta considerar la parte superior de la circunferencia:

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - (x - b)^2}.$$

Entonces volumen del Toro viene dado, según la fórmula, por

$$V = 2 \int_{b-r}^{b+r} 2\pi x \sqrt{r^2 - (x - b)^2} dx$$

Para calcular esta integral, se puede usar una sustitución trigonométrica y se procede como sigue:

$$\begin{aligned} x - b &= r \sin u, & dx &= r \cos u du, \\ x = b - r &\Rightarrow u = -\frac{\pi}{2} & \text{y} & \quad x = b + r \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_{b-r}^{b+r} 2\pi \underbrace{x \sqrt{r^2 - (x-b)^2}}_{(r \sin u + b) \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}} \underbrace{dx}_{r \cos u} \\
 &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \sin u + b) \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u} r \cos u \, du \\
 &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \sin u + b) r^2 \cos^2 u \, du = 4\pi r^2 \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \sin u \cos^2 u \, du + b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du \right] \\
 &= 4\pi b r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du = 4\pi b r^2 \frac{1}{2} \pi = 2\pi^2 r^2 b.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen del Toro es  $2\pi^2 r^2 b$ .

Si ahora hay dos funciones  $f$  y  $g$  comprometidas en la generación de un sólido de revolución en torno al eje  $y$ , con  $g(x) \leq f(x)$  en  $[a, b]$ , con  $a > 0$ , entonces, el volumen viene dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] \, dx.$$

**Ejemplo 2.6.** Encontrar el volumen de un cono de helado, modelado por la funciones  $f(x) = 3 - x^2$  y  $g(x) = 3x - 1$ , con  $0 \leq x \leq 1$ . La figura muestra el sólido obtenido.

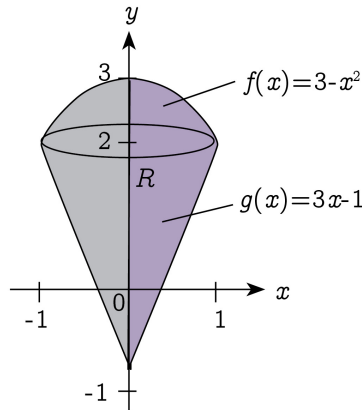


FIGURA 2.19. El cono de helado

Como  $3 - x^2 \geq 3x - 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ , tenemos que el volumen del cono de

helado es:

$$V = \int_0^1 2\pi x [(3 - x^2) - (3x - 1)] dx = \frac{3}{2}\pi.$$

**Ejemplo 2.7.** Encontrar el volumen del sólido generado por la región encerrada por las gráficas de  $y = 2x$  y de  $y = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 2$  y que gira en torno al eje  $x$ . Existen

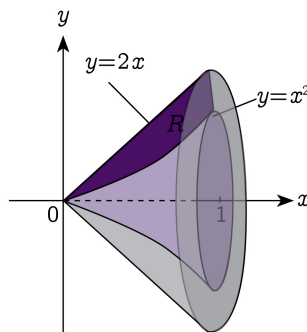


FIGURA 2.20. Método del disco y de la cáscara

dos posibles caminos para resolver este problema:

- a. El método del disco nos dice que el volumen de este sólido es

$$V = \int_0^2 \pi [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{64\pi}{15}.$$

- b. Para el método de la cáscara se requiere cambiar los roles de las variables:

$$x = \frac{1}{2}y \quad y \quad x = \sqrt{y}.$$

Buscamos los puntos de intersección de las gráficas de estas funciones obteniendo  $y = 0$  e  $y = 4$ . Además, tenemos que  $\sqrt{y} \geq \frac{1}{2}y$  si  $0 \leq y \leq 4$ . Así, el volumen del sólido es

$$V = \int_0^4 2\pi y \left[ \sqrt{y} - \frac{1}{2}y \right] dy = \frac{64\pi}{15}.$$

### Ejercicio 2.8.

- Encontrar el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región  $R$ ,
  - encerrada por las gráficas de  $f(x) = \sqrt{x+1}$  y  $g(x) = \sqrt{x-1}$  en el intervalo  $[1, 3]$ , en torno al eje  $x$ .
  - encerrada por las gráficas de  $f(x) = \cos x + \sin x$  y  $g(x) = \cos x - \sin x$  en el intervalo  $[0, \pi/4]$ , en torno al eje  $x$ .
  - encerrada por las gráficas de  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = \sin x$  en el intervalo  $[0, \pi/4]$ , en torno al eje  $y$ .

- d. encerrada por la gráficas de  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = x$  en el intervalo  $[1/2, 2]$ , en torno al eje  $y$ .
2. Una de las maravillas de la naturaleza con la que cuenta Chile es el volcán Osorno, el cual, a la distancia, parece ser un perfecto cono curvo. La altura de este volcán es de 2.652 m. sobre el nivel del mar y su cráter tiene, aproximadamente, un diámetro de 800 m. Suponga que la ladera del volcán es representada por la función

$$f(m) = \frac{0,31 \cdot 3,5 \cdot 10^5}{\sqrt{\frac{m}{0,31} + 600}},$$

donde  $m$  es la distancia en metros, al eje central del volcán (la vertical que pasa por el centro del cráter). Si las nieves eternas bajan desde el cráter hasta el nivel de 1000 m. y el espesor de estas nieves eternas es de 5 m., estime la reserva de agua que acumula el volcán en su parte superior.



FIGURA 2.21. El volcán Osorno

3. Dos cilindros de radio 1 están inscritos dentro de un cubo de lado 2, como lo muestra la Figura 2.22. Determine el volumen encerrado por estos dos cilindros.

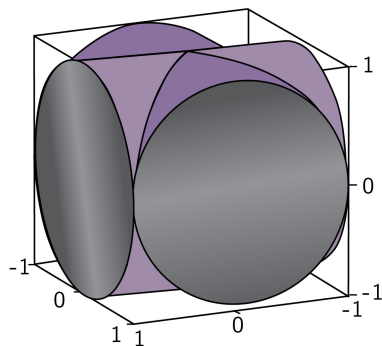


FIGURA 2.22. Intersección de cilindros

Indicación: Observe que, en el primer octante, se tiene que cada corte horizontal es un cuadrado. Ver Figura 2.23.

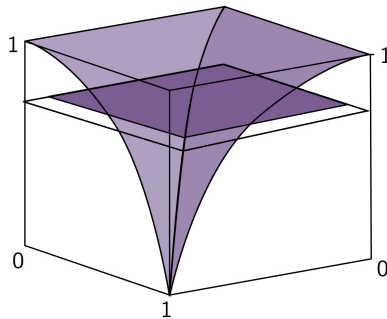


FIGURA 2.23. Intersección de cilindros

4. Considere una centrífuga cilíndrica de 2 m. de altura, de radio 1 m. y con agua hasta la mitad. Al girar, el nivel del agua comienza a elevarse cerca de las paredes, en cambio, en el centro comienza a bajar. Al hacer un corte vertical, podemos notar que la superficie del agua se ajusta a una parábola.
  - a. Suponiendo que la altura mínima  $q$  está dada, determine la ecuación de la parábola.
  - b. Suponga que podemos ver una parte circular de la base del cilindro ( $q < 0$ ), cuyo radio es  $\frac{1}{4}$  ( $q < 0$ ). Determine cuánta agua se ha vertido por la parte superior de la centrífuga.

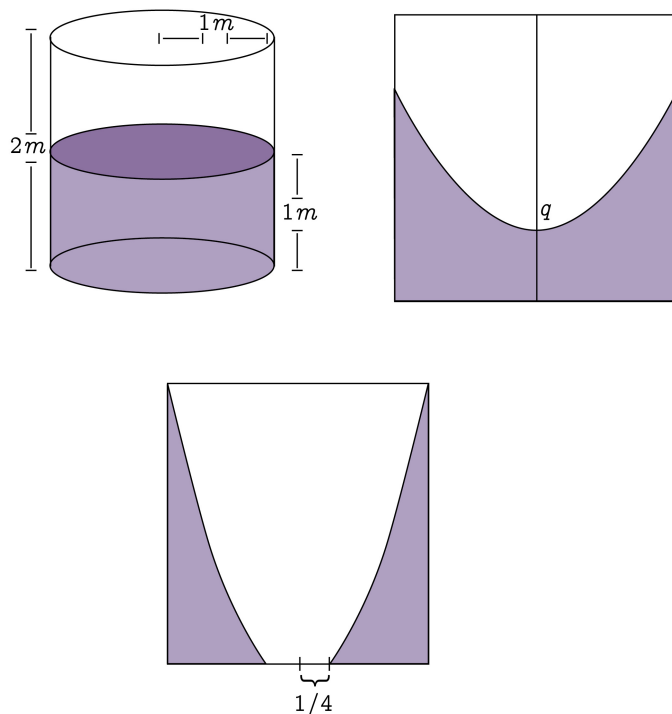


FIGURA 2.24. Centrífuga

5. Sea  $c > 0$  fijo. Considere las funciones  $f(x) = x + \frac{c}{x}$  y  $g(x) = x$ .
- Determine el volumen  $V_1$  del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región encerrada por las gráficas de  $f$  y  $g$ , en el intervalo  $[1, 3]$ , en torno al eje  $x$ .
  - Determine el volumen  $V_2$  del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región encerrada por las gráficas de  $f$  y  $g$ , en el intervalo  $[1, 3]$ , en torno al eje  $y$ .
  - ¿Es posible determinar  $c > 0$  tal que  $V_1 = V_2$ ?

## 2.2 Longitud de curvas en el plano

En esta sección discutiremos la longitud de curvas en el plano. El punto de partida de nuestra discusión es la distancia euclidiana entre dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  en  $\mathbb{R}^2$ , que corresponde a la longitud del segmento que une los puntos y que resulta ser igual a  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , de acuerdo al Teorema de Pitágoras. Ahora, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, para calcular la longitud de la curva correspondiente a la gráfica de  $f$ , podemos proceder aproximando la curva por poligonales formadas por



segmentos afines que unen puntos que se encuentran sobre ésta, como lo muestra la Figura 2.25. De esta manera, el tratamiento que daremos aquí será a través de sumas de Riemann, de modo que sólo consideraremos aquellas curvas cuya longitud puede ser determinada usando integrales.

Más precisamente, consideremos una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  de  $[a, b]$  y los segmentos que unen los extremos  $(x_i, f(x_i))$ .

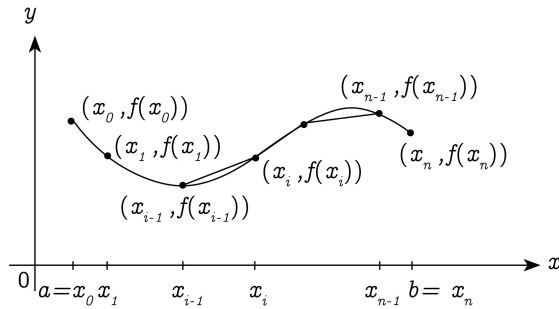


FIGURA 2.25. Longitud de curvas

Con esta información, la longitud de la gráfica de  $f$  puede ser aproximada por el largo de la poligonal observada en la figura, esto es,

$$\begin{aligned}
 l &\approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\underbrace{(x_i - x_{i-1})^2}_{\Delta x_i} + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\
 (2.3) \quad &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.
 \end{aligned}$$

Nos gustaría que la suma anterior luzca como una suma de Riemann, para ello supondremos que la función  $f$  tiene derivada continua. Bajo este supuesto podemos usar el Teorema del Valor Medio para derivadas, el cual nos entrega la existencia de un  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)\Delta x_i$ . Reemplazando esto en (2.3) tenemos

$$l \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(t_i)\Delta x_i]^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2} \Delta x_i,$$

lo que corresponde a la suma de Riemann de la función  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . En consecuencia, podemos definir la longitud de la gráfica de  $f$  como

$$(2.4) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Como hemos supuesto que la función  $f$  tiene derivada continua en  $[a, b]$ , la función  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  es integrable, así que la fórmula (2.4) tiene sentido.

**Ejemplo 2.9.** Como un primer ejemplo calculemos la longitud o perímetro de una circunferencia, que sabemos es

$$\text{Perímetro de } C = 2\pi \text{ Radio de } C.$$

Esta fórmula, de hecho, da origen a una de las definiciones del número  $\pi$  y fué conocida desde muy antiguo por la humanidad

$$\pi = \frac{1}{2} \frac{\text{Perímetro de } C}{\text{Radio de } C}.$$

Por otro lado, estas fórmulas aparecen muy temprano en el currículo de matemática escolar.

Para facilitar el trabajo, centremos la circunferencia en el origen, entonces la semicircunferencia sobre el eje  $x$  corresponde a la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , con  $-r \leq x \leq r$ . Así, el largo es:

$$l = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Ahora bien, para calcular la última integral, utilizamos la sustitución trigonométrica  $x = r \sin \theta$ :

$$x = r \sin \theta; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = r \cos \theta d\theta$$

$$r^2 - x^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{r^2 - x^2} = r \cos \theta,$$

entonces,

$$l = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r \cos \theta} r \cos \theta d\theta = 2r\pi.$$

**Ejemplo 2.10.** Sea  $f(x) = x^{3/2} + 1$ ,  $0 \leq x \leq 4/3$  (ver Figura 2.26).

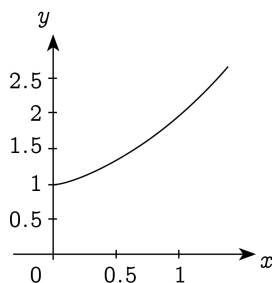


FIGURA 2.26. Longitud de gráficos de funciones

Como  $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ , la longitud de la gráfica de  $f$  es

$$l = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{56}{27}.$$

**Ejemplo 2.11.** La ecuación

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

define una curva conocida como astroide, debido a la forma de su gráfica. Para calcular

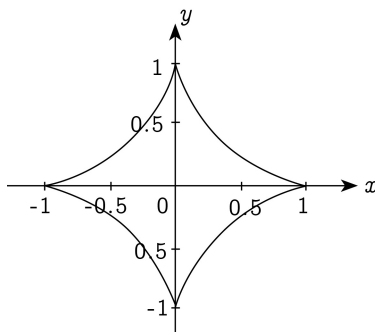


FIGURA 2.27. Astroide

la longitud del astroide, por simetría, basta calcular la longitud de la curva en el primer cuadrante. En este caso tenemos

$$y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad y' = \frac{d}{dx} \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}.$$

La función  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  tiene una singularidad en  $x = 0$ . Evitaremos este problema tomando  $c$  tal que  $0 < c \leq r$  y luego, hacemos tender  $c$  a cero. Así,

$$\begin{aligned} l_c &= 4 \int_c^r \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}\right)^2} dx = 4 \int_c^r \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= 4 x^{\frac{2}{3}} \Big|_c^r = 4 \left(\sqrt[3]{r^2} - \sqrt[3]{c^2}\right), \end{aligned}$$

luego, tomando límite cuando  $c \rightarrow 0^+$ , tenemos

$$l = 4 \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^r \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 4 \lim_{c \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{3}} \Big|_c^r = 4 \sqrt[3]{r^2}.$$

Notemos que la integral que hemos calculado es una integral impropia.

### Ejercicio 2.12.

1. Calcule la longitud de  $f(x) = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ ;  $1 \leq x \leq 2$ .

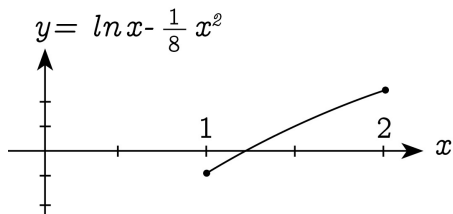


FIGURA 2.28. Longitud de gráficos de funciones

2. El cable del tendido eléctrico entre dos postes consecutivos genera la gráfica de la función  $c \cosh \frac{x}{c}$ ,  $c > 0$ , que es una catenaria. Si la distancia entre dos postes consecutivos es  $d$ , determine la longitud del cable.
3. Muestre que el área bajo la curva  $y = \cosh t$ ,  $0 \leq t \leq x$ , es igual a su longitud en dicho intervalo.

### 2.3 Áreas de superficies geométricas

En esta sección veremos cómo calcular el área de superficies usando como herramienta fundamental la integral. Con ello reencontraremos las fórmulas conocidas y tendremos una herramienta sistemática disponible para estudiar situaciones nuevas. Desde la secundaria sabemos cómo calcular el área superficies simples, como por ejemplo la superficie de un paralelepípedo regular cuya área es  $S = 2(wl + lh + hw)$  y la superficie del manto de un cilindro que es  $S = 2\pi rh$ . Usando el volumen de un cilindro como base, en la Sección 2.1 vimos métodos para encontrar el volumen de sólidos más complejos.

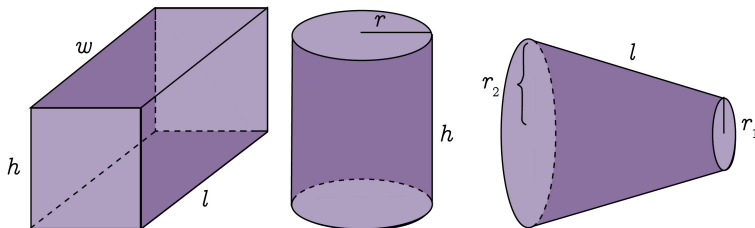


FIGURA 2.29. Área de superficies

En el caso de superficies usaremos como base el área de una porción de un cono como en la Figura 2.29. Con el fin de obtener la fórmula para el área de esta superficie,

comencemos el análisis de un cono de radio  $r$ , de altura  $h$  y largo de manto  $L = \sqrt{h^2 + r^2}$ . Tracemos la generatriz del cono, una recta desde el vértice bajando por el manto, hagamos un corte a través de ésta y extendámosla en el plano. La figura

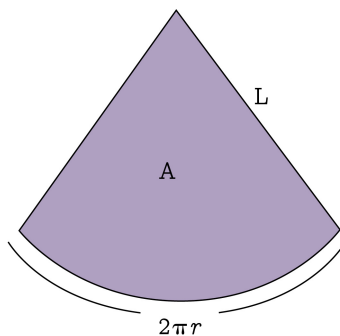


FIGURA 2.30. el cono

resultante es la porción de un círculo de radio  $L$ , cuya área  $A$  es proporcional al ángulo de apertura  $2\pi r$ , de hecho

$$\frac{A}{\pi L^2} = \frac{2\pi r}{2\pi L},$$

de donde

$$A = \pi r L.$$

De aquí obtenemos el área de la superficie de la porción del cono como

$$(2.5) \quad A = \pi r_2 (l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi (r_2 l_2 - r_1 l_1).$$

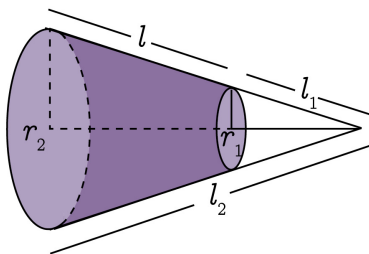


FIGURA 2.31. Porción del cono

Ahora, por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{l_2}{r_2} = \frac{l_1}{r_1} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 l_2 = r_2 l_1,$$

y entonces, reemplazando en (2.5) y desarrollando conseguimos

$$\begin{aligned}
 A &= \pi (r_2 l_2 - r_1 l_1) = \pi (r_2 l_2 - r_1 l_2 - r_1 l_1 + r_1 l_2) \\
 &= \pi (r_2 l_2 - r_2 l_1 - r_1 l_1 + r_1 l_2) \\
 &= \pi (r_2 (l_2 - l_1) + r_1 (l_2 - l_1)) \\
 &= \pi (r_2 + r_1) (l_2 - l_1) = \pi (r_1 + r_2) l.
 \end{aligned}$$

Consideremos, ahora, una función no negativa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y hagamos girar su gráfica en torno al eje  $x$ . Nos interesa encontrar el área de la superficie de revolución resultante que vemos en la figura:

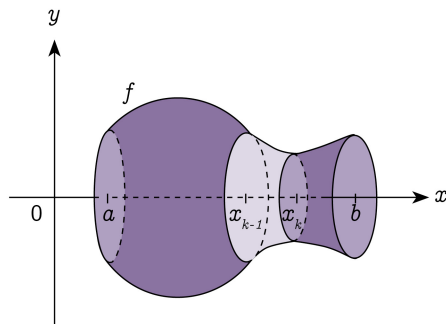


FIGURA 2.32. Superficie de revolución

Para encontrar el área consideramos, como en otros casos, una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ . Podemos observar que la superficie achurada corresponde a la superficie generada por la rotación, en torno al eje  $x$  de la función  $f$  en el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , cuya área es aproximadamente

$$(2.6) \quad \Delta S_k = \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Análogamente a lo realizado para longitud de curvas, supondremos que  $f$  es derivable con derivada continua en  $[a, b]$ , entonces por el Teorema del Valor Medio, existe  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tal que  $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$ . Reemplazando esto en (2.6), tenemos

$$\begin{aligned}
 \Delta S_k &= \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(t_k)(x_k - x_{k-1}))^2} \\
 &= \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + f'(t_k)^2} (x_k - x_{k-1}) \\
 &= \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + f'(t_k)^2} \Delta x_k.
 \end{aligned}$$

Por la continuidad de  $f$  en  $[x_{k-1}, x_k]$ , se tiene que  $f(x_{k-1}) + f(x_k) \approx f(t_k) + f(t_k) = 2f(t_k)$ , y entonces obtenemos

$$\Delta S_k \approx 2\pi f(t_k) \sqrt{1 + f'(t_k)^2} \Delta x_k.$$

En consecuencia, el área de la superficie generada por la rotación de  $f$  es, aproximadamente,

$$S \approx \sum_{k=1}^n 2\pi f(t_k) \sqrt{1 + f'(t_k)^2} \Delta x_k,$$

lo que corresponde a la suma de Riemann asociada a la función  $2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$  y que nos permite hacer la siguiente definición

**Definición 2.13.** Sea  $f$  una función no negativa, derivable y con derivada continua en  $[a, b]$ . Se define el área de la superficie de revolución generada por  $f$  como

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Ejemplo 2.14.** Calculemos el área de una esfera de radio  $r$ . La esfera puede obtenerse a través de la superficie de revolución generada por la función

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad -r \leq x \leq r.$$

Como  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , se tiene que  $f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = r$  y así,

$$S = \int_{-r}^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2,$$

que coincide con lo sabido desde la secundaria.

**Observación 2.15.** Notemos que, si  $S$  denota una esfera, entonces

$$\pi = \frac{1}{4} \frac{\text{Superficie de } S}{(\text{Radio de } S)^2}.$$

**Ejemplo 2.16.** Una situación particularmente extraña es la que presentaremos a continuación. Sea  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $1 \leq x < \infty$  y hagamos rotar esta función en torno al eje  $x$ . La figura obtenida es conocida como la trompeta de Torricelli, cuya gráfica vemos en la Figura 2.33.

Determinemos si es posible calcular el volumen y el área de la trompeta.

Para ello, recordemos que el volumen para el sólido de revolución en el intervalo  $[1, b]$  está dado por

$$V_{[a,b]} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx; \quad a \leq x \leq b.$$

Luego, se tiene que

$$V_{[1,b]} = \int_1^b \pi \left[ \frac{1}{x} \right]^2 dx = \int_1^b \pi \frac{1}{x^2} dx = \pi \left( 1 - \frac{1}{b} \right).$$

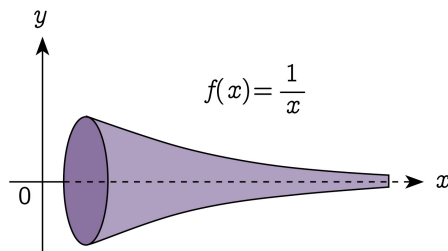


FIGURA 2.33. Trompeta de Torricelli

Así que el volumen de la trompeta de Torricelli es igual a

$$V_{[1,\infty)} = \lim_{b \rightarrow \infty} V_{[1,b]} = \lim_{b \rightarrow \infty} \pi \left( 1 - \frac{1}{b} \right) = \pi.$$

Para el área de la superficie, calculamos

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left( -\frac{1}{x^2} \right)^2},$$

de donde el área será igual a

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left( -\frac{1}{x^2} \right)^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Ahora, como

$$\frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \geq 1$$

y la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

diverge, se concluye que el área de trompeta de Torricelli es infinita.

Este ejemplo nos presenta la siguiente paradoja: necesitamos  $\pi$  litros de pintura para rellenar la trompeta, pero no hay suficiente pintura en el mundo para pintar su superficie.

### Ejercicio 2.17.

1. Sea  $f(x) = x^3$ , para  $0 \leq x \leq 1$ . Determine el área de la superficie del sólido de revolución, generado por  $f$ .



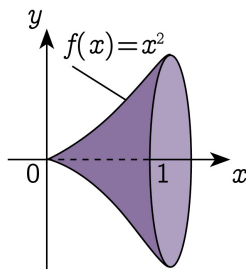


FIGURA 2.34. Área de superficie

2. Para construir un yo-yo se toma una esfera, se le hace un corte al centro y dos cortes de manera simétrica en cada costado (ver Figura 2.35). Supongamos que la esfera tiene un radio de  $3\text{cm}$ ., que el ancho del yo-yo es de  $4\text{cm}$ . y que el corte central será de  $\frac{1}{4}\text{cm}$ . Encontrar el área de la superficie externa del yo-yo.

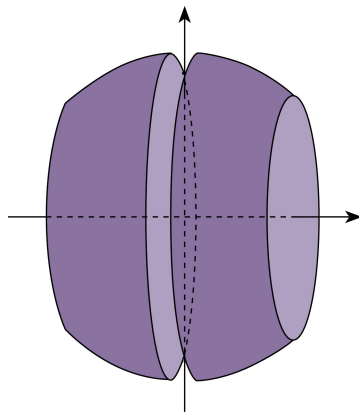


FIGURA 2.35. Yo-yo

3. Suponga que la superficie de un barril de roble, que se utiliza para añejar vino, puede ser modelada al hacer girar la gráfica de  $f(x) = \cos x$ , en el intervalo  $\left[-\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ . Encontrar el área total del barril, incluyendo sus tapas.

#### 2.4 Aplicaciones a la física: centro de gravedad.

Desde el principio, el cálculo se nutrió con problemas provenientes de la geometría y la física. Justamente, Newton desarrolló el cálculo para usarlo en modelos físicos

y así, explicar numerosos fenómenos que observaba experimentalmente. Centraremos nuestro estudio en una aplicación física: el centro de gravedad.

### 2.4.1 Centro de gravedad

Es común ver a niños jugando en “balancines” en un parque. Como los pesos corporales son distintos, podemos observar que aprenden muy rápidamente a utilizar la física para buscar los equilibrios necesarios y, de esa manera, hacer entretenido el juego.



FIGURA 2.36. Balancín

Para analizar con algún grado de profundidad este fenómeno, supongamos que tenemos un tablón paralelo al suelo y puesto sobre un soporte. Si intentamos poner dos masas de magnitudes  $m_1$  y  $m_2$ , la pregunta sería ¿a qué distancia del soporte debemos poner estas masas para que el tablón mantenga su posición paralela al suelo? Es obvio que dichas masas deben estar ubicadas en lados opuestos al soporte. Llamemos  $d_1$  y  $d_2$  a las distancias que hay entre  $m_1$  y  $m_2$  y el soporte, respectivamente. Para una mejor visualización matemática, supondremos que el tablón se encuentra sobre la recta real y que el soporte está ubicado en el origen, como se muestra en la siguiente figura:

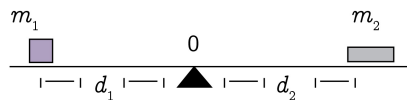


FIGURA 2.37. Punto de equilibrio

Sean  $x_1 = -d_1$  y  $x_2 = d_2$ . Arquímedes descubrió, experimentalmente, que el equilibrio se produce, si y sólo si

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0.$$

Este principio se conoce como *ley de palancas* y fue utilizado al comienzo del capítulo en el argumento de Arquímedes para calcular el volumen de la esfera.

Para continuar, supongamos que en el tablón hemos puesto  $n$  partículas con masas  $m_1, \dots, m_n$  ubicadas en  $x_1, \dots, x_n$ , respectivamente. Entonces, de acuerdo a la ley de palancas, se produce equilibrio en el origen cuando

$$M = \sum_{i=1}^n x_i m_i = 0.$$

El término  $x_i m_i$  se llama momento relativo a la masa  $m_i$  y  $M$  se llama momento total del sistema de partículas.

Supongamos ahora que repartimos estas  $n$  masas sobre el tablón de manera desordenada. Una pregunta natural que podemos hacer es ¿dónde deberíamos ubicar el soporte para que se produzca equilibrio?.

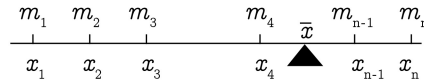


FIGURA 2.38. Punto de equilibrio

Llamemos  $\bar{x}$  a la coordenada del punto donde debería estar ubicado el soporte y hagamos el siguiente cambio de coordenadas  $x' = x - \bar{x}$ . Así, tendremos equilibrio en el origen del nuevo sistema, si y sólo si

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x'_i m_i = 0 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) m_i = 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i m_i = \sum_{i=1}^n \bar{x} m_i. \end{aligned}$$

Despejando  $\bar{x}$ , obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m},$$

donde  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  es la masa total del sistema. El punto  $\bar{x}$  se llama **centro de masa**.

En la discusión presentada anteriormente hemos considerado las partículas ubicadas en una recta. Repetiremos el proceso ubicando las partículas sobre un plano, como lo muestra la figura.

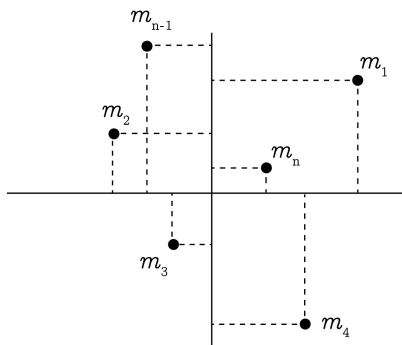


FIGURA 2.39. Masas distribuidas discretamente

Cada partícula tiene masa  $m_i$  y se encuentra ubicada en el punto  $(x_i, y_i)$ . Mirando la proyección de los puntos en cada eje, tenemos sus respectivos momentos

$$M_x = \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{y} \quad M_y = \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

de donde determinamos el centro de masa de cada proyección

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_x}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_y}{m}.$$

Con esto definimos el **centro de masa en el plano**  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

En los dos casos analizados, la situación es del tipo discreto, es decir, puntos distribuidos en la recta o en el plano. A continuación desarrollaremos un análisis similar, pero de tipo continuo. Supondremos que disponemos de una placa ubicada en el plano, más aún, supondremos que dicha placa tiene como frontera la gráfica de una función continua y no negativa  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  (ver Figura 2.40).

Supondremos, además, que la distribución de la masa es uniforme a través de toda la placa. Tomemos una partición  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  de  $[a, b]$  y elijamos arbitrariamente  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Sea  $R_i$  la región achurada en la Figura 2.40, cuya área es  $f(t_i) \Delta x_i$ . Si  $\Delta x_i$  es muy pequeño, el momento  $\Delta M_i$  de la región  $R_i$  con respecto al eje  $y$  debería ser aproximadamente igual al momento que resultaría si la masa entera

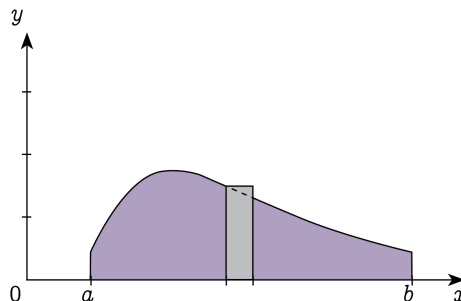


FIGURA 2.40. Masas distribuidas continuamente

de  $R_i$  se concentrara en la recta  $x = t_i$ , esto es,

$$\Delta M_i \approx (\text{distancia al eje } y) \times (\text{área}) = t_i f(t_i) \Delta x_i.$$

Por lo tanto, el momento  $M_y$  de la región entera debería ser aproximadamente la suma de sus momentos, es decir,

$$(2.7) \quad M_y \approx \sum_{i=1}^n \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^n t_i f(t_i) \Delta x_i.$$

Notar que el término del lado derecho de (2.7) es una suma de Riemann de la función  $xf(x)$ . En base a esto, podemos definir el momento  $M_y$  de la región  $R$  relativo al eje  $y$ , como

$$M_y = \int_a^b xf(x) dx.$$

Para determinar el momento  $M_x$ , requeriremos de un trabajo extra. Supongamos primero que la función  $f$  es constante, entonces la región (o la placa) corresponde exactamente a un rectángulo.

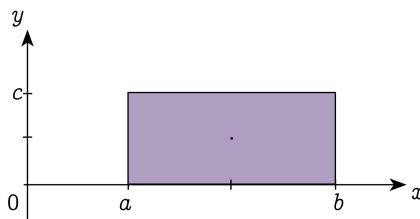


FIGURA 2.41. Centro de masa de un rectángulo

Como la masa es uniforme, el centro de gravedad es, justamente, el punto  $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ . Así que en este caso, el momento  $M_x$  está dado por

$$(2.8) \quad \begin{aligned} M_x &= (\text{distancia del centro al eje } x) \times (\text{área de } R) \\ &= c(b-a) \frac{c}{2} = \frac{1}{2} c^2 (b-a). \end{aligned}$$

Ahora, si la función  $f$  no es constante, entonces, al igual que antes, tomamos una partición  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  de  $[a, b]$  y elegimos arbitrariamente  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Aplicando (2.8) al rectángulo achurado  $R_i$  de la Figura 2.40, tenemos que

$$\Delta M_i \approx \frac{1}{2} [f(t_i)]^2 \Delta x_i$$

y luego el momento  $M_x$  de la región  $R$  relativo al eje  $x$  es aproximadamente la suma de los momentos, es decir,

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(t_i)]^2 \Delta x_i.$$

Como  $f$  es continua, podemos definir el momento  $M_x$  de la región  $R$  relativo al eje  $x$  como

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Si  $A$  es el área de la región, podemos concluir definiendo el centro de masa o centro gravitacional  $(\bar{x}, \bar{y})$  de la placa como

$$\bar{x} = \frac{M_x}{A}; \quad \bar{y} = \frac{M_y}{A}.$$

El centro de masa es exactamente el punto donde podemos equilibrar la placa para que se mantenga paralela al suelo.

### Proyecto

1. Es muy fácil comprobar que el centro de masa de un círculo de masa uniforme coincide con su centro. Averigüe cuál es el centro de masa de un semicírculo. Experimente con un cartón (la masa es aproximadamente uniforme) y compruebe que lo que encontró es, efectivamente, el centro de gravedad
2. Considere un triángulo rectángulo de masa uniforme y determine su centro de masa. Compruebe que este punto corresponde al punto donde concurren las medianas del triángulo (recuerde que mediana es el segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto del triángulo). Averigüe si lo anterior se cumple para un triángulo en general. Repita el experimento indicado en 1.) para este caso.

## Captulo 3: Series numéricas y de potencias



Los polinomios constituyen una buena herramienta para aproximar números y funciones, pues en ellos están involucradas sólo las operaciones de adición y multiplicación, lo que los convierten en objetos apreciables para aplicaciones computacionales.

La idea de aproximar funciones usando polinomios, fue introducida por Newton con el fin de calcular la integral o la derivada de dichas funciones. En este capítulo veremos que muchas de las funciones conocidas admiten buenas aproximaciones polinomiales. Este es el caso de las funciones trigonométricas, de la función exponencial y del logaritmo.

### 3.1 Polinomios de Taylor

En esta sección supondremos que  $f$  es una función que admite derivadas de todos los órdenes en un intervalo de la forma  $(a-M, a+M)$ , donde  $M > 0$ . En muchas ocasiones queremos conocer cómo se comporta  $f$  alrededor del punto  $x = a$ , lo que puede llegar a ser complicado si no conocemos una forma explícita de  $f$ . Para ello, buscaremos una aproximación de  $f$  en torno al punto  $x = a$  que sea simple y que además nos permita controlar el error cometido por esta aproximación. Un candidato natural para aproximar  $f$  es una función polinomial, debido a la facilidad para evaluarla. Supongamos que queremos aproximar  $f$  por un polinomio  $P$  alrededor del punto  $a$ . Naturalmente, requerimos que  $f(a) = P(a)$ . Entonces, la aproximación más simple es el polinomio constante dado por  $P(x) = f(a)$ . Claramente esta aproximación no es muy buena, por lo que podemos pensar en la aproximación de primer orden conocida de la propia definición de derivada. La función polinomial  $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  naturalmente satisface  $f(a) = P(a)$  y  $f'(a) = P'(a)$  y aproxima a  $f$  cerca de  $X = a$ , sin embargo este polinomio no toma en consideración la convexidad de  $f$  cerca de  $a$ , la que está asociada a  $f''(a)$ . Un polinomio cuadrático  $P(x)$  que satisfaga  $f''(a) = P''(a)$  además de  $f(a) = P(a)$  y  $f'(a) = P'(a)$  aproximará a  $f$  tomando en cuenta la convexidad.

En general, uno quisiera tener un polinomio  $P(x)$  de grado  $n$  que satisfaga

$$(3.1) \quad f(a) = P(a), f'(a) = P'(a), f''(a) = P''(a), \dots, f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a).$$

Si dicho polinomio está dado por

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n$$

entonces, imponiendo sucesivamente la condición de arriba se obtiene que

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 2! = f''(a), \dots, c_n n! = f^{(n)}(a).$$

Con este análisis, estableceremos la siguiente definición:

**Definición 3.1.** Sea  $f$  una función diferenciable hasta el orden  $n$ . El polinomio

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
 (3.2) \quad &+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
 \end{aligned}$$

se denomina polinomio  $n$ -ésimo de Taylor de  $f$  en torno a  $x = a$ .

**Observación 3.2.** Hemos definido el polinomio de Taylor de tal manera que se satisfaga (3.1). Esto significa que  $p_n$  tiene crecimiento y concavidad similar a  $f$  cerca de  $a$ , gracias a la igualdad de las primeras dos derivadas. La igualdad en las derivadas superiores es responsable de aún mayores grados de aproximación, como veremos en el Teorema 3.4.

Veamos un ejemplo de cómo el polinomio de Taylor aproxima a la función que, en cierto sentido, precisaremos más adelante.

**Ejemplo 3.3.** Analicemos qué sucede con la función  $f(x) = e^x$ . Determinemos el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor de  $f$  en torno a  $x = 0$ . Claramente,  $f^{(k)}(x) = e^x$  y entonces  $f^{(k)}(0) = 1$ , así que

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

En la Figura 3.1 vemos la gráfica de la función  $f$  y de su polinomio de Taylor para  $n = 1, 2$ , cerca de 0.

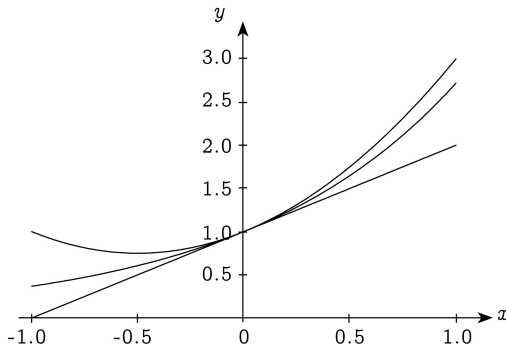


FIGURA 3.1. Polinomios de Taylor



Podemos notar que cerca de  $x = 0$  las gráficas son tan cercanas que parecen confundirse en una sola. Más aún, mientras más grande sea el  $n$ , mejor será la aproximación de del polinomio de Taylor  $p_n$  a la función.

El siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en el Apéndice (Teorema 3.65), permite formalizar la noción de aproximación que entrega el polinomio de Taylor.

**Teorema 3.4.** (*Teorema de Taylor*) Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  un intervalo abierto y  $a \in I$ . Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $f, f', \dots, f^{(n+1)}$  existe en cada punto de  $I$ , entonces, para cualquier  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , existe  $t_x$  entre  $a$  y  $x$  tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

donde

$$(3.3) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

**Observación 3.5.** El término (3.3) se llama resto de orden  $n$  y representa el error cometido por el polinomio de Taylor al tratar de aproximar la función. Esta fórmula del error permite estimarlo en muchos casos.

Puede ocurrir que el error cometido por el polinomio de Taylor sea nulo, es decir, que la función coincida con su polinomio de Taylor. Esto ocurre precisamente cuando  $f$  es un polinomio y el orden del polinomio de Taylor es mayor o igual que el grado del polinomio. Invitamos al lector a demostrar esta afirmación como ejercicio.

El Teorema 3.4 nos dice que la función es igual a su polinomio más un término de error expresado en (3.3). A la luz de este teorema nos podríamos preguntar, ¿qué sucedería si hiciéramos crecer el grado del polinomio de Taylor tanto como deseáramos, tendrá sentido hablar de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

y será cierto que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k?$$

En este capítulo responderemos a estas preguntas, en la sección de series de potencias. Allí definiremos formalmente expresiones como la anterior y mostraremos que la última igualdad es válida para muchas de las funciones conocidas.

### Ejercicio 3.6.

1. Para las siguientes funciones, encontrar la fórmula para un polinomio de Taylor arbitrario de

$$f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \cosh x \quad \text{y} \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2. Encontrar el segundo polinomio de Taylor de  $f(x) = \sqrt{x+1}$  en torno al 0 y usar esta función cuadrática para aproximar  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{1.1}$ . Compruebe sus aproximaciones con la calculadora.
3. Se puede demostrar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admite derivadas de todos los órdenes en  $\mathbb{R}$ , en particular, en  $x = 0$ . Encuentre el segundo polinomio de Taylor de  $f$  en torno a  $x = 0$  calculando las primeras dos derivadas de  $f$  en  $x = 0$ . Luego, con un programa para graficar, bosqueje la función y haga un acercamiento cerca del 0. Conjeture cuál podría ser el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor de  $f$  en torno a 0. Por otro lado, analice las primeras dos derivadas de  $f$  y conjeture la derivada  $n$ -ésima de  $f$  en  $x = 0$ .

### 3.2 Series numéricas

Cualquiera sea la colección finita de número reales  $a_1, \dots, a_n$ , es posible obtener su suma  $a_1 + \dots + a_n$ . En cambio, si tenemos una sucesión de términos  $a_1, \dots, a_n, \dots$ , entonces ¿qué sentido tendrá  $a_1 + \dots + a_n + \dots$ ? La geometría es una fuente importante de situaciones en que aparece la necesidad de darle sentido a sumas con infinitos términos. Observemos la siguiente situación:

El área del cuadrado en la Figura 3.2 es 1. Si dividimos este cuadrado en infinitos rectángulos como lo muestra la figura, tenemos que la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

y la intuición nos diría que la suma infinita debería ser igual a 1.

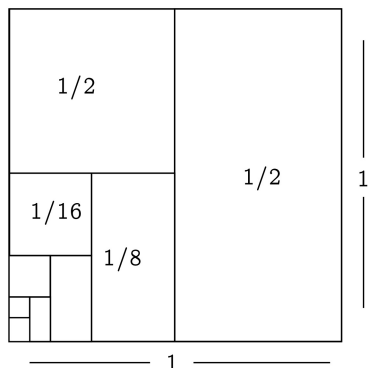


FIGURA 3.2. Suma de áreas

A pesar de que en algunos casos es bastante intuitivo obtener el valor de la suma infinita, existen otros casos donde definitivamente esto no es así. Por ejemplo, ¿qué podríamos decir de las siguientes sumas infinitas?

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \end{aligned}$$

### 3.2.1 Definición de series numéricas

Como hemos mencionado anteriormente, si  $a_1, \dots, a_n$  son números reales, podemos realizar la operación

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

independiente de cuán grande sea  $n$ . Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Pero ¿cómo podemos entender la suma hasta infinito? En este caso se trata de una suma geométrica, la cual se puede calcular explícitamente. De hecho, en general se tiene que para  $r \neq 1$

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

y por lo tanto,

$$(3.4) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Vemos que, si tomamos límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , el lado derecho converge a  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ . Así, podemos definir

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

y entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

**Definición 3.7.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una colección infinita de términos. Si

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

decimos que  $s_n$  es la suma parcial de orden  $n$  para  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y definimos por  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión de las sumas parciales de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Definimos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

y decimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge** si la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge. Si el límite de  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  no existe, entonces decimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **diverge**. Al número  $a_n$  lo llamaremos  $n$ -ésimo término de la serie infinita.

### Observación 3.8.

1. Notar que por definición  $s_n = s_{n-1} + a_n$ , lo cual resultará útil en cálculos que haremos más adelante.
2. Hemos definido la serie partiendo desde  $n = 1$ . De manera Análoga, podemos definir la serie partiendo desde un  $n_0 \in \mathbb{N}$  cualquiera.
3. Muchas veces es difícil determinar el valor de una serie, en esos casos nos preocuparemos sólo de saber si ésta converge o no.

### Ejemplo 3.9.

1. Estudiemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Para ello, notamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

luego, su suma parcial resulta ser una suma telescópica

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \cdots + \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

2. (**Serie geométrica**) Para  $r \in \mathbb{R}$ , consideremos  $a_n = r^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $r \neq 1$ , hemos visto que la suma parcial asociada a  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  está dada por

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

entonces podemos concluir que  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge, si y sólo si  $|r| < 1$ , pues en tal caso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ .

3. Una serie importante es la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mostraremos que esta serie diverge y para ello consideremos la  $2^j$ -ésima suma parcial de  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Tenemos

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_{2^2} = s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2\frac{1}{2},$$

$$s_{2^3} = s_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2},$$

entonces podemos conjeturar que para cada  $j \in \mathbb{N}$  se tiene  $s_{2^j} \geq 1 + j\frac{1}{2}$ , lo que se puede demostrar usando inducción. Ahora, como  $\lim_{j \rightarrow \infty} (1 + j\frac{1}{2}) = \infty$ , se concluye que  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_{2^j} = \infty$ , lo que muestra que la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  no es acotada y, por lo tanto, no es convergente.

Una método alternativo para demostrar este importante hecho se basa en la comparación con la integral

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si tomamos la partición  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, n+1\}$  del intervalo  $[1, n+1]$  se tiene que los  $\Delta x_i$  son todos iguales a 1 y los  $M_i = \frac{1}{i}$ , pues  $f(x) = \frac{1}{x}$  es decreciente. Por tanto,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \bar{S}_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

y, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ , se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Una de las preguntas que podemos hacernos es ¿qué relación existe entre la serie y la sucesión que la genera, en términos de convergencia? El siguiente teorema nos entregará una primera respuesta parcial y, a su vez, nos dará uno de los principales criterios de divergencia de series.

**Teorema 3.10.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Demostración.** Sabemos que  $s_n = s_{n-1} + a_n$ , luego,  $a_n = s_n - s_{n-1}$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, se tiene que  $\{s_n\}$  converge a  $S$ , y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S - S = 0.\end{aligned}$$

□

El contrarrecíproco del teorema anterior nos entrega el siguiente criterio de divergencia.

**Corolario 3.11.** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

**Ejemplo 3.12.** Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

divergen pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

ambos distintos de cero.

**Ejercicio 3.13.**

1. Considere dos rectas  $L_1$  y  $L_2$ , las cuales forman un ángulo  $\theta$ , con  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Sea  $P_0$  un punto sobre  $L_1$ . Desde  $P_0$ , trazamos una recta que corta perpendicularmente a  $L_2$  en un punto  $P_1$ , luego, desde  $P_1$  trazamos otra recta que corte perpendicularmente a  $L_1$  en un punto  $P_2$ . De manera iterada, se ubican los restantes puntos, cuyos segmentos que unen dos consecutivos forman ángulos rectos con cada recta, generando un camino de tipo zig-zag, como lo muestra la siguiente figura

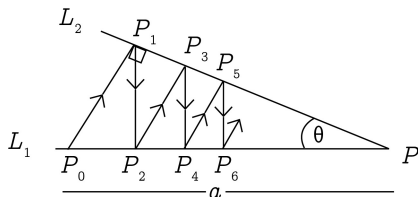


FIGURA 3.3. Suma de longitudes

Escribir las sumas

$$P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots$$

$$P_0P_1 + P_2P_3 + P_4P_5 + \cdots$$

$$P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \cdots$$

en términos de  $\theta$  y utilice la serie geométrica para calcular su valor ¿Cuánto debería ser la suma infinita  $P_0P_2 + P_2P_4 + P_4P_6 + \cdots$ ? Compruebe su conjetura.

2. Suponga que tenemos un cuadrado  $ABCD$  cuyos lados miden 1 unidad y que  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$  son los puntos medios de sus lados. Si el patrón indicado en las figuras siguientes se sigue indefinidamente ¿cuál será el área de la región achurada?

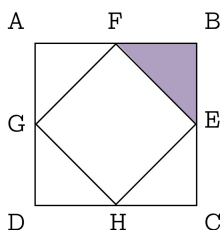


FIGURA 3.4-1

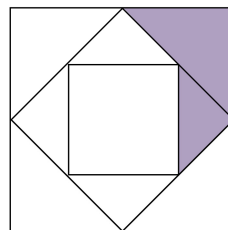


FIGURA 3.4-2

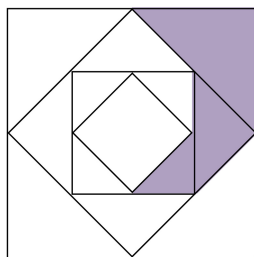


FIGURA 3.4-3

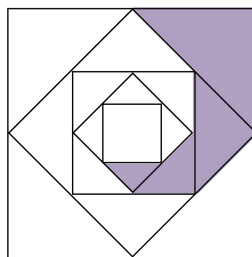


FIGURA 3.4-4

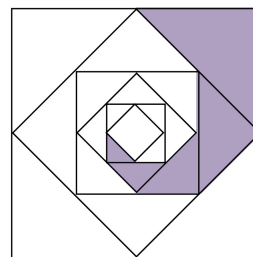


FIGURA 3.4-5

### 3.2.2 La expansión decimal

En la educación secundaria hemos visto que podemos escribir el número  $\frac{1}{3}$  en su forma decimal como

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots,$$

es decir,

$$\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k},$$

por lo que los dígitos de la representación decimal de  $\frac{1}{3}$  pueden ser entendidos como coeficientes (o términos) de una serie, cuyo límite es  $1/3$ . En la siguiente proposición probaremos que todo número  $y \in [0, 1)$  tiene una expansión decimal.

**Proposición 3.14.** *Para todo  $y \in [0, 1)$  existe una sucesión  $\{b_n\}$  con  $b_n \in \{0, \dots, 9\}$  tal que*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

**Demostración.** Sea  $y$  un número real con  $0 \leq y < 1$ ; denotaremos por  $[y]$  la parte entera de  $y$ . Definamos las sucesiones  $(b_n)$  y  $(y_n)$  iterativamente como sigue. Sea  $y_1 = 10y$ ,  $b_1 = [y_1]$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$y_{n+1} = 10(y_n - b_n) \quad \text{y} \quad b_{n+1} = [y_{n+1}].$$

No es difícil mostrar usando inducción que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq y_n < 10 \quad \text{y} \quad b_n \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq b_n \leq 9$$

y, más aún, que

$$y = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{y_{n+1}}{10^{n+1}}.$$

Como

$$0 \leq \frac{y_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

obtenemos

$$(3.5) \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n},$$

lo que concluye la demostración. □

**Observación 3.15.**

1. Esta proposición indica que todo número real tiene expansión decimal.
2. Es importante notar que en algunos casos la expansión decimal puede poseer una cantidad finita de términos. Por ejemplo,

$$0,11111 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5}.$$

3. A partir de la observación anterior cabe preguntarse ¿cuáles son los números en  $[0, 1)$  que admiten una expansión decimal finita?

**Proposición 3.16.** *Sea  $y \in [0, 1)$ . Entonces,  $y$  se puede expresar como*

$$y = \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{10^n},$$

con  $b_n \in \{0, \dots, 9\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , si y sólo si el número  $y$  se puede expresar como  $y = \frac{a}{b}$  con  $a$  y  $b$  enteros positivos, sin factores comunes y con  $b = 2^m 5^n$  para  $m, n \in \mathbb{N}$ .



**Demostración.** La demostración queda propuesta como un ejercicio para el lector.  $\square$

**Observación 3.17.** La expansión decimal de números con expansión finita no es única. Observe que

$$0,1 = 0,09999 \dots,$$

debido a que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10}.$$

es decir,

$$\frac{1}{10} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

En general, si  $y = 0, b_1 \dots b_k$  con  $b_k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces también se tiene

$$y = 0, b_1 \dots b_{k-1} \tilde{b}_k 999 \dots \quad \text{con } \tilde{b}_k = b_k - 1 \in \{0, \dots, 8\}.$$

A continuación, definiremos los decimales periódicos y semiperiódicos. Estos últimos son aquellos en los cuales los dígitos de la expansión decimal se repiten a partir de un cierto momento.

**Definición 3.18.**

1. Diremos que la expansión decimal de un número  $y \in [0, 1)$  es periódica, si

$$y = 0, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_\ell}_{\ell - \text{ veces}} b_1 b_2 \dots b_\ell \dots,$$

es decir,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{10^{\ell n}},$$

donde  $a$  es el número cuyos dígitos son  $b_1 \dots b_\ell$ . En este caso, denotamos  $y = 0, \overline{b_1 \dots b_\ell}$ .

2. Diremos que la expansión de  $y$  es semiperiódica, si

$$y = \frac{a}{10^k} + \frac{\bar{y}}{10^k}$$

con  $\bar{y} = 0, \overline{b_1 \dots b_\ell}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $a \in \{1, \dots, 10^k - 1\}$ . En este caso, denotamos  $y = 0, a_1 \dots a_k \overline{b_1 \dots b_\ell}$ , donde  $a_1, \dots, a_k$  son los dígitos de  $a$ .

Probablemente el lector sabe que los decimales periódicos y semiperiódicos representan números racionales. Veamos, a partir de un ejemplo, cómo transformar un

decimal semiperiódico en una fracción del tipo  $\frac{a}{b}$ .

Transformemos el número  $0,321515\dots$  o  $0,32\overline{15}$  en una fracción del tipo  $\frac{a}{b}$ .

$$(3.6) \quad \begin{aligned} 0,32\overline{15} &= 0,32 + 0,0015 + 0,000015 + 0,00000015 + \dots \\ &= \frac{32}{10^2} + \frac{15}{10^4} + \frac{15}{10^6} + \frac{15}{10^8} \dots = \frac{32}{10^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{10^{2n}}. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$S_n = \frac{15}{10^4} + \frac{15}{10^6} + \dots + \frac{15}{10^{2n}}$$

y multipliquemos a  $S_n$  por  $\frac{1}{10^2}$  tenemos

$$\frac{1}{10^2} S_n = \frac{15}{10^6} + \frac{15}{10^8} + \dots + \frac{15}{10^{2n}} + \frac{15}{10^{2(n+1)}},$$

luego,

$$S_n - \frac{1}{10^2} S_n = \frac{15}{10^4} - \frac{15}{10^{2(n+1)}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{99}{10^2} S_n = \frac{15}{10^2} \left( \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^{2n}} \right).$$

Haciendo tender  $n$  al infinito y denotando por  $S$  el límite de  $S_n$ , tenemos

$$\frac{99}{10^2} S = \frac{15}{10^2} \frac{1}{10^2} \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{1}{660}.$$

Por lo tanto,

$$0,32\overline{15} = \frac{32}{10^2} + \frac{1}{660} = \frac{1061}{3300}.$$

Si revisamos el cálculo anterior, nos damos cuenta que la clave para escribir el número  $0,32\overline{15}$  como una fracción  $\frac{a}{b}$ , es la expansión dada en (3.6). A partir del ejemplo anterior se puede escribir la siguiente proposición:

**Proposición 3.19.** *Si  $y$  es un número decimal periódico o semiperiódico, entonces  $y$  se puede escribir como  $y = \frac{a}{b}$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $b \neq 0$ . Recíprocamente, si  $y$  es un número racional, entonces  $y$  se puede escribir como un número decimal periódico o semiperiódico.*

**Demostración.** La demostración se deja propuesta como un ejercicio. Se sugiere inspirarse en el ejemplo anterior y utilizar el algoritmo de la división para calcular  $a \div b$ .  $\square$

**Observación 3.20.** A partir de las proposiciones anteriores vemos que la expansión decimal de números irracionales no es periódica ni semiperiódica, es por esto que encontrar los dígitos de números como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$  es todo un desafío.

**Ejercicio 3.21.**

1. Escriba  $\frac{1}{19}$  como un número decimal semiperiódico.

2. Convierta los siguientes decimales a fracciones

- |                         |                         |                           |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| a. $0.\overline{03}$ .  | c. $5.\overline{32}$ .  | e. $1.\overline{23451}$ . |
| b. $0.\overline{324}$ . | d. $0.\overline{983}$ . | f. $3,141592$ .           |

3. Encuentre la expansión decimal de  $0,2\overline{15} : 0,0\overline{34}$ .

### 3.2.3 Álgebra de series

Dado que la convergencia de una serie es equivalente a la convergencia de la sucesión de sumas parciales, podemos traspasar varias propiedades de las sucesiones convergentes a las series. En particular, podemos obtener un resultado análogo al álgebra de límites.

Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  dos series. Entenderemos por  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  a la serie obtenida a partir de la sucesión  $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ . De igual forma, entenderemos por  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  a la serie obtenida a partir de la sucesión  $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ , donde  $c$  es una constante real.

**Teorema 3.22.** (*Álgebra de series.*) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  son dos series convergentes, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

convergen. Más aún,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

### Ejercicio 3.23.

- Mostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{2^n} - \frac{2}{n(n+1)} \right)$  es convergente y calcular la suma de la serie.
- Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión. Muestre que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  converge si y solo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe. Calcule la suma de la serie. Estas series se llaman series telescópicas.
- Los siguientes ejemplos son series telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right).$$

Muestre que ellas convergen y determine sus sumas.

- Con un grado mayor de dificultad, se demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

es una series telescópica convergente. Como indicación, descomponga  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  en fracciones parciales.

### 3.2.4 Criterios de convergencia

En toda esta sección consideraremos **series de términos no negativos**. Notar que en este caso, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una serie con  $a_n \geq 0$ , entonces la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión monótona creciente. Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si y sólo si } \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ es acotada.}$$

Aquí recordamos la importante propiedad de los números reales: toda sucesión monótona creciente y acotada es convergente. Esta propiedad es una consecuencia del Axioma del Supremo y tiene un profundo contenido topológico.

#### Ejemplo 3.24.

1. Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Usando inducción podemos probar que  $n! \geq 2^{n-1}$ , para todo  $n \geq 1$ , luego,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Entonces, la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada, por lo tanto la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge.

2. Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ . Notemos que  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$  entonces,

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego, la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada, de donde concluimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  es convergente.

Siempre, bajo del supuesto que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de términos no negativos, tenemos el siguiente criterio de convergencia de series, que podríamos llamar criterio base, sobre el cual se construyen otros criterios.

**Teorema 3.25** (Criterio de comparación). *Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  dos series tales que  $0 \leq a_n \leq b_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Entonces,*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge.

**Demostración.** Si

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ y } s'_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

entonces el teorema resulta de lo siguiente:  $0 < s_n \leq s'_n$ . El resto de los detalles se dejan para el lector.  $\square$

Es evidente que este criterio sugiere que debemos ir acumulando información relativa a series convergentes o divergentes. Con esta información a mano, podremos conocer el comportamiento de otras series numéricas, como lo veremos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.26.** Estudiar el comportamiento de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n} - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}.$$

Para la primera, si  $n \geq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 \leq 2^{n-1} &\implies -2^{n-1} \leq -1 \quad / +2^n \\ &\implies 2^{n-1} \leq 2^n - 1 \implies \frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Como la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  converge, el criterio de comparación nos dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$  también converge. Se deja como ejercicio el análisis de las otras dos series.

Supongamos que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de términos positivos, estrictamente decreciente, es decir,  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots > 0$ . Si existe una función continua, no negativa y estrictamente decreciente  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que se adapta a la sucesión, es decir,  $f(n) = a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n, \quad x \in [n, n+1].$$

Integrando esta desigualdad, se tiene

$$a_{n+1} = \int_n^{n+1} a_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} a_n dx = a_n.$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene:

$$(3.7) \quad \sum_{i=2}^{n+1} a_i \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n a_i.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente criterio:

**Teorema 3.27 (Criterio de la integral impropia).** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de términos positivos y estrictamente decreciente y sea  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, no negativa y estrictamente decreciente tal que  $f(n) = a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, si y sólo si } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

**Demostración.** Basta tomar límite en (3.7) □

Notemos que el teorema sólo nos entrega información de la convergencia de la serie, pero no nos dice dónde converge.

**Ejemplo 3.28.** Apliquemos el teorema a las siguientes series:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge, si y sólo si  $p > 1$ . En efecto, notemos que la función que se adapta a  $\frac{1}{n^p}$  es  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  y la integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  es la conocida integral- $p$  que fue estudiada en la Sección 1.11. Recordemos que ésta converge, si y sólo si  $p > 1$ . De esta manera, aplicando el criterio de la integral, concluimos lo propuesto.
2. Estudiemos el comportamiento de  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ . Notamos que la función que se ajusta es  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . Entonces, haciendo el cambio de variables  $u = \ln x$ ,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \frac{1}{x \ln x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln k} \frac{1}{u} du = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\ln(\ln k) - \ln(\ln 2))$$

obtenemos que  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}$  diverge y, por lo tanto,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ , también diverge.

Los criterios de convergencia que hemos analizado han requerido del comportamiento de otras series o integrales para concluir el comportamiento de la serie a estudiar. Para el criterio de la integral, por ejemplo, requeríamos de una función que se adaptara al término central de la serie y para el de comparación requeríamos de una segunda serie cuyo comportamiento es conocido. El siguiente criterio se caracteriza por requerir propiedades intrínsecas de la serie y será de mucha utilidad en el estudio de las series de potencias.

**Teorema 3.29 (Criterio del cociente).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie ( $a_n \geq 0$ ) y sea

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Entonces, si

1.  $0 \leq L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
2.  $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
3. Si  $L = 1$ , el criterio no es concluyente.

**Demostración.** La demostración se basa en comparaciones adecuadas con la serie geométrica y queda propuesta como un ejercicio. □

**Observación 3.30.** El Teorema afirma que, si  $L = 1$ , el criterio no es concluyente. Para ilustrar esto, consideremos las series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . El límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , en ambas series, es igual a  $L = 1$ . Sin embargo, la primera diverge (serie armónica) y la segunda converge (serie  $-p$ , con  $p = 2 > 1$ ).

**Ejemplo 3.31.** Estudiemos el comportamiento de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Tenemos que  $a_n = \frac{1}{n!}$  y  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ , luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = L < 1,$$

por tanto la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge.

**Ejercicio 3.32.** Estudie el comportamiento de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

Un clase de series que no son positivas, pero que están muy ligadas a ellas son las llamadas series alternadas. Estas tienen la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

con  $a_n \geq 0$ . El estudio de la convergencia de estas series es especialmente sencillo cuando la sucesión de términos positivos  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente. Si bien esta situación es bastante especial, ella aparece con frecuencia en el estudio de series de potencias, como veremos más adelante, lo junto a la sencillez de los argumentos involucrados en el estudio de convergencia, justifica su inclusión aquí.

**Teorema 3.33 (Criterio de convergencia de las series alternadas).** *Si la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es positiva, decreciente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge.*

**Demostración.** La demostración consiste en demostrar en primer lugar que la sucesión de sumas parciales pares  $\{s_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ , es creciente y acotada, mientras que la sucesión de sumas parciales impares  $\{s_{2j+1}\}_{j=1}^{\infty}$ , es decreciente y acotada. Y en segundo lugar demostrar que

$$s_{2j+1} - s_{2j} = a_{2j+1}.$$

Dejamos al lector completar los detalles como ejercicio. □

**Ejemplo 3.34.**

- Recordemos que la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, sin embargo el criterio recién visto muestra que la serie armónica alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge. Un comentario similar podemos hacer para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ .

### Ejercicio 3.35.

- Imagine una torre de infinitos pisos, con cada piso de forma circular de radio  $r_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ .
  - ¿Será finita o infinita la suma de los perímetros de los pisos? Justifique su respuesta.
  - ¿Será finita o infinita la suma de las áreas de los pisos? Justifique su respuesta.
- La primera parte del criterio del cociente dice

$$0 \leq L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

- ¿será verdad que, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ ? Suponga que la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es tal que  $a_{2n} = 1/n^2$  y  $a_{2n+1} = 1/(2n+2)^2$ . Muestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  no existe, sin embargo, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- Dar un ejemplo de una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  diverge ¿será posible encontrar un ejemplo tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  converge y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge?
  - Considere la sucesión  $a_n = \frac{n}{n+1}$ . Compruebe que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|$$

convergen. Calcule sus sumas.

### 3.2.5 Una mirada más profunda al número $e$

En la sección 10 denotamos con la letra  $e$  a la única solución de la ecuación  $\ln x = 1$ . Además, probamos que  $2 < e < 3$ . Luego, hicimos ver que era posible aproximar este número a través de la sucesión  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , demostrando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

En el último ejemplo de la sección anterior, probamos que la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge. Ahora, encontraremos su valor y veremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}}_{y_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Desarrolland el binomio  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$



y reordenando tenemos

$$(3.8) \quad \begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Como cada factor  $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$  es menor que 1, tenemos que

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n$$

Por otro lado, se puede verificar que  $2^{n-1} \leq n!$  para todo  $n \geq 1$  y como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  converge, se tiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge. Así, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  y  $x_n \leq y_n$ , se tiene

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Falta demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq e$$

para concluir la igualdad. El argumento es el siguiente: para  $m < n$ , consideramos los primeros  $m + 1$  términos de (3.8), esto es,

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \leq x_n. \end{aligned}$$

Fijando  $m$  y haciendo tender  $n$  al infinito, concluimos que

$$y_m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e,$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Hemos visto que el número  $e$  es un número real que se puede escribir como límite de distintas maneras. Nos gustaría saber ¿qué tipo de número real es? ¿racional o irracional? Para tratar este tema, nuestro punto de partida será

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Notemos que

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots,$$

lo que nos dice que  $e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$  es siempre positivo. Supongamos que  $e$  es racional, es decir,  $e = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$ . Elijamos  $n$  suficientemente grande de manera que  $n > q$ . Observemos que si

$$c = n! \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

entonces  $c > 0$  y

$$\begin{aligned} c &= n! \left[ \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{n+1} \underbrace{\left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right]}_{\text{serie geométrica}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

es decir,  $0 < c < \frac{1}{n}$ . Por otro lado,

$$c = n!e - n! - \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} - \cdots - \frac{n!}{n!} \in \mathbb{N},$$

ya que  $n!e \in \mathbb{N}$  gracias a que, como hemos supuesto,  $e = p/q$  y a la elección de  $n > q$ . Pero esto es contradictorio al hecho que  $0 < c < \frac{1}{n}$ . Tal contradicción viene de suponer que  $e$  es racional.

### 3.2.6 Series absolutamente convergentes

A continuación estudiaremos las series de números reales en general. Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números reales y consideremos la sucesión de términos no negativos  $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ . De aquí surgen dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  es una serie de términos no negativos, podemos aplicar todos los criterios anteriores para estudiar su convergencia. Pero ¿qué podemos decir de la otra serie? Veremos que es posible obtener información acerca de su convergencia a partir de la convergencia de la serie de los módulos de los  $a_n$ .

**Teorema 3.36.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

**Demostración.** Esto resulta de los hechos siguientes:  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$  y la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ . En efecto,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

y como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, se tiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$  converge y luego, por el criterio de comparación,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$  converge. Así, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + |a_n|) - |a_n|] = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

se concluye que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.  $\square$

Como ejemplo ilustrativo de la aplicación de este teorema estudiemos el comportamiento de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ . Como

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, podemos afirmar, gracias al criterio de comparación, que  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$  converge, de donde concluimos, finalmente, que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$  converge.

Notamos que el recíproco del teorema no siempre es cierto, como lo muestra la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . En efecto, esta serie es convergente, pues es alternada, pero  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

**Definición 3.37.** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie.

1. Diremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente, si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge.
2. Diremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge condicionalmente, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge y  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge.

**Ejemplo 3.38.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$  converge absolutamente, en cambio, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge condicionalmente.

Cuando utilizamos el Teorema 3.36 en conjunto con los criterios de convergencia de series de términos no negativos, obtenemos criterios de convergencia para series generales. Obtenemos así

**Corolario 3.39.** (Criterio de Comparación). Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  una serie de términos positivos. Tenemos:

Si  $|a_n| \leq b_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

**Corolario 3.40.** (Criterio del Cuociente). Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie tal que  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$  y sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Entonces,

1.  $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.
2.  $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
3. Si  $L = 1$ , no hay información.

**Ejemplo 3.41.** Este ejemplo mostrará la forma en que enfrentaremos las series de potencias que estudiaremos en la sección que viene. Analicemos el comportamiento de la serie

$$(3.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

usando el criterio del cuociente. Para este caso,  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$  y  $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} x^{2n+3}$ , entonces

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2. \end{aligned}$$

Para asegurar convergencia se requiere que  $L = x^2 < 1$ , de donde la serie converge si  $|x| < 1$ . Si  $L = x^2 > 1$  entonces la serie no converge y si  $L = x^2 = 1$ , es decir  $|x| = 1$  ( $x = \pm 1$ ), entonces el criterio de comparación no da información y, por tanto, debemos usar algún otro criterio.

Para  $x = 1$ , reemplazamos en (3.9) y obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

la que corresponde a una serie alternada asociada a la sucesión  $\left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}$ , que es decreciente y convergente a 0, entonces esta serie converge. Para  $x = -1$ , reemplazamos en (3.9) nuevamente y obtenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1},$$

que resulta ser convergente por la misma razón anterior. En resumen, la serie (3.9) converge, para todo  $|x| \leq 1$  y diverge para  $|x| > 1$ .

### Ejercicio 3.42.

1. Para qué valores de  $p$ , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

converge condicionalmente y para qué valores de  $p$  converge absolutamente.

2. Determine para qué valores de  $x$  las siguientes series convergen:

a.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} x^n.$$

b.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

### 3.3 Series de Potencias

Sea  $\{c_n\}$  una sucesión de números reales. Definimos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

a la que llamaremos **serie de potencias** con coeficientes  $c_0, c_1, c_2, \dots$ . Es claro, que si  $x = 0$ , entonces para cualquier elección de  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es convergente y su suma es igual a  $c_0$ . Por otro lado, si existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $c_n = 0$ , para todo  $n > n_0$ , entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es convergente y su suma es igual al polinomio  $c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n_0} x^{n_0}$ .

Más generalmente, si  $a \in \mathbb{R}$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ , es llamada una **serie de potencias** en torno a  $a$ . El tratamiento de tales series puede ser reducido a una serie de potencias en torno a 0 haciendo  $\tilde{x} := x - a$ .

Aquí hay algunos ejemplos de series de potencias.

#### Ejemplo 3.43.

1. Sea  $c_n = n!$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces,  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  converge sólo para  $x = 0$ . En efecto, utilizando el criterio del cociente, tenemos que, para  $x \neq 0$ ,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty.$$

Luego, la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  diverge cualquiera sea  $x \neq 0$ .

2. Sea  $c_n := 1/n!$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = \frac{|x|}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

así, por el criterio del cociente,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$  es absolutamente convergente, para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Sea  $c_n := 1$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  corresponde a la serie geométrica  $1 + x + x^2 + \cdots$ , y ya hemos visto que ésta es convergente si y sólo si,  $|x| < 1$  y su suma  $1/(1-x)$ .

En el ejemplo anterior encontramos que la primera serie de potencias converge sólo para  $x = 0$ , en cambio la segunda serie converge para cualquier número real y, finalmente, la tercera serie converge sólo para números reales dentro de un intervalo  $(-1, 1)$ . Veremos que éstos son los únicos casos posibles con respecto a la convergencia de una serie de potencias de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ .

**Teorema 3.44.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  una serie de potencias. Entonces, sólo una de las siguientes afirmaciones se satisface:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge sólo para  $x = 0$ .
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge absolutamente para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Existe un único número real  $R > 0$  tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge para  $|x| < R$  y diverge para  $|x| > R$ .

Llamaremos **radio de convergencia** de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  al número  $R$  dado en el teorema. Notar que el teorema no entrega información para  $|x| = R$ , lo que requiere un estudio por separado. Llamaremos **intervalo de convergencia**  $I_R$  al conjunto de todos los  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge. Gracias al teorema anterior obtenemos que  $I_R$  es, efectivamente, un intervalo, más aún, este intervalo puede ser de la forma  $I_R := [-R, R]; (-R, R); [-R, R); (-R, R]$ , con  $0 \leq R \leq \infty$ .

La demostración de este teorema escapa al alcance de esta monografía, pero en el caso particular que se pueda aplicar el criterio del cociente, que es un caso suficientemente interesante, sí podemos dar un argumento: cuando el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

existe, se tiene que la serie de potencias converge si  $x \in (-1/L, 1/L)$  y diverge si  $x \notin [-1/L, 1/L]$ , es decir,  $R = 1/L$  es el radio de convergencia de la serie de potencias.

### Ejercicio 3.45.

1. Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{1/2}}$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ .
2. La siguiente serie de potencias es conocida como la función de Bessel y aparece en problemas de ondas eléctricas, conducción del calor y muchos otros:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^2 4^2 \cdots (2n)^2} x^n.$$

Determine el radio de convergencia de esta serie y utilice algún programa para graficar funciones para obtener el gráfico de  $J_0$ .

Supongamos que el intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es  $I_R$ . Entonces, para cada  $x \in I_R$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge y su suma es única. Por tanto, podemos definir la función  $f: I_R \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . Nos podríamos preguntar ¿qué propiedades tendrá esta nueva función? Veremos que esta función es continua y, por tanto, integrable, más aún, veremos que tiene derivada de todos los órdenes.

### 3.3.1 Diferenciación de series de potencias

Consideremos la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . Es claro que, si existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $c_n = 0$ , para todo  $n > n_0$ , entonces la serie de potencias corresponde a un polinomio de grado a lo más  $n_0$ . Recíprocamente podemos decir que un polinomio de grado  $n_0$  define una serie de potencias donde los coeficientes asociados a las potencias de orden  $n_0 + 1$  en adelante son todos nulos.

Por otro lado, si

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

es un polinomio de grado  $n$ , entonces su derivada se calcula derivando término a término

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

Dado que los primeros términos de una serie de potencias corresponden a un polinomio, podemos imaginarnos a esta serie como polinomios con infinitos términos y esperar que su derivada se consiga derivando término a término.

**Teorema 3.46.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  una serie de potencias, con radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces la función  $f$  definida por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , es derivable en  $(-R, R)$  y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R).$$

En el Apéndice se puede encontrar una demostración de este teorema, ver Teorema A.2.

**Observación 3.47.**

1. Notemos que el teorema anterior nos dice que si  $R > 0$  es el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , entonces, para todo  $x \in (-R, R)$  se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (c_n x^n),$$

es decir, derivar una serie es derivarla término a término.

2. Observemos que el teorema anterior garantiza que la derivada de la serie es también una serie de potencias con un radio de convergencia mayor o igual a  $R$ . Por tanto podemos volver el teorema a la serie derivada. Este hecho nos dice que la función  $f$ , definida por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , tiene derivada de todos los órdenes y sus correspondientes derivadas son, además, series de potencias con un radio de convergencia mayor o igual a  $R$ . Es posible demostrar que el radio de convergencia de todas las derivadas es exactamente  $R$ .

Más aún, si  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , entonces para  $j \in \mathbb{N}$  tenemos

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-j) c_n x^{n-j}.$$

Observamos que al evaluar esta serie en  $x = 0$  obtenemos, para los distintos valores de  $j$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 = 0!c_0, & f'(0) &= c_1 = 1!c_1, & f''(0) &= 2c_2 = 2!c_2, \\ f'''(0) &= 6c_3 = 3!c_3, & \cdots & & f^{(n)}(0) &= n!c_n \cdots \end{aligned}$$

Así, podemos expresar los coeficientes  $c_n$  en función de  $f$  de manera explícita como

$$(3.10) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

y, por tanto, podemos reescribir la función  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Este importante hecho tiene una segunda consecuencia. Recordemos que dos polinomios son iguales, si y sólo si tienen el mismo grado y sus correspondientes coeficientes son iguales. La fórmula (3.10) permite extender esto al caso de series. Supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \forall x \in (-R, R),$$

entonces, aplicando (3.10) a cada una de las series, obtenemos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n, \quad \text{para } n \geq 0,$$

lo que quiere decir que la representación en serie de potencias de una función es única.

**Ejemplo 3.48.** Analicemos la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta serie tiene como derivada a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x),$$

es decir,  $f'(x) = f(x)$ , luego,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{d}{dx} x \quad \Leftrightarrow \ln f(x) = x + c \quad \Leftrightarrow f(x) = e^c e^x,$$

por lo tanto,

$$f(x) = C e^x.$$

Evaluando esto en 0, obtenemos  $f(0) = C$  y, por otro lado de la definición de  $f$ ,  $f(0) = 1$ . Así concluimos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Hemos demostrado un interesante hecho: la función exponencial se puede expresar mediante un desarrollo en serie de potencias. Recordemos que ya sabíamos de esta igualdad para  $x = 1$ .



**Ejemplo 3.49.** Otra función que admite un desarrollo en serie de potencias es la función

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad -1 < x < 1.$$

Usando estos resultados podemos obtener desarrollos de otras funciones. Por ejemplo, obtengamos el desarrollo en serie de potencias de la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Notamos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

y, definiendo  $w = -x^2$ , se tiene que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad \text{siempre que } |w| < 1.$$

Entonces se obtiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{siempre que } |x| < 1.$$

**Ejercicio 3.50.**

1. Encuentre la serie de potencias de las siguientes funciones:

$$e^{-x}, \quad e^{x^2}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{e^x - 1}{x}$$

e indique su radio de convergencia.

2. Encuentre la serie de potencias de

$$\frac{x}{(1-x)^2}.$$

3. Considere la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- a. Determine su intervalo de convergencia.
- b. Calcule  $f'(x)$ .
- c. Determine

$$f'(x) + f(x) \quad \text{y} \quad f'(x) - f(x).$$

- d. ¿Conoce alguna función que satisfaga lo anterior?

4. Muestre que la función de Bessel, definida anteriormente, satisface la ecuación:

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

### 3.3.2 Integración de series

Vimos que la función  $f : I_R \rightarrow \mathbb{R} ; x \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  tiene derivadas de todos los órdenes por lo que, en particular, es una función continua. La continuidad de  $f$  nos garantiza que ella es integrable en cada intervalo cerrado contenido en el intervalo de convergencia de la serie. El siguiente teorema nos dice cómo calcular su integral.

**Teorema 3.51.** *Suponga que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces, la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$  converge en  $(-R, R)$  y, además,*

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x c_n t^n dt \right); \quad |x| < R.$$

Una demostración de este teorema puede encontrarse en el Apéndice, ver Teorema A.3. El teorema garantiza que el radio de convergencia de la serie integrada es al menos  $R$ , pero es posible demostrar que es exactamente  $R$ .

Este teorema nos permitirá, al igual que el teorema de diferenciación, expresar funciones conocidas como series de potencia.

**Ejemplo 3.52.** Mostremos que

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}; \quad |x| < 1$$

y, en particular, que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .

En efecto, en la subsección anterior mostramos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{siempre que } |x| < 1.$$

Ahora, sabemos que

$$\frac{d}{dx} (\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \arctan 0 = 0.$$

Usando el teorema de integración de series de potencias, obtenemos

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}; \quad |x| < 1.$$

Como  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ , concluimos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .

**Observación 3.53.** Notemos que el ejemplo anterior nos entrega una forma explícita de calcular  $\pi$ :

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Es interesante notar que esta fórmula tiene un contenido más bien aritmético que no parece hacer referencia alguna a la geometría.

**Ejercicio 3.54.**

1. Muestre que la función logaritmo admite el siguiente desarrollo

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n; \quad |x| < 1.$$

2. Ya hemos mencionado que la función  $e^{-x^2}$  no tiene una primitiva explícita, por lo que el cálculo de la integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  no se puede hacer usando directamente el Teorema Fundamental del Cálculo. Además hemos mencionado que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , pero que para demostrar esto es necesario tener conocimientos de integración en dos variables. Es interesante que ahora podemos obtener una nueva forma de entender esta integral y hacer algunos cálculos, por ejemplo, aproximar su valor numéricamente. Aplique el teorema de integración de series para mostrar que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

**3.3.3 Series de Taylor y su relación con los polinomios de Taylor**

Supongamos que  $f$  es una función que admite derivadas de todos los órdenes en un intervalo  $(-M, M)$ ,  $M > 0$ . Para  $x \in (-M, M)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , usando el Teorema de Taylor sabemos que existe  $t_x$  entre 0 y  $x$  tal que

$$(3.11) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

es el resto de orden  $n$ . ¿Qué sucede si hacemos tender a  $n$  al  $\infty$ ? Para responder esta pregunta damos la siguiente definición.

**Definición 3.55.** Supongamos que  $f$  admite derivadas de todos los órdenes en torno al punto  $x = 0$ . Definimos la serie de Taylor en  $x = 0$  como la serie de potencias siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Notemos que en la sección anterior hemos probado que, si  $f$  se define a partir de una serie de potencias, entonces  $f$  es igual a su serie de Taylor. Luego, surge la siguiente pregunta ¿cuándo una función dada es igual a su serie Taylor?

El Ejemplo 3.48 muestra que la respuesta es afirmativa en el caso de la función exponencial  $f(x) = e^x$ .

**Ejemplo 3.56.**

1. Obtengamos la serie de Taylor de  $f(x) = \sin x$ . Las derivadas de  $\sin x$  están dadas por:

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Así, la serie de Taylor de  $f$  es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**Ejercicio 3.57.** Encontrar las series de Taylor de las siguientes funciones

- $\cos x$ .
- $\ln(x+1)$ .

**Observación 3.58.** Si escribimos el polinomio de Taylor como en (3.11) entonces es evidente que para toda función  $f$ , que admite derivada de todos los órdenes en  $x=0$ , se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

**Ejemplo 3.59.** En un ejemplo anterior mostramos que la serie de Taylor de  $\sin x$  es  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ . Usemos la Observación 3.58 para demostrar que

$$(3.12) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Analicemos  $R_n(x)$  para  $f(x) = \sin x$ . El coeficiente de  $R_n(x)$  es  $\frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}$ , para  $t_x$  entre 0 y  $x$ . El valor absoluto de  $f^{(n)}(t_x)$  satisface la desigualdad siguiente:

$$\left| f^{(n)}(t_x) \right| = \begin{cases} |\sin t_x| \\ \text{o} \\ |\cos t_x| \end{cases} \leq 1,$$

luego,

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n)}(t_x)|}{n!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!}.$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , lo que muestra (3.12).

**Ejemplo 3.60.** Si una función no tiene infinitas derivadas es imposible que se pueda expresar como serie de Taylor, sin embargo la mera existencia de infinitas derivadas no garantiza que se pueda expresar así. La función  $f(x) = e^{-1/x^2}$ , considerada en el Ejercicio 3.6-3 tiene derivadas en todo punto de  $\mathbb{R}$ , incluido  $x = 0$ . Más aún  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que su serie de Taylor es la serie nula y obviamente no coincide con  $f$ , salvo en  $x = 0$ .

**Observación 3.61.** Recordemos que la función seno es impar y la función coseno es par y notemos que como consecuencia de este hecho, sus respectivos desarrollos en series de Taylor sólo tienen potencias impares y pares, respectivamente.

Como última reflexión de este capítulo de series, podemos decir que una función que es igual a su desarrollo en serie de Taylor puede ser muy bien aproximada su  $n$ -ésimo polinomio de Taylor

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Así, si queremos evaluar  $f(x_0)$  podemos usar como aproximación  $p_n(x_0)$ . Para  $n$  fijo, mientras más cerca esté  $x_0$  de  $x = 0$  mejor será la aproximación y para  $x_0$  fijo, mientras más grande sea  $n$  mejor será la aproximación.

Por ejemplo, si queremos calcular  $\sin(x_0)$  de manera aproximada, elegimos un  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande y, así, si  $n = 4$

$$\sin(x_0) \approx x_0 - \frac{1}{6}x_0^3 + \frac{1}{120}x_0^5 - \frac{1}{5040}x_0^7 + \frac{1}{362880}x_0^9.$$

Este cálculo tiene la ventaja que sólo requiere operaciones de suma y multiplicación, por lo que en principio, sólo requieren de una calculadora simple o incluso lápiz y papel. Sin embargo, para aproximar efectivamente en la práctica es posible que esta fórmula no sea satisfactoria, pues si por ejemplo queremos evaluarla en  $x_0 = 0,0567$  debemos evaluar  $x_0^9 = (0,0567)^9$  lo que tampoco es simple.

### Ejercicio 3.62.

1. Determine la serie de Taylor de  $\cos x$ ,  $\sinh x$  y  $\cosh x$  y muestre que es igual a su respectiva función. Utilice series de Taylor conocidas y evite tener que mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .
2. Compruebe, aplicando la derivación de series de potencias, que las derivadas de  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sinh x$  y  $\cosh x$  son las ya conocidas por Ud.

### 3.3.4 Una segunda mirada al número $\pi$

En el siglo XVIII, Euler mostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lo interesante de esta expresión es la aparición del número  $\pi$  expresado por una serie que se ve bastante alejada del contenido geométrico que analizamos en la sección 1.9.1,

de manera similar a la situación encontrada en la Observación 3.5.3. A continuación, mostraremos la idea que desarrolló Euler para mostrar este maravilloso resultado.

Comencemos con un trabajo algebraico simple, que el lector puede ir comprobando. Para dos números  $a$  y  $b$  tales que  $ab \neq 0$ , la ecuación

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{ab}x^2 = 0$$

tiene como soluciones, justamente, a estos números. Ahora, si reemplazamos  $x$  por  $x^2$ ,  $a$  por  $a^2$  y  $b$  por  $b^2$ , entonces las soluciones de

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \frac{1}{a^2b^2}x^4 = 0$$

son  $\pm a$  y  $\pm b$ . Una situación similar ocurre cuando consideramos tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que  $abc \neq 0$ :

$$(3.13) \quad \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) = 0$$

que es equivalente a

$$(3.14) \quad 1 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2}\right)x^4 - \frac{1}{a^2b^2c^2}x^6 = 0$$

tiene como soluciones a  $\pm a$ ,  $\pm b$  y  $\pm c$ . Esta situación se puede extender a  $n$  números, siempre que su producto sea distinto de 0.

Por otra parte, en la sección anterior demostramos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \end{aligned}$$

de modo que para  $x \neq 0$ , tenemos

$$(3.15) \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Las raíces de la ecuación  $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$  son simples y están dadas por  $\pm\pi$ ,  $\pm 2\pi$ ,  $\pm 3\pi$ ,  $\dots$  y las raíces de

$$(3.16) \quad \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

también son simples y están dadas por  $\pm\pi$ ,  $\pm 2\pi$ ,  $\pm 3\pi$ ,  $\dots$ . Sabemos que dos polinomios que tienen las mismas raíces son iguales, salvo por una constante multiplicativa. Si extendemos esta idea a la serie infinita (3.15) y al producto infinito (3.16), como si fueran polinomios que tienen las mismas raíces, podríamos concluir que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

El siguiente paso consiste en escribir esta expresión en forma equivalente, como hicimos con los productos en (3.13) y (3.14),

$$(3.17) \quad \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

$$(3.18) \quad = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) x^2 + (\cdots) x^4 - (\cdots) x^6 + \cdots$$

Como vimos en la Sección 3.3.1, dos series de potencias son iguales, si y sólo si sus coeficientes lo son, concluimos que el coeficiente  $-\frac{1}{3!}$  de  $x^2$  en la serie de potencias (3.15) es igual al coeficiente  $-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)$  de  $x^2$  en la serie de (3.17), de donde resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Este ingenioso argumento, dado originalmente por Euler no es riguroso pues hemos extendido nociones ciertas para polinomios a series y productos infinitos. Más aún, no le hemos dado sentido al producto infinito mismo

$$(3.19) \quad \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

La búsqueda de un argumento que dé validez a la fórmula encontrada motivó el desarrollo posterior de la teoría de productos infinitos.





## Apéndice



En este apéndice presentaremos la demostración de algunos teoremas que han sido invocados o enunciados en la monografía y que dieron las bases para el desarrollo de la integración y el estudio de las series.

Comenzaremos con el teorema de integrabilidad de funciones continuas.

**Teorema A.1.** *Para una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , el número  $\int_a^b f(x)dx$  siempre existe.*

**Demostración.** Recordemos que una función es integrable en  $[a, b]$  si existe un único número real  $I$  tal que

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq I \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}), \text{ cualquiera sea la partición } \mathcal{P}.$$

Sabemos que, para cualquier par de particiones  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  del intervalo  $[a, b]$ ,

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}').$$

Esto nos dice que la colección de todas la sumas inferiores es acotada superiormente y en consecuencia tiene supremo, que denotamos por  $L$ , y que la colección de todas las sumas superiores es acotada inferiormente y entonces tiene ínfimo, que denotamos por  $U$ . Así tenemos que

$$\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq L \leq U \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}').$$

Ahora, si existiera un real  $I$  tal que  $\underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) \leq I \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P})$ , entonces  $L \leq I \leq U$ . Luego, para completar la demostración basta ver que  $L = U$ . Para esto usaremos la continuidad de  $f$  en  $[a, b]$  que implica la continuidad uniforme de  $f$  en  $[a, b]$ . Así, para  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Elijamos una partición  $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  tal que  $\Delta x_k < \delta$ ,  $k = 1, \dots, n$ . La continuidad de  $f$  garantiza que existen  $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tales que  $m_k = f(t_k)$  y  $M_k = f(t'_k)$ , luego  $|t_k - t'_k| < \delta$  y, por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) - \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n [f(t'_k) - f(t_k)] \Delta x_k \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b - a} \Delta x_k = \epsilon. \end{aligned}$$

De esto, tenemos  $0 \leq L - U \leq \overline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) - \underline{\mathcal{S}}_f(\mathcal{P}) < \epsilon$ . Como  $\epsilon > 0$  fue elegido arbitrariamente, se concluye que  $L = U$ .  $\square$

El siguiente teorema justifica la derivación término a término de una serie de potencias.

**Teorema A.2.** *La función  $f : I_R = (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es derivable y*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (c_n x^n).$$

**Demostración.** Sea  $x \in I_R$  y sea  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ , para  $|t| < R$ . Mostraremos que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right| = 0.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} D(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}{t - x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n - x^n}{t - x}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema del Valor Medio tenemos que existe  $s_n$  tal que  $t^n - x^n = n s_n^{n-1}$  y  $|x - s_n| \leq |x - t|$ . Entonces

$$D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x^{n-1} - s_n^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - s_n) \frac{x^{n-1} - s_n^{n-1}}{x - s_n}.$$

Usando el Teorema del Valor Medio nuevamente, encontramos  $r_n \in (-R, R)$  tal que  $(x^{n-1} - s_n^{n-1})/(x - s_n) = (n-1)r_n^{n-2}$  y  $|x - r_n| \leq |x - s_n| \leq |x - t|$ , y entonces

$$D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - s_n) (n-1) r_n^{n-2}.$$

Podemos suponer que  $|r_n| \leq b < R$  para todo  $n$ , entonces  $c = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|c_n|b^{n-2}$  converge. Con toda esta información concluimos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right| &= \lim_{t \rightarrow x} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - s_n) (n-1) r_n^{n-2} \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow x} |x - t| \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|c_n| r_n^{n-2} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow x} |x - t| \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|c_n| b^{n-2} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow x} |x - t| c = 0. \end{aligned}$$

□

Ahora, usando la derivación de series demostraremos el Teorema de Integración de Series.

**Teorema A.3.** *Suponga que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces*

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x c_n t^n dt \right), \quad |x| < R.$$

**Demostración.** Como

$$\left| \frac{c_n}{n+1} x^n \right| \leq |c_n x^n|$$

y  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge absolutamente, se tiene que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n$  converge y por tanto,  $x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$  converge. Por el teorema anterior,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$  es derivable y

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \frac{d}{dx} (x^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

es decir,  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$  es una primitiva de  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . Luego,

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x c_n t^n dt \right).$$

□

Para finalizar este apéndice presentaremos una demostración del Teorema de Taylor.

**Teorema A.4.** Suponga que  $f$  admite derivada hasta el orden  $n$  en un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $x = 0$ . Entonces, para cada  $x \in I$ ,  $x \neq 0$ , existe  $t_x \in I$ , entre 0 y  $x$ , tal que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}x^n.$$

**Demostración.** La demostración es similar a la demostración del Teorema del Valor Medio. Definimos la función

$$g(t) = f(x) - \left[ f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + r_n(x) \frac{(x-t)^n}{x^n} \right],$$

donde

$$r_n(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

La función  $g$  es derivable en el intervalo cerrado de extremos 0 y  $x$ . Además,  $g(x) = g(0) = 0$ , como se puede verificar fácilmente. Luego, por el Teorema de Rolle, existe  $t_x$  entre 0 y  $x$  tal que  $g'(t_x) = 0$ . Pero, como

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 - \left[ f'(t) + \{f''(t)(x-t) - f'(t)\} + \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t) \right\} + \cdots - nr_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{x^n} \right] \\ &= - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + nr_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{x^n}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$0 = g'(t_x) = - \frac{f^{(n)}(t_x)}{(n-1)!}(x-t_x)^{n-1} + nr_n(x) \frac{(x-t_x)^{n-1}}{x^n}$$

es decir

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}x^n.$$

□

**Observación A.5.** Notemos que el Teorema del Valor Medio corresponde al caso  $n = 0$  del Teorema de Taylor.

## Bibliografía



- [1] Aguayo, J., *Apuntes de Clases*, desde 1998 al 2007.
- [2] Ellis, R., Gulick, D., *Calculus with Anaytic Geomtry*, Saunders College Publishers, 1994.
- [3] Howard, A., Irl, B., Stephen, D., *Calculus*, John Wiley and Sons, Inc., 2002.
- [4] Simmons, G., *Cálculo y Geometría Analítica*, McGraw Hill, 2002.
- [5] UMAP, *Tool for Teaching*, Developed by Educational Development Center, Inc., 1980.
- [6] UMAP, *Tool for Teaching*, Developed by Educational Development Center, Inc., 1977-79.



## Índice Analítico



- álgebra de series, 151
- antiderivada, 53
- área de la región, 67
- áreas de superficies, 128
- catenaria, 91
- centro de gravedad, 133
- centro de masa, 135
- crecimiento poblacional, 94
- criterio de comparación, 159
- criterio de divergencia, 146
- criterio de la integral impropia, 153
- criterio de las series alternadas, 155
- criterio del cociente, 154, 159
- criterios de convergencia, 152
- cuadratura del círculo, 75
- diferenciación de series de potencias, 162
- el número  $\pi$ , 73, 169
- el número  $e$ , 156
- expansión decimal, 147
- función de densidad de probabilidad normal estándar, 104
- función exponencial, 88
- función logaritmo natural, 79
- funciones provenientes del logaritmo, 89
- identidad de Euler, 84
- integrable, 29
- integración de series, 166
- integración por partes, 60
- integración por sustitución, 58
- integral definida, 29
- Integral impropia, 98
- integral indefinida, 56
- intervalo de convergencia, 162
- John Neper, 81
- ley de Poiseuille, 43
- longitud de curvas, 124
- lunas de Hipócrates, 76
- método de la cáscara, 119
- partición, 22
- partición equiespaciada, 41
- polinomios de Taylor, 139
- Primer Teorema Fundamental del Cálculo, 51
- primitiva, 53
- promedio de la función, 47
- radio de convergencia, 162
- serie armónica, 145
- serie geométrica, 144
- series absolutamente convergentes, 158
- series convergentes, 144
- series de potencias, 161
- series de Taylor, 167
- series numéricas, 142
- Suma de Riemann, 40
- suma inferior, 25
- suma superior, 25
- Teorema Fundamental del Cálculo, 50
- volumen de la esfera, 107
- volumen de un sólido, 110