

Transformaciones en Geometría
Euclidiana y No Euclidiana

ISBN: 978-956-306-075-1

Registro de Propiedad Intelectual: 200.522

Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas.

Diseño: Jessica Jure de la Cerda.

Diseño de Ilustraciones: Cristina Felmer Plominsky, Catalina Frávega Thomas.

Diagramación: Pedro Montealegre Barba, Francisco Santibáñez Palma.

Financiamiento: Proyecto Fondef D05I-10211.

Datos de contacto para la adquisición de los libros:

Para Chile:

1. En librerías para clientes directos.
2. Instituciones privadas directamente con:
Juan Carlos Sáez C.
Director Gerente
Comunicaciones Noreste Ltda.
J.C. Sáez Editor
jcsaezc@vtr.net
www.jcsaezeditor.blogspot.com
Oficina: (56 2) 3260104 - (56 2) 3253148
3. Instituciones públicas o fiscales: www.chilecompra.cl

Desde el extranjero:

1. Liberalia Ediciones: www.liberalia.cl
2. Librería Antártica: www.antartica.cl
3. Argentina: Ediciones Manantial: www.emanantial.com.ar
4. Colombia: Editorial Siglo del Hombre
Fono: (571) 3377700
5. España: Tarahumara, tarahumara@tarahumaralibros.com
Fono: (34 91) 3656221
6. México: Alejandría Distribución Bibliográfica, alejandria@alejandrialibros.com.mx
Fono: (52 5) 556161319 - (52 5) 6167509
7. Perú: Librería La Familia, Avenida República de Chile # 661
8. Uruguay: Dolmen Ediciones del Uruguay
Fono: 00-598-2-7124857

Transformaciones en Geometría Euclidiana y No-Euclidiana | Martín Chuaqui y Gonzalo Riera
Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
mchuaqui@mat.puc.cl, griera@mat.puc.cl

ESTA PRIMERA EDICIÓN DE 2.000 EJEMPLARES

Se terminó de imprimir en febrero de 2011 en WORLD COLOR CHILE S.A.

Derechos exclusivos reservados para todos los países. Prohibida su reproducción total o parcial, para uso privado o colectivo, en cualquier medio impreso o electrónico, de acuerdo a las leyes N°17.336 y 18.443 de 1985 (Propiedad intelectual). Impreso en Chile.

TRANSFORMACIONES EN GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y NO EUCLIDIANA

Martin Chuaqui

Gonzalo Riera

Pontificia Universidad Católica de Chile



Editores



Patricio Felmer, Universidad de Chile.
Doctor en Matemáticas, Universidad de Wisconsin-Madison,
Estados Unidos

Salomé Martínez, Universidad de Chile.
Doctora en Matemáticas, Universidad de Minnesota,
Estados Unidos

Comité Editorial Monografías



Rafael Benguria, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Doctor en Física, Universidad de Princeton,
Estados Unidos

Servet Martínez, Universidad de Chile.
Doctor en Matemáticas, Universidad de Paris VI,
Francia

Fidel Oteíza, Universidad de Santiago de Chile.
Doctor en Currículum e Instrucción, Universidad del Estado de Pennsylvania,
Estados Unidos

Dirección del Proyecto Fondef D05I-10211
Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática



Patricio Felmer, Director del Proyecto
Universidad de Chile.

Leonor Varas, Directora Adjunta del Proyecto
Universidad de Chile.

Salomé Martínez, Subdirectora de Monografías
Universidad de Chile.

Cristián Reyes, Subdirector de Estudio de Casos
Universidad de Chile.

Presentación de la Colección



La colección de monografías que presentamos es el resultado del generoso esfuerzo de los autores, quienes han dedicado su tiempo y conocimiento a la tarea de escribir un texto de matemática. Pero este esfuerzo y generosidad no se encuentra plenamente representado en esta labor, sino que también en la enorme capacidad de aprendizaje que debieron mostrar, para entender y comprender las motivaciones y necesidades de los lectores: Futuros profesores de matemática.

Los autores, encantados una y otra vez por la matemática, sus abstracciones y aplicaciones, enfrentaron la tarea de buscar la mejor manera de traspasar ese encanto a un futuro profesor de matemática. Éste también se encanta y vibra con la matemática, pero además se apasiona con la posibilidad de explicarla, enseñarla y entregarla a los jóvenes estudiantes secundarios. Si la tarea parecía fácil en un comienzo, esta segunda dimensión puso al autor, matemático de profesión, un tremendo desafío. Tuvo que salir de su oficina a escuchar a los estudiantes de pedagogía, a los profesores, a los formadores de profesores y a sus pares. Tuvo que recibir críticas, someterse a la opinión de otros y reescribir una y otra vez su texto. Capítulos enteros resultaban inadecuados, el orden de los contenidos y de los ejemplos era inapropiado, se hacía necesario escribir una nueva versión y otra más. Conversaron con otros autores, escucharon sus opiniones, sostuvieron reuniones con los editores. Escuchar a los estudiantes de pedagogía significó, en muchos casos, realizar eventos de acercamiento, desarrollar cursos en base a la monografía, o formar parte de cursos ya establecidos. Es así que estas monografías recogen la experiencia de los autores y del equipo del proyecto, y también de formadores de profesores y estudiantes de pedagogía. Ellas son el fruto de un esfuerzo consciente y deliberado de acercamiento, de apertura de caminos, de despliegue de puentes entre mundos, muchas veces, separados por falta de comunicación y cuya unión es vital para el progreso de nuestra educación.

La colección de monografías que presentamos comprende una porción importante de los temas que usualmente encontramos en los currículos de formación de profesores de matemática de enseñanza media, pero en ningún caso pretende ser exhaustiva. Del mismo modo, se incorporan temas que sugieren nuevas formas de abordar los contenidos, con énfasis en una matemática más pertinente para el futuro profesor, la que difiere en su enfoque de la matemática para un ingeniero o para un licenciado en matemática, por ejemplo. El formato de monografía, que aborda temas específicos

con extensión moderada, les da flexibilidad para que sean usadas de muy diversas maneras, ya sea como texto de un curso, material complementario, documento básico de un seminario, tema de memoria y también como lectura personal. Su utilidad ciertamente va más allá de las aulas universitarias, pues esta colección puede convertirse en la base de una biblioteca personal del futuro profesor o profesora, puede ser usada como material de consulta por profesores en ejercicio y como texto en cursos de especialización y post-títulos. Esta colección de monografías puede ser usada en concepciones curriculares muy distintas. Es, en suma, una herramienta nueva y valiosa, que a partir de ahora estará a disposición de estudiantes de pedagogía en matemática, formadores de profesores y profesores en ejercicio.

El momento en que esta colección de monografías fue concebida, hace cuatro años, no es casual. Nuestro interés por la creación de herramientas que contribuyan a la formación de profesores de matemática coincide con un acercamiento entre matemáticos y formadores de profesores que ha estado ocurriendo en Chile y en otros lugares del mundo. Nuestra motivación nace a partir de una creciente preocupación en todos los niveles de la sociedad, que ha ido abriendo paso a una demanda social y a un interés nacional por la calidad de la educación, expresada de muy diversas formas. Esta preocupación y nuestro interés encontró eco inmediato en un grupo de matemáticos, inicialmente de la Universidad de Chile, pero que muy rápidamente fue involucrando a matemáticos de la Pontificia Universidad Católica de Chile, de la Universidad de Concepción, de la Universidad Andrés Bello, de la Universidad Federico Santa María, de la Universidad Adolfo Ibáñez, de la Universidad de La Serena y también de la Universidad de la República de Uruguay y de la Universidad de Colorado de Estados Unidos.

La matemática ha adquirido un rol central en la sociedad actual, siendo un pilar fundamental que sustenta el desarrollo en sus diversas expresiones. Constituye el cimiento creciente de todas las disciplinas científicas, de sus aplicaciones en la tecnología y es clave en las habilidades básicas para la vida. Es así que la matemática actualmente se encuentra en el corazón del currículo escolar en el mundo y en particular en Chile. No es posible que un país que pretenda lograr un desarrollo que involucre a toda la sociedad, descuide el cultivo de la matemática o la formación de quienes tienen la misión de traspasar de generación en generación los conocimientos que la sociedad ha acumulado a lo largo de su historia.

Nuestro país vive cambios importantes en educación. Se ha llegado a la convicción que la formación de profesores es la base que nos permitirá generar los cambios cualitativos en calidad que nuestra sociedad ha impuesto. Conscientes de que la tarea formativa de los profesores de matemática y de las futuras generaciones de jóvenes es extremadamente compleja, debido a que confluyen un sinnúmero de factores y disciplinas, a través de esta colección de monografías, sus editores, autores y todos los que han participado del proyecto en cada una de sus etapas, contribuyen a esta tarea, poniendo a disposición una herramienta adicional que ahora debe tomar vida propia en los formadores, estudiantes, futuros profesores y jóvenes de nuestro país.

Patricio Felmer y Salomé Martínez
Editores

Agradecimientos



Agradecemos a todos quienes han hecho posible la realización de este proyecto Fondef: “Herramientas para la formación de Profesores de Matemáticas”. A Cristián Cox, quien apoyó con decisión la idea original y contribuyó de manera crucial para obtener la participación del Ministerio de Educación como institución asociada. Agradecemos a Carlos Eugenio Beca por su apoyo durante toda la realización del proyecto. A Rafael Correa, Edgar Kausel y Juan Carlos Sáez, miembros del Comité Directivo. Agradecemos a Rafael Benguria, Servet Martínez y Fidel Oteiza, miembros del Comité Editorial de la colección, quienes realizaron valiosos aportes a los textos. A José Sánchez, entonces Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción, quién contribuyó de manera decisiva a lograr la integridad de la colección de 15 monografías y a Jaime San Martín, director del Centro de Modelamiento Matemático por su apoyo durante toda la realización del proyecto. Agradecemos a Víctor Campos, Ejecutivo de Proyectos de Fondef, por su colaboración y ayuda en las distintas etapas del proyecto.

En este volumen manifestamos nuestro especial agradecimiento a Guillermo Marshall, quién fuera Decano de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile cuando iniciamos este proyecto. Su apoyo decidido y generoso permitió que esta monografía sea parte de la colección. Más aún, su convicción sobre la importancia del involucramiento de matemáticos en la educación y el sentido nacional que esto tiene, fue un importante aliciente en la concreción de las tareas que el proyecto demandó.

Agradecemos también a Bárbara Ossandón de la Universidad de Santiago, a Jorge Ávila de la Universidad Católica Silva Henríquez, a Víctor Díaz de la Universidad de Magallanes, a Patricio Canelo de la Universidad de Playa Ancha en San Felipe y a Osvaldo Venegas y Silvia Vidal de la Universidad Católica de Temuco, quienes hicieron posible las visitas que realizamos a las carreras de pedagogía en matemática. Agradecemos a todos los evaluadores, alumnos, académicos y profesores -cuyos nombres no incluimos por ser más de una centena- quienes entregaron sugerencias, críticas y comentarios a los autores, que ayudaron a enriquecer cada uno de los textos.

Agradecemos a Marcela Lizana por su impecable aporte en todas las labores administrativas del proyecto, a Aldo Muzio por su colaboración en la etapa de evaluación, y también a Anyel Alfaro por sus contribuciones en la etapa final del proyecto y en la difusión de los logros alcanzados.

Dirección del Proyecto

Índice General



Prefacio	17
Capítulo 1: Transformaciones en el Plano Euclídeo	19
1.1 Movimientos Rígidos	19
1.2 Homotecias e Inversiones en Circunferencias	32
Capítulo 2: Transformaciones de Möbius	45
2.1 Números Complejos	45
2.2 Transformaciones de Möbius	62
2.3 La Razón Doble	76
Capítulo 3. Geometría Hiperbólica	85
3.1 El Modelo de Poincaré	85
3.2 Comparación entre la Geometría Euclidiana y la Hiperbólica	98
3.3 Longitudes y Áreas	109
Capítulo 4. Apéndice: Trigonometría	117
4.1 Trigonometría Plana	117
4.2 Trigonometría Esférica	129
4.3 Trigonometría Hiperbólica	140
Bibliografía	151
Índice de figuras	153
Índice Analítico	157

Prefacio



La geometría ha jugado, desde el comienzo de la matemática, un rol fundamental. Se distingue de otras áreas de esta disciplina por su estrecho vínculo con una intuición basada en la visualización, y por la posibilidad de formular problemas que son muchas veces fáciles de entender. El estudio de la geometría fomenta un tipo de razonamiento difícil de replicar con el álgebra o el análisis. En el desarrollo moderno de la matemática, donde las áreas específicas se han ido mezclando para formar nuevas subáreas, y subáreas de subáreas, la geometría, en su totalidad, permanece como una de las columnas fundamentales. Sus rudimentos euclídeos siguen teniendo validez y su importancia no debe ser dejada de lado, ni en la formación de las personas en general, ni en la de los profesores en particular. El estudio de las propiedades de las distintas figuras geométricas, la construcción de triángulos, sus alturas, transversales y bisectrices, y luego la geometría analítica y vectorial, juegan un rol clave en el desarrollo de la capacidad de análisis de los alumnos.

Esta monografía se asienta en temas de la geometría que son posteriores a los iniciales de figuras y construcciones geométricas. Hemos incluido la mayoría de las demostraciones en detalle, dejando algunas al lector. Se ha tratado de que la monografía pueda ser leída por un estudiante avanzado en la carrera de pedagogía sin ayuda de un profesor. Los dos primeros capítulos resultarán más llanos, mientras que en el tercero y cuarto se estudian temas que contienen ideas a las que alumnos de pedagogía probablemente no han sido expuestos. En un curso de un semestre deberían poder abordarse en su totalidad los tres primeros capítulos, quedando el cuarto, presentado a manera de un apéndice, eventualmente para un seminario posterior.

El capítulo primero está dedicado a los rudimentos de la Geometría de Euclides en el plano, vistos desde el punto de vista del grupo de transformaciones que le son relevantes. Aparecen los movimientos rígidos o isometrías, y las colineaciones que preservan ángulos, a saber, las homotecias y las inversiones en circunferencias. Hacemos énfasis en la descripción de los objetos geométricos mediante ecuaciones algebraicas, un hecho de la causa en la geometría analítica. En este juego gana la geometría, por ser muchas veces el manejo algebraico un mecanismo más sencillo para demostrar un teorema o una propiedad, y gana el álgebra, porque se realiza la interpretación geométrica en las manipulaciones de las variables.

El segundo capítulo está dedicado a los números complejos. Se hace una revisión del álgebra de este cuerpo numérico, para pasar posteriormente a una reformulación en este nuevo lenguaje de las transformaciones vistas en el capítulo anterior. Las ecuaciones adoptan formas más concisas e incluso más sencillas y se refuerza el principio anterior del vínculo entre objetos geométricos y un álgebra adecuada para su descripción. En este capítulo se presenta la importante noción de proyección estereográfica, esencial para visualizar el punto al infinito que aparece inevitablemente al estudiar las inversiones. Se introduce también el grupo de las transformaciones de Möbius, las que jugarán un rol preponderante en el modelo de la geometría no euclidiana.

En el tercer capítulo presentamos un modelo para la geometría no euclidiana, el cual usa en buena parte aspectos desarrollados en el capítulo anterior. El universo estará constituido por los puntos dentro del círculo unitario del plano complejo, y el nuevo grupo de isometrías o movimientos rígidos será un subgrupo del grupo completo de las transformaciones de Möbius. Se explica cómo se logra cambiar de una geometría a otra, simplemente por la manera de medir la distancia entre puntos. Se ha incluido en este capítulo bastante material relativo al manejo del programa computacional Cinderella.

Finalmente, en el cuarto capítulo, abordamos el estudio comparativo de las tres geometrías fundamentales, la plana o euclidiana, la esférica y la hiperbólica. Esta comparación usará como eje las respectivas leyes trigonométricas, las cuales comparten muchos elementos comunes. Veremos también cómo teoremas clásicos de la geometría euclidiana pueden ser reformulados en estas geometrías.

Los autores desean agradecer en primer lugar a los directores del proyecto, Patricio Felmer y Salomé Martínez por llevar a cabo esta iniciativa, por invitarnos a participar y por el enorme esfuerzo y dedicación hacia el proyecto. Agradecemos también a todos los evaluadores que nos aportaron con críticas constructivas.

Capítulo 1: Transformaciones en el Plano Euclídeo



Un concepto fundamental en la geometría de Euclides es el de *congruencia*: dos polígonos se dicen congruentes si tienen lados y ángulos respectivos iguales. En forma más intuitiva, se dice que dos figuras geométricas son congruentes si se puede superponer exactamente una figura sobre la otra. En otras palabras, si al calcar una figura se puede llevar sin distorsionarla hasta hacerla coincidir con otra. Esto requiere de la noción de *llevar una sobre otra*, que en este capítulo se precisa con los conceptos de trasladar, rotar y reflejar. Estas acciones o transformaciones se denominan *movimientos rígidos*, los cuales en su conjunto serán clasificados en el Teorema 1.12.

A lo largo de esta monografía, y en particular durante el primer capítulo, haremos uso extensivo de la idea algebraica de *grupo*, la cual se habrá estudiado en un curso previo de estructuras algebraicas. Hacemos referencia a la monografía de esta serie, *Álgebra*, donde se explica en detalle este importante concepto y donde se presentan algunos aspectos de la relación entre grupos y la geometría euclidiana. En nuestra monografía, consideraremos conjuntos de transformaciones del plano como grupo con la operación de composición. A manera de ejemplo, podemos decir que las rotaciones del plano en torno a un punto común forman un subgrupo del grupo de movimientos rígidos. A medida que se vayan introduciendo los distintos tipos de transformaciones, iremos destacando la relación estructural entre ellas.

El segundo concepto fundamental en Euclides es aquel de *semejanza*: dos polígonos se dicen semejantes si tienen ángulos iguales y lados respectivos proporcionales. Esto nos llevará en la Sección 1.2 a extender el grupo de isometrías o movimientos rígidos para incluir las homotecias, que son transformaciones que preservan la forma o proporciones de las figuras pero no el tamaño. Completaremos el estudio de los movimientos del plano con la inversión en circunferencias, una transformación clave tanto por sus propiedades geométricas (preservan el ángulo en que se cortan rectas o circunferencias) como por su relación con las transformaciones de Möbius fundamentales en los Capítulos 2 y 3.

1.1 Movimientos Rígidos

1.1.1 Preliminares

Una transformación del plano es una biyección del plano en sí mismo. Si f es una tal transformación, entonces para cada punto P hay una única imagen P' ,

$$f(P) = P',$$

y recíprocamente para cada punto P' hay una única preimagen P . Las rectas juegan un papel destacado dentro de la geometría euclidiana y veremos que lo mismo sucede para las transformaciones que las preservan. Definimos una *colineación* como una transformación que lleva toda línea recta l en una línea recta $f(l)$.

Teorema 1.1. *El conjunto de transformaciones del plano forma un grupo. El conjunto de colineaciones del plano forma un subgrupo de este grupo.*

Demostración. La ley de grupo es la composición de funciones, esto es,

$$(f \circ g)(P) = f(g(P)).$$

En otras palabras, un punto P se transforma primero en P' (por g) y luego este a su vez se transforma en P'' (por f). Demostremos que $f \circ g$ es sobreyectiva. Si R es un punto cualquiera, existirá un punto Q tal que $f(Q) = R$ pues f es sobreyectiva; a su vez existe un punto P tal que $g(P) = Q$ pues g es sobreyectiva. Luego $(f \circ g)(P) = f(g(P)) = f(Q) = R$. Demostremos que $f \circ g$ es inyectiva. Si $f \circ g(A) = f \circ g(B)$ entonces $f(g(A)) = f(g(B))$ de donde, siendo f inyectiva, $g(A) = g(B)$. Luego $A = B$ pues g es inyectiva. Entonces $f \circ g$ es una transformación del plano.

El elemento neutro es la transformación identidad definida por $id(P) = P$ para todo punto P . El inverso es la función inversa f^{-1} también biyectiva definida por

$$f^{-1}(P') = P \quad \text{si} \quad P' = f(P).$$

Si pensamos que f toma un punto P y lo mueve a una nueva posición P' entonces f^{-1} trae de vuelta el punto P' a su posición inicial.

Sean α y β ahora dos colineaciones. Si l es una recta, entonces $\beta(l)$ es una recta y luego $(\alpha \circ \beta)(l) = \alpha(\beta(l))$ es una recta; se deduce que $\alpha \circ \beta$ es una colineación. Sea m una recta y $P', Q' \in m$. Si $\alpha(P) = P'$, $\alpha(Q) = Q'$, entonces la recta l que pasa por P y Q tiene como imagen la recta n por P' y Q' . Se deduce que $\alpha^{-1}(m) = l$ y, por lo tanto, α^{-1} es una colineación. \square

Como se verá en el Teorema 1.17, las colineaciones del plano que preservan ángulo (concepto a definir en forma precisa más adelante) son las traslaciones, simetrías, reflexiones, rotaciones y homotecias. Estudiaremos cada una en detalle pues son el fundamento de la geometría de Euclides. Un hecho que no demostraremos, es que una colineación general (que no preserva ángulos necesariamente) es una transformación afín, es decir, una transformación lineal (invertible) seguida de una traslación. El lector interesado podrá tratar de probar esto.

1.1.2 Traslaciones

Un método útil para la comprobación o la demostración de hechos geométricos, es hacer la traducción a ecuaciones donde podemos descansar en manejos algebraicos. Debemos pensar en términos geométricos, pero al mismo tiempo ser capaces de traducir la intuición a ecuaciones que podamos resolver o interpretar. Un tema subyacente

en toda esta monografía es justamente esa dualidad entre la geometría y sus descripción mediante ecuaciones. Fijemos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Una traslación de vector $\vec{v} = (a, b)$ es aquella transformación del plano que lleva cada punto P a un punto Q en a unidades más allá en la horizontal y en b unidades en la vertical. En términos informales, una hoja de papel transparente se desliza sin arrugarse sobre una mesa, moviéndose cada uno de sus puntos en una misma dirección y magnitud prescrita. Representamos este movimiento $T_{\vec{v}}$ en términos de las coordenadas originales (x, y) del punto P sobre la mesa y las nuevas coordenadas (x', y') del punto Q sobre la hoja de papel:

$$T_{\vec{v}}(x, y) = (x', y')$$

si

$$x' = x + a \quad , \quad y' = y + b .$$

Teorema 1.2. *Para cada pareja de puntos P y Q existe una única traslación tal que $T_{\vec{v}}(P) = Q$.*

Demostración. El vector \vec{v} debe satisfacer

$$q_1 = p_1 + a \quad , \quad q_2 = p_2 + b .$$

Luego $a = q_1 - p_1$, $b = q_2 - p_2$. Se denota por \overrightarrow{PQ} a ese vector determinado por P y Q y se tiene

$$T_{\overrightarrow{PQ}}(P) = Q .$$

Geométricamente, una traslación se representa por flechas, todas paralelas y de igual magnitud y sentido. \square

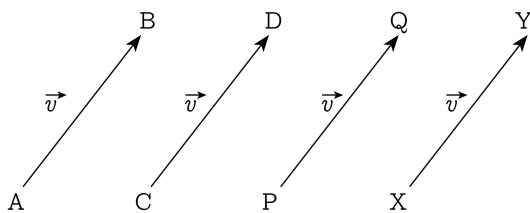


FIGURA 1.1. Vectores equivalentes

Notación. Denotaremos por PQ a la recta por los puntos P, Q , por $|PQ|$ a la distancia entre ellos, y por \overline{PQ} al segmento de recta entre ellos.

Teorema 1.3. *Toda traslación es una colineación. La imagen de una recta l es una recta $T_{\vec{v}}(l)$ paralela a l . Las rectas paralelas al vector \vec{v} son llevadas en sí mismas por la traslación.*

Demostración. Sea l una recta de ecuación

$$ax + by + c = 0,$$

y $\vec{v} = (h, k)$ de tal forma que $x' = x + h$, $y' = y + k$. Entonces

$$a(x' - h) + b(y' - k) + c = 0,$$

o

$$ax' + by' + (c - ah - bk) = 0,$$

lo cual efectivamente corresponde a la ecuación de una recta paralela a l .

Una recta por el origen que contiene el punto (h, k) tendrá ecuación

$$kx - hy = 0,$$

y una recta paralela será entonces

$$kx - hy + c = 0.$$

Es inmediato verificar que esta recta es llevada sobre sí misma por la traslación en \vec{v} ; por cierto, cada punto de la recta se mueve pero permanece en ella. \square

Teorema 1.4. *Las traslaciones forman un subgrupo abeliano de las colineaciones.*

Demostración. Por la definición de suma y resta de vectores es claro que

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}(P) = T_{\vec{u}}(T_{\vec{v}}(P)) = T_{\vec{u}+\vec{v}}(P) = T_{\vec{v}+\vec{u}}(P),$$

y, además, $T_{\vec{u}}^{-1}(P) = T_{-\vec{u}}(P)$, $T_{\vec{0}} = id$. En términos de coordenadas, si $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ entonces $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ tiene expresión

$$x'' = x + a + c \quad , \quad y'' = y + b + d,$$

y $T_{\vec{u}}^{-1}$ se expresa por

$$x' = x - a \quad , \quad y' = y - b.$$

\square

1.1.3 Simetrías

Para este tipo de transformaciones pensamos simplemente en rotar nuestra hoja de papel transparente en 180 grados, girando sobre un punto fijo, el origen. Así, esta simetría S lleva cada punto P a un punto Q , que fue rotado hasta llegar a la posición opuesta respecto del punto fijo. En términos de coordenadas centradas en el punto fijo tenemos

$$x' = -x \quad , \quad y' = -y.$$

Para definir una simetría respecto a un punto $A = (a_1, a_2)$ cualquiera, utilizamos la operación de *conjugación*. Esto es, traemos el punto A al origen por $T_{\overrightarrow{OA}}^{-1}$, aplicamos la simetría S , y volvemos al punto A por $T_{\overrightarrow{OA}}$. En total

$$S_A = T_{\overrightarrow{OA}} \circ S \circ T_{\overrightarrow{OA}}^{-1},$$

y obtenemos las ecuaciones de S_A por

$$x \rightarrow x - a_1 \rightarrow -x + a_1 \rightarrow -x + 2a_1 = x'$$

$$y \rightarrow y - a_2 \rightarrow -y + a_2 \rightarrow -y + 2a_2 = y'.$$

La transformación S_A toma un punto y lo rota en 180° respecto al centro A .

Teorema 1.5. *Toda simetría es una colineación. La imagen de una recta l es una recta $S_A(l)$ paralela a l .*

Demostración. La demostración es muy sencilla si apelamos a la representación mediante ecuaciones. Si $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta, los puntos simétricos satisfacen

$$a(-x' + 2a_1) + b(-y' + 2a_2) + c = ax' - by' + 2aa_1 + 2ba_2 + c = 0,$$

lo que representa una recta paralela a la primera. \square

El siguiente teorema muestra la aparición de otro subgrupo del grupo de colineaciones en este capítulo. Se trata de una clase de transformaciones cerrada bajo la composición.

Teorema 1.6. *La compuesta de una simetría y una traslación es una simetría. La compuesta de dos simetrías es una traslación. Una simetría es igual a su inversa $S_A = S_A^{-1}$.*

Demostración. Las ecuaciones para $S_A \circ T_{\vec{v}}$ son

$$x' = (-x + 2a_1) + a = -x + 2(a_1 + a/2),$$

$$y' = (-y + 2a_2) + b = -y + 2(a_2 + b/2),$$

que corresponden a una simetría respecto al punto

$$A' = (a_1 + a/2, a_2 + b/2).$$

Las ecuaciones para $S_A \circ S_B$ son

$$x' = -(-x + 2a_1) + 2b_1 = x + 2(b_1 - a_1),$$

$$y' = -(-y + 2a_2) + 2b_2 = y + 2(b_2 + a_2),$$

y, por lo tanto,

$$S_A \circ S_B = T_{2\overrightarrow{AB}}.$$

Verificamos finalmente que $S_A \circ S_A = id$:

$$x' = -(-x + 2a_1) + 2a_1 = x,$$

$$y' = -(-y + 2a_2) + 2a_2 = y.$$

□

Corolario 1.1.1. *La unión de las traslaciones y las simetrías forman un subgrupo no abeliano de las colineaciones.*

Demostración. Sólo falta ver que no es abeliano. Por ejemplo, para $A \neq B$

$$S_A \circ S_B = T_{\overrightarrow{AB}} \quad , \quad S_B \circ S_A = T_{\overrightarrow{BA}} = T_{\overrightarrow{AB}}^{-1} \neq T_{\overrightarrow{BA}}.$$

□

Ejercicios 1.7.

1. Demuestre que $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ si y solo si $ABDC$ es un paralelogramo.
2. Sea S_A una simetría. Demuestre que el punto medio entre P y $S_A(P)$ es A .
3. Sea M el punto medio del segmento AB . Entonces
 - a) $S_M \circ S_A = T_{\overrightarrow{AB}}$;
 - b) $S_B \circ S_M = T_{\overrightarrow{AB}}$.
4. Demuestre que el producto de tres simetrías es una simetría.
5. Establezca la fórmula

$$S_A \circ S_B \circ S_C = S_C \circ S_B \circ S_A.$$

6. Sean A, B, C tres puntos no colineales y $ABCD$ un paralelogramo. Probar que

$$S_C \circ S_B \circ S_A = S_D.$$

7. Sean E, F, G tres puntos no colineales. Construya un triángulo $\triangle ABC$ tal que E, F, G sean los puntos medios de los lados.
8. Establezca la fórmula

$$S_P \circ T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_P = T_{\overrightarrow{S_P(A)S_P(B)}}.$$

9. Calcule la imagen de la recta

$$x - 2y + 5 = 0$$

por

- a) la traslación $T_{\overrightarrow{AB}}$ si $A(1, 3), B(2, -2)$;
 - b) la simetría S_P si $P(-4, 5)$.
10. Demuestre que la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \langle T_{\overrightarrow{AB}} \rangle$ (el grupo cíclico generado por $T_{\overrightarrow{AB}}$) dada por

$$f(n) = T_{n \overrightarrow{AB}}$$

es un isomorfismo de grupos. ¿Cuáles son los subgrupos de $\langle T_{\overrightarrow{AB}} \rangle$?

11. En el grupo de las traslaciones y simetrías, ¿existe un subgrupo finito con 3 o más elementos?
12. a) Escriba una matriz 3×3 de modo que la imagen del punto $(x, y, 1)$ sea $(x + a, y + b, 1)$.
 b) Escriba una matriz 3×3 de modo que la imagen del punto $(x, y, 1)$ sea $(-x + 2a_1, -y + 2b_1, 1)$.
 c) Verifique matricialmente que la compuesta de una simetría y una traslación es una simetría y que la compuesta de dos simetrías es una traslación.

1.1.4 Reflexiones

La representación del siguiente tipo de transformaciones mediante una hoja de papel sobre la mesa, exigirá que levantemos la hoja. Se dibuja una recta l sobre la hoja, se levanta la hoja y se vuelve a poner de modo que la recta vuelva a su lugar tras haber invertido la hoja de papel, quedando la cara de abajo del papel, ahora arriba. La recta l quedó fija, sin embargo, abajo y arriba fueron intercambiados. Este proceso cambia el lado respecto de l del cual estaban los puntos de la hoja. En términos precisos, sea l una recta en el plano. La reflexión R_l con respecto a la recta l lleva un punto P a un punto P' tal que l es la simetral del segmento $\overline{PP'}$. Esto es, si trazamos la perpendicular PQ desde P a la recta l , entonces $P'Q$ es también perpendicular a l y $|PQ| = |QP'|$. Los puntos Q en la recta l quedan fijos: $R_l(Q) = Q$.

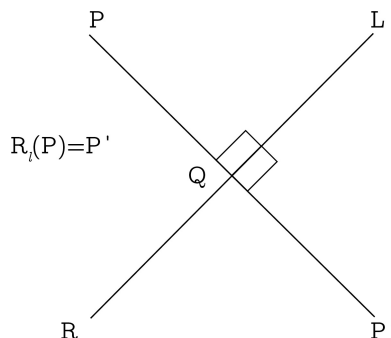


FIGURA 1.2. Puntos reflejados

Teorema 1.8. *Toda reflexión es una colineación. Toda reflexión es involutiva, esto es $R_l \circ R_l = id$.*

Demostración. Primero veremos que toda reflexión es una colineación. Sea m una recta que intersecta l en A . Sea m' la recta que intersecta l en A tal que l sea la bisectriz del ángulo formado por m y m' . Si P es un punto en m , entonces la perpendicular PQ

intersecta m' en un punto P' . Se forman allí dos triángulos con ángulos iguales y un lado común; son, por lo tanto, congruentes y entonces $|PQ| = |QP'|$ y $R_l(P) = P'$. Luego $R_l(m) = m'$.

Si m es paralela a l entonces m' es la recta paralela a igual distancia del otro lado de l y $R_l(m) = m'$. De la definición de reflexión, $R_l(P') = P$, y luego

$$R_l \circ R_l(P) = R_l(P') = P.$$

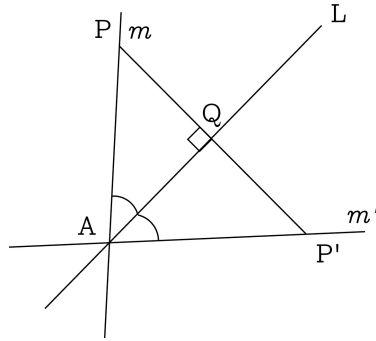


FIGURA 1.3. Triángulos congruentes

□

1.1.5 Rotaciones

Nuestra hoja de papel ahora debe rotar en torno a un punto fijo en un ángulo determinado, ya sea en sentido horario o antihorario. Sea O un punto del plano y θ un ángulo orientado. La rotación $U_{O,\theta}$ de centro O y ángulo θ lleva todo punto P a un punto P' tal que $\angle POP' = \theta$ y la distancia de P a O es igual a la de P' a O .

El siguiente teorema muestra que las rotaciones que fijan un punto, forman un subgrupo del grupo de colineaciones. El teorema que le sigue describe qué sucede cuando se componen rotaciones con reflexiones. Se ve que las reflexiones no forman un subgrupo, ya que la composición (de dos ellas) puede no resultar una rotación sino, una traslación.

Teorema 1.9. *Toda rotación es una colineación. La inversa de una rotación es una rotación $U_{O,\theta}^{-1} = U_{O,-\theta}$.*

Demostración. Sea m una recta que no pasa por O y tracemos la perpendicular OB desde O a la recta m . Giramos B para obtener B' y construimos la recta m' perpendicular a OB' por B' . Si P es un punto cualquiera en m , construimos P' en m' de tal forma que $\triangle OBP$ sea congruente a $\triangle OB'P'$. Es inmediato que si $\angle BOB' = \theta$

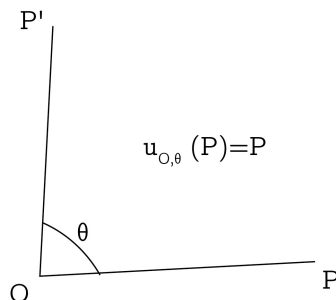


FIGURA 1.4. Una rotación

entonces $\angle POP' = \theta$; se sigue que $R_{O,\theta}(P) = P'$ y luego $R_{O,\theta}(m) = m'$. Si m es una recta que pasa por O , m' es la recta por O que hace un ángulo θ allí.

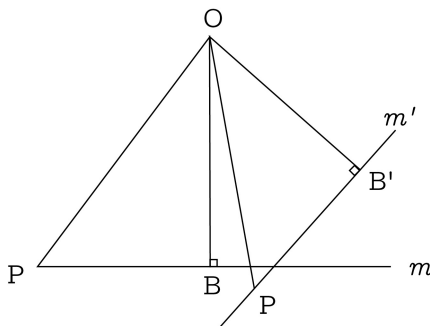


FIGURA 1.5. Rotaciones

□

Teorema 1.10. *La composición de dos reflexiones R_l y R_m es*

- i) *una traslación si l y m son paralelas;*
- ii) *una rotación si l intersecta m .*

Recíprocamente, toda traslación es la compuesta de dos reflexiones y toda rotación es la compuesta de dos reflexiones.

Demostración. Sean l y m dos rectas paralelas, A y B dos puntos respectivamente en l y m tal que AB es perpendicular a ambas rectas. Afirmamos que $R_m \circ R_l = T_{\vec{AB}}$.

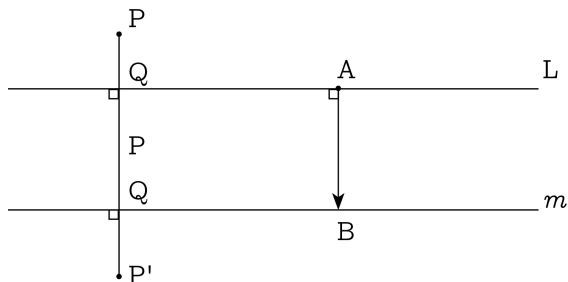


FIGURA 1.6. Traslación

En efecto, si P es un punto cualquiera, entonces $|PQ| = |Q'P'|$ y $|P'Q'| = |Q'P''|$ implica que $|PP''| = 2|\overrightarrow{AB}|$ (el largo del vector), y puesto que PP'' es perpendicular a ambas rectas, $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$, demostrando la afirmación.

Sean ahora l y m dos rectas que se intersectan en O y forman un ángulo α de l a m .

Afirmamos que

$$R_m \circ R_l = U_{O, 2\alpha}.$$

Si P es un punto cualquiera, los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OP'Q$ son congruentes y también lo serán $\triangle OP'Q'$, $\triangle OQ'P''$. De la igualdad de los ángulos al centro se obtiene $\angle POP'' = 2\alpha$, y de la igualdad de los lados sigue $\overline{OP} = \overline{OP''}$, demostrando la afirmación.

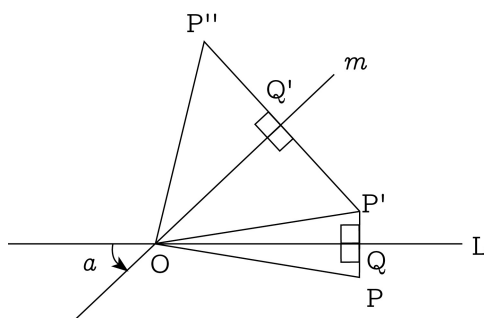


FIGURA 1.7. La compuesta

□

El siguiente teorema puede sorprender por el hecho de que la composición de dos rotaciones de centro distinto puede, en algunos casos, resultar en una traslación.

Teorema 1.11. Sean U_{O_1, θ_1} , V_{O_2, θ_2} dos rotaciones de centros distintos.

- i) Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ con k entero, entonces $U_{O_1, \theta_1} \circ V_{O_2, \theta_2}$ es una traslación.
- ii) Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, entonces $U_{O_1, \theta_1} \circ V_{O_2, \theta_2}$ es una rotación de ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

Demostración. Sea d la recta que une los centros O_1 y O_2 y d_1, d_2 las rectas que hacen ángulos $\theta_1/2, \theta_2/2$ respectivamente con d en los puntos O_1, O_2 . Denotamos por R, R_1 y R_2 las reflexiones en esas rectas. Entonces $U_{O_1, \theta_1} = R \circ R_1$ y $U_{O_2, \theta_2} = R_2 \circ R$. Componiendo se obtiene (abreviando notación) $V \circ U = (R_2 \circ R) \circ (R \circ R_1) = R_2 \circ R_1$ pues $R^2 = id$. Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, las rectas d_1 y d_2 son paralelas y, por lo tanto, $R_2 \circ R_1$ es una traslación. Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, las rectas d_1 y d_2 no son paralelas y, por lo tanto, $R_2 \circ R_1$ es una rotación con centro en el punto de intersección de ellas; el ángulo que se forma allí es $\pi - (\theta_1 + \theta_2)/2$, con ángulo suplementario $(\theta_1 + \theta_2)/2$. La compuesta de las reflexiones es una rotación de ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

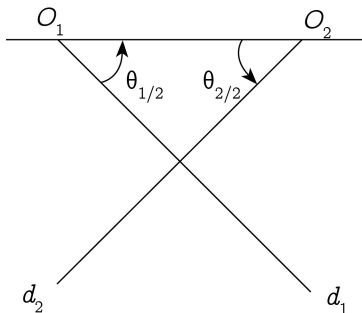


FIGURA 1.8. Centros distintos

□

Definición 1.12. Una *isometría* o *movimiento rígido* es una transformación del plano que preserva distancias, esto es

$$|PQ| = |T(P)T(Q)|.$$

Teorema 1.13. Toda isometría es una colineación. Las isometrías forman un subgrupo de las colineaciones.

Demostración. Sea l una recta y A, B dos puntos en ella. Entonces, un punto M pertenece al segmento \overline{AB} si y solo si

$$|AM| + |MB| = |AB|.$$

Si A', B', M son las imágenes por la isometría, se tiene

$$|A'M'| + |M'B'| = |A'B'|,$$

y luego M' pertenece al segmento $\overline{A'B'}$. De igual forma se obtendrá que B' pertenece al segmento $\overline{A'M}$ si M estuviera a la derecha de B . La imagen de l es entonces la recta l' que pasa por A', B' .

Si T_1 y T_2 son dos isometrías entonces

$$|(T_1 \circ T_2)(P) (T_1 \circ T_2)(Q)| = |T_1(T_2(P)) T_1(T_2(Q))| = |T_2(P) T_2(Q)| = |PQ|,$$

y

$$|T_1^{-1}(P) T_1^{-1}(Q)| = |T_1(T_1^{-1}(P)) T_1(T_1^{-1}(Q))| = |PQ|.$$

Luego, forman un subgrupo de las colineaciones.

□

Teorema 1.14. *Toda isometría está determinada en forma única por la imagen de tres puntos distintos no alineados. Toda isometría es la composición de a lo más tres reflexiones.*

Demostración. Sean A y B dos puntos dados y A' y B' sus imágenes respectivas por la isometría. Si M es un punto cualquiera del plano, pertenece a la intersección de la circunferencia de centro A y radio $|AM|$ con la circunferencia centro B y radio $|BM|$. (Esas circunferencias serán tangentes si M pertenece a AB .)

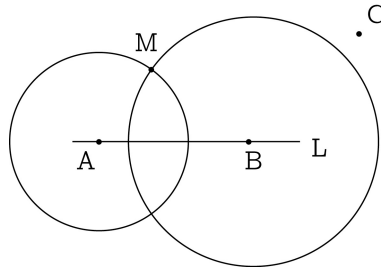


FIGURA 1.9. Isometrías

La imagen M' pertenecerá a la intersección de las dos circunferencias de radios respectivos iguales centradas en A' y B' . Hay dos posibles posiciones para M' . La posición única de M' quedará determinada por la posición en que se encuentre la imagen C' ; ambas imágenes estarán del mismo lado de la recta l' , o en lados opuestos si M y C lo están.

Sea T ahora una isometría cualquiera y

$$T(O) = O'.$$

Consideramos la reflexión en la simetral del segmento OO' , $R(O') = O$, y luego

$$(R \circ T)(O) = O.$$

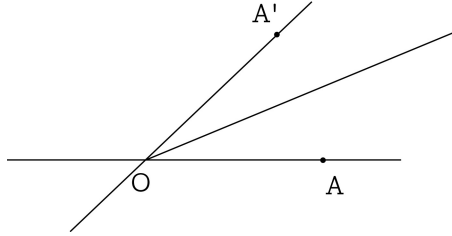


FIGURA 1.10. Bisectriz

Sea A un punto y A' su imagen por $R \circ T$.

Sea S la reflexión en la bisectriz del ángulo AOA' . Entonces

$$(S \circ R \circ T)(O) = O \quad , \quad (S \circ T \circ T)(A) = A.$$

Sea B un punto tal que el triángulo OAB sea equilátero. Puesto que $S \circ R \circ T$ es una isometría, su imagen B' será tal que OAB' es un triángulo equilátero.

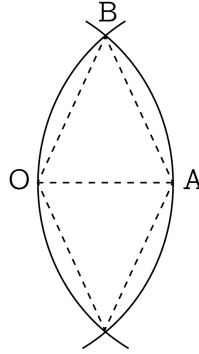


FIGURA 1.11. Puntos imágenes

Hay sólo dos posibilidades:

- i) $B = B'$. Entonces $S \circ R \circ T$ fija tres puntos y será, por lo tanto, la identidad:

$$S \circ R \circ T = id \quad , \quad T = R \circ S.$$

- ii) $B \neq B'$. Entonces si U es la reflexión en la recta OA , $U \circ S \circ R \circ T(B) = B$ y fija además O y A . Luego

$$U \circ S \circ R \circ T = id \quad , \quad T = R \circ S \circ U.$$

□

Ejercicios 1.15.

1. Demuestre que la simetría en el centro O es la compuesta de dos reflexiones.
2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero e I su centro de gravedad. Demuestre que la rotación $U(I, -\frac{2\pi}{3})$ es la compuesta de dos reflexiones en las alturas del triángulo.
3. Sea $ABCD$ un cuadrado. Si $h = g \circ f$, construya $h(ABCD)$ en cada caso
 - a) f es la reflexión en AB , g es la reflexión en AC ;
 - b) f es la reflexión en AC , g es la reflexión en AB ;
 - c) f es la rotación de centro B y ángulo $\pi/2$, g es la rotación de centro A ángulo $\pi/2$;
 - d) f es la rotación de centro B y ángulo $\pi/2$, g es la rotación de centro D ángulo $\pi/2$;
 - e) f es la rotación de centro A y ángulo $\pi/2$, g es la reflexión en AB .
4. Sea U una rotación de ángulo θ y T una traslación. Sabiendo que $U \circ T$ es una rotación de ángulo θ , construya su centro.
5. En un triángulo $\triangle ABC$ se sabe que las simetrales S_1, S_2, S_3 de los lados se intersectan en un punto O (el centro de la circunferencia circunscrita). Si se toman tres rectas S_1, S_2 y S_3 que pasan por un mismo punto O , ¿son ellas las simetrales de algún triángulo $\triangle ABC$?
6. Sea U una rotación que lleva A en A' y B en B' . Encuentre el centro de la rotación.
7. Sea R una reflexión que lleva A en A' . Encuentre la recta de reflexión.
8. Sea $U_{O, \theta}$ una rotación dada y $d > 0$ un número real. Determine el lugar geométrico de los puntos A con imagen A' tales que $|AA'| = d$.
9. Sea f una isometría que fija un solo punto. Demuestre que f es una rotación.
10. Sea f una isometría que no fija punto alguno. Demuestre que f es una traslación.
11. Sea f una isometría que fija dos puntos. Demuestre que f es una reflexión o la identidad.
12. Demuestre que $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ son las ecuaciones para una rotación de centro $O = (0, 0)$.
13. Sea T una traslación que lleva O en A y U una rotación de centro O . Considerando $T \circ U \circ T^{-1}$ encuentre las ecuaciones para una rotación de centro A .
14. Sea l una recta por O con pendiente $\tan \theta = m$. Considerando $U \circ R \circ U^{-1}$ encuentre las ecuaciones de la reflexión en l .

1.2 Homotecias e Inversiones en Circunferencias

1.2.1 Homotecias

Para la representación de las homotecias ya no nos sirve la hoja de papel rígido, ya que debemos estirar manteniendo un punto fijo O en el proceso. Cada punto de la hoja elástica ha de alejarse de O o acercarse a O en una misma proporción, manteniendo las posiciones relativas. Es como haber tomado una lupa de alejamiento o acercamiento en torno a un punto fijo. Para la descripción formal, sea O un punto en el plano y k un

número real. Se llama homotecia de centro O y razón k a la transformación $h(O, k)$ que lleva cada punto P a un punto P' tal que $\overrightarrow{OP'} = k \overrightarrow{OP}$.

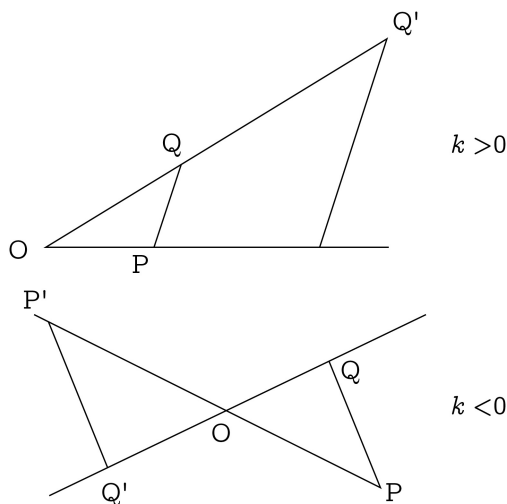


FIGURA 1.12. Homotecias

Una homotecia lleva un punto P a un punto P' en la misma línea recta por O . Las rectas por O van a sí mismas, y la homotecia inversa es $h^{-1}(O, k) = h(O, k^{-1})$. Una homotecia lleva una recta PQ a una recta $P'Q'$ paralela a ella, pues si estas rectas se intersectaran habría un punto que va a dar a sí mismo y luego $k = 1$. Toda homotecia es una colineación.

Preservar Ángulos. Un concepto importante que aparecerá en esta sección es el de *transformación que preserva ángulos*, que requiere ser precisado. Es claro lo que se entiende por el ángulo entre líneas rectas. Cuando dos curvas se cruzan también forman un ángulo, a saber, el ángulo que forman las rectas tangentes en el punto de cruce. Se dirá que una transformación *preserva ángulos*, si el ángulo entre dos curvas cualesquiera que se cruzan en el plano, es igual al ángulo en que se cruzan la curvas transformadas.

Teorema 1.16. *Una homotecia está determinada por la imagen de un sólo punto distinto del origen.*

Demostración. En efecto, la imagen P' determina el valor de k . La construcción geométrica de la imagen de todo otro punto Q consiste en construir la intersección de la recta OQ con la paralela a PQ por el punto P' .

Por otra parte, la construcción geométrica de la compuesta de dos homotecias de mismo centro O , denotadas por $h_a = h(O, a)$ y $h_b = h(O, b)$ con razones a y b ,

nos lleva a una configuración geométrica muy importante llamada la configuración de Pappus. En una recta dibujamos P y $h_a(P)$, lo que determina h_a completamente, y en otra Q y $h_b(Q)$.

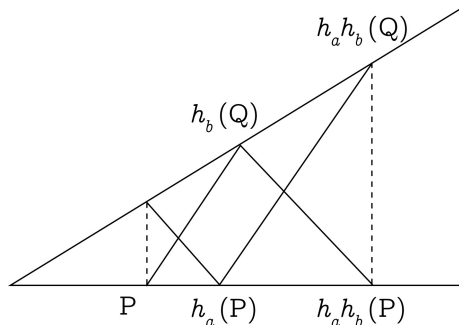


FIGURA 1.13. Proporcionalidad

Para construir geoméricamente la imagen $h_a(h_b(Q))$, trazamos la paralela a $P h_b(Q)$ por lo indicado en el teorema anterior. En cambio, para construir geoméricamente la imagen $h_b(h_a(P))$, trazamos la recta paralela a $Q h_a(P)$. Ahora bien, puesto que $h_a \circ h_b = h_{ab}$ (si la distancia se multiplica por b y luego por a , en total se multiplica por ab) se obtiene que

$$h_a \circ h_b = h_b \circ h_a ,$$

y la imagen de la recta PQ será la recta $h_{ab}(P) h_{ab}(Q)$ (si las dos rectas diagonales son paralelas, lo serán también PQ y $h_{ab}(P) h_{ab}(Q)$). \square

Teorema 1.17. *La imagen de una circunferencia C por una homotecia h es una circunferencia C' . Dadas dos circunferencias C y C' de radios distintos existen dos homotecias que llevan C en C' .*

Demostración. Por el Teorema de Tales si $|OP'| = k|OP|$ y $|OQ'| = k|OQ|$ entonces $|P'Q'| = k|PQ|$. Las distancias entre dos puntos se multiplican por k . La imagen de una circunferencia de centro A y radio r será entonces una circunferencia de centro A' y radio kr .

Puesto que una homotecia preserva el ángulo que existe entre rectas (Thales, ejercicio para el lector), la homotecia lleva una recta tangente a una circunferencia por O a la misma recta tangente a la otra. Dadas C y C' construimos entonces el punto O como la intersección de la línea de los centros con una tangente común. Hay una segunda homotecia de razón negativa que se construye tomando las otras dos rectas tangentes. Si estas circunferencias se intersectan, construimos el centro de la

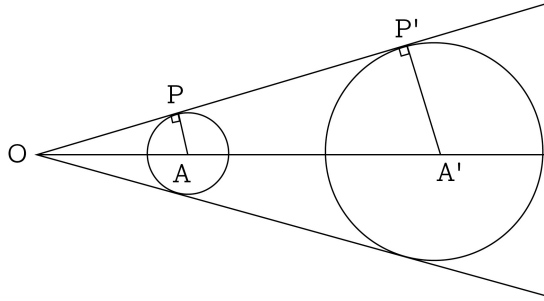


FIGURA 1.14. Thales

homotecia como aquel punto O' tal que

$$\overrightarrow{O'A'} = -\frac{r'}{r} \overrightarrow{OA}.$$

□

Teorema 1.18. Las ecuaciones de una homotecia $h(0, k)$ de centro $O = (a, b)$ y razón k son

$$x' = k(x - a) + a = kx + (1 - k)a, \quad y' = k(y - b) + b = ky + (1 - k)b.$$

Demostración. Puesto que $\overrightarrow{OP} = (x - a, y - b)$, $\overrightarrow{OP'} = (x' - a, y' - b)$, de la definición de homotecia concluimos que

$$x' - a = k(x - a), \quad y' - b = k(y - b),$$

de donde se deduce el teorema. □

El teorema siguiente muestra, entre otras cosas, que las homotecias no forman un subgrupo.

Teorema 1.19. La compuesta de dos homotecias de razones k_1 y k_2 es

- i) una traslación si $k_1 k_2 = 1$;
- ii) una homotecia si $k_1 k_2 \neq 1$.

Demostración. Usamos las ecuaciones para la composición $(x, y) \rightarrow (x', y') \rightarrow (x'', y'')$, dadas por

$$x'' = k_2(x' - a_2) + a_2 = k_2[k_1(x - a_1) + (a_1 - a_2)] + a_2 = k_2 k_1 x + (-k_2 k_1 a_1 + k_2(a_1 - a_2) + a_2),$$

$$y'' = k_2(y' - b_2) + b_2 = k_2[k_1(y - b_1) + (b_1 - b_2)] + b_2 = k_2 k_1 y + (-k_2 k_1 b_1 + k_2(b_1 - b_2) + b_2).$$

- i) Si $k_1 k_2 = 1$ la compuesta es una traslación.

ii) Si $k_1 k_2 \neq 1$ se definen entonces (a_3, b_3) por

$$(1 - k_1 k_2) a_3 = k_2(1 - k_1) a_1 + (1 - k_2) a_2,$$

$$(1 - k_1 k_2) b_3 = k_2(1 - k_1) a_1 + (1 - k_2) b_2,$$

y se obtienen las ecuaciones de una homotecia de centro (a_3, b_3) y razón $k_1 k_2$. Observemos además que, en ambos casos, i) o ii), las homotecias no conmutan en general.

□

En el siguiente teorema, la exigencia de preservar ángulos distingue a las isometrías y homotecias de una colineación cualquiera (transformación afín).

Teorema 1.20. *Toda colineación del plano que preserva ángulos es la compuesta de una isometría con una homotecia. Las isometrías son compuestas de reflexiones, rotaciones y traslaciones.*

Demostración. Sea f una colineación que preserva ángulos y $f(A) = A'$. Componiendo con $T_{AA'}^{-1}$, obtenemos la colineación $g = T_{AA'}^{-1} \circ f$ que fija A . Una recta l por A irá a una recta $g(l) = l'$ por A . Componiendo con R_θ^{-1} obtenemos la colineación $h = R_\theta^{-1} \circ T_{AA'}^{-1} \circ f$ que fija A y la recta l . Sea B un punto en l con imagen $h(B) = B'$. Componiendo con h_k^{-1} con $k = |AB'|/|AB|$ obtenemos la colineación $u = h_k^{-1} \circ R_\theta^{-1} \circ T_{AA'}^{-1} \circ f$ que fija la recta por A y B y fija, además, esos dos puntos. Si u fija la magnitud pero invierte el sentido de los ángulos, podemos componer por la reflexión S en la recta AB de modo a tener una colineación que fija los ángulos en magnitud y sentido. Si C es un punto cualquiera fuera de l , las rectas AC y BC irán a rectas AC' , BC' con ángulos iguales $\angle C'AB = \angle CAB$, $\angle C'BA = \angle CBA$. Por lo tanto, C debe quedar fijo. Puesto que eso sucede para todo punto C , $u = id$. Si

$$h_k^{-1} \circ R_\theta^{-1} \circ T_{AA'}^{-1} \circ f = id,$$

finalmente

$$f = T_{AA'} \circ R_\theta \circ h_k$$

(eventualmente seguida de la reflexión S si invierte la orientación).

□

Ejercicios 1.21.

1. Sean C y C' dos circunferencias de centros A y A' , radios $r = 10, r' = 5$ respectivamente. Construya en cada caso el centro de la(s) homotecia(s) que lleva(n) C en C' si la distancia entre A y A' es igual a d
 - a) $d = 4$;
 - b) $d = 10$;
 - c) $d = 18$.

2. Sea C una circunferencia, l y l' dos rectas que se intersectan en un punto I al interior de la circunferencia. Encontrar puntos en $P \in l$, $Q \in C$ de modo que l' sea la mediatriz (simetral) del segmento PQ .
3. Sea C una circunferencia de centro O y A un punto en C . Sea B el punto tal que $\vec{OB} = \frac{3}{2}\vec{OA}$ y l la recta perpendicular a OB por el punto B . Encontrar puntos M en l y N en C tales que $OAMN$ sea un paralelogramo.
4. Sean l y m dos rectas secantes y O un punto que no esté en ninguna de ellas. Encontrar dos puntos A en l , B en m tales que O sea el punto medio de AB .
5. En un triángulo ABC se escogen A' en AC , B' en BC con $A'B' \parallel AB$. Las rectas AB' y BA' se intersectan en I .
 - a) Demuestre que hay una homotecia h de razón k que lleva A y B en A' y B' respectivamente.
 - b) Demuestre que la homotecia h tiene centro I .
6. (La circunferencia de los nueve puntos y la recta de Euler.) En un triángulo $\triangle ABC$ el centro de gravedad es G , el ortocentro es H y los puntos medios de los lados BC , CA y AB son A' , B' y C' respectivamente. La circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ se denota por C_i y tienen centro O . La circunferencia circunscrita a $\triangle A'B'C'$ se denota por C'_i y tiene centro O' . Considere las homotecias que llevan C_i en C'_i .
 - a) Demuestre que los puntos G, H, O, O' están en línea recta, que $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$ y que O' es el punto medio de OH .
 - b) La circunferencia C'_i pasa por los pies de las tres alturas de $\triangle ABC$ y por los puntos medios de AH , BH y CH .
 - c) Los puntos simétricos de H con respecto a los lados de $\triangle ABC$ están en la circunferencia C_i .

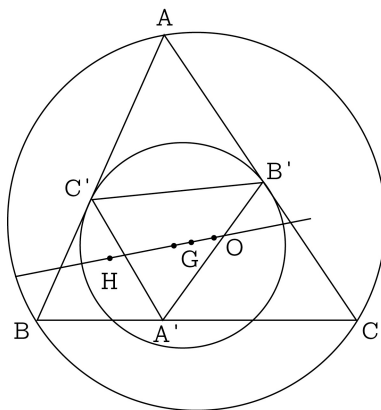


FIGURA 1.15. Nueve puntos

1.2.2 Inversiones en Circunferencias

Recordemos que las reflexiones llevan a puntos simétricos con respecto a una recta dada. Lo sorprendente es que el concepto de *simétrico* con respecto a una recta, se puede extender a simétrico con respecto a una circunferencia. Decimos extender ya que se puede pensar que una recta es un caso particular de circunferencia, a saber, una de radio infinito. Para la reflexión en una circunferencia, o así llamada *inversión*, los puntos simétricos estarán a distinto lado de la circunferencia, es decir, uno adentro y el otro afuera. Un punto P y su imagen Q estarán sobre el mismo radio siempre, la clave será la relación entre sus distancias al centro de la circunferencia: mientras más cerca de este centro esté el punto interior más lejos sobre el mismo rayo estará su simétrico, y vice versa. Las dos situaciones extremas se producirán cuando el punto interior coincida con el centro de la circunferencia, y cuando el punto esté sobre el borde. En el primer caso, su simétrico se escapará al infinito (concepto a precisar más adelante cuando se vea la proyección estereográfica en el Capítulo 2), mientras que en el segundo caso, el punto simétrico quedará fijo tal como quedan fijos los puntos sobre la recta l cuando consideramos una simetría.

Dada una circunferencia de centro O y radio r la imagen por una inversión en ella de un punto P es un punto P' en la recta OP tal que

$$|OP'| |OP| = r^2.$$

Tal como es el caso para la reflexión en una recta, se trata de una transformación involutiva, es decir, una transformación que es igual a su inversa. Todos los puntos de la circunferencia dada son puntos fijos y el centro mismo de la circunferencia no tiene imagen; veremos más adelante que se puede considerar su imagen como un punto al infinito.

Para un punto P interior a la circunferencia, construimos su imagen considerando la cuerda \overline{QR} perpendicular a OP . Las dos tangentes a la circunferencia intersectan la recta OP en el punto P' . Para demostrar lo justo de esta construcción, observemos que los triángulos rectángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OQP'$ son semejantes y que, por lo tanto, la razón cateto correspondiente a hipotenusa es igual

$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ|}{|OP'|},$$

por lo cual

$$|OP| |OP'| = |OQ|^2 = r^2.$$

Si el punto P está al exterior de la circunferencia, construimos la circunferencia de diámetro OP que intersecta a la circunferencia primera en Q y R . La cuerda \overline{QR} intersecta OP en el punto P' .

Para un punto P exterior a la circunferencia, hay una segunda construcción posible. La circunferencia de centro P que pasa por O intersecta a la primera en puntos A y B . Las circunferencias de sendos centros A y B que pasan por O se intersectan en P' .

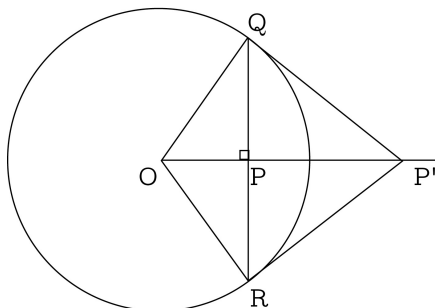


FIGURA 1.16. Inversión

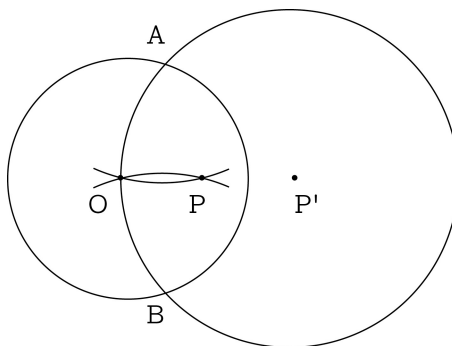


FIGURA 1.17. Inversión con compás

Se justifica esta construcción observando que los triángulos isósceles $\triangle APO$ y $\triangle OAP'$ son semejantes, pues tienen el ángulo basal $\angle AOP$ común. La razón base/lado implica la conclusión. Si el punto P está al interior de la circunferencia, esta construcción solo será posible si $|OP| > r/2$ pues en caso contrario no habrá dos intersecciones distintas A y B .

Teorema 1.22. Sea l una recta y C una circunferencia de centro O .

- i) Si la recta pasa por el centro O , su imagen bajo la inversión en C es la misma recta l .
- ii) Si la recta no pasa por el centro, su imagen bajo la inversión en C es una circunferencia que pasa por el centro O .

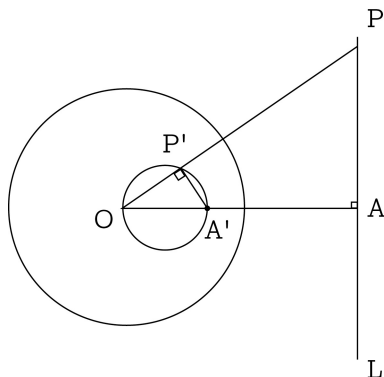


FIGURA 1.18. Recta imagen

Demostración.

- i) Esto es claro para cualquiera de las dos construcciones anteriores. Los puntos en la recta al exterior corresponden a los puntos de la recta al interior de la circunferencia.
- ii) Trazamos, en el caso de la recta l completamente externa a la circunferencia, la perpendicular OA a esa recta; sea A' el punto correspondiente por la inversión. Afirmamos que la circunferencia de diámetro OA' es la imagen de l . Sea P en efecto un punto en l y P' la intersección de OP con esa circunferencia de diámetro OA' (Figura 1.18). Los triángulos rectángulos $\triangle OP'A'$ y $\triangle PAO$ tienen un ángulo agudo común y serán, por tanto, semejantes. Luego

$$\frac{|OP'|}{|OA'|} = \frac{|OP|}{|OA|},$$

por lo cual

$$|OP'| |OP| = |OA| |OA'| = r^2.$$

Si la recta l intersecta a la circunferencia en Q y R consideramos como imagen la circunferencia que pasa por O , Q y R . Sea P un punto en l y P' la intersección de OP con esa segunda circunferencia (Figura 1.19) puesto que los ángulos $\angle OQP$ y $\angle OP'Q$ subtienden arcos iguales, son iguales. Se sigue que los triángulos $\triangle OQP$ y $\triangle OP'Q$ son semejantes. Así entonces

$$\frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OQ|}{|OP|},$$

luego

$$|OP| |OP'| = |OQ|^2 = r^2.$$

□

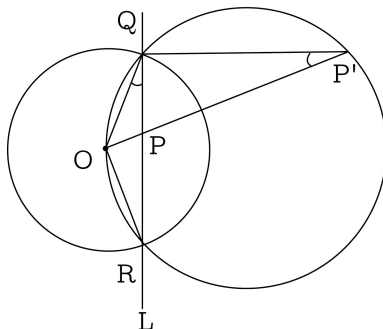


FIGURA 1.19. Otra recta imagen

Corolario 1.2.1. Sea C una circunferencia de centro O . La imagen bajo la inversión en C de una circunferencia C' que pasa por el centro O es una recta.

Teorema 1.23. Sea C una circunferencia de centro O y C' una circunferencia que no pasa O . Entonces la imagen de C' bajo la inversión en C es una circunferencia.

Demostración. Supongamos primero que la circunferencia C no intersecta a la circunferencia de centro O . Sea A y B los puntos de intersección de la recta por los centros con C . Construimos las imágenes A' y B' y la circunferencia \mathbb{C}' de diámetro $A'B'$. Sean Q', P', P y Q las intersecciones de una recta por O con las dos circunferencias. Observe el orden en que están. Afirmamos que la imagen de P es P' y la de Q , Q' . Para ello consideramos la homotecia de centro O que lleva A' en B . Su razón debe ser

$$k = \frac{|OB|}{|OA'|} = \frac{|OB||OA|}{r^2} = \frac{|OA|}{|OB'|}.$$

Esa homotecia lleva entonces b' en A y la circunferencia entera Γ' en Γ . Ahora bien, si desde un punto se trazan secantes a una recta, el producto de los segmentos es constante. En este caso

$$|OQ'||OP'| = |OB'||OA'|,$$

y

$$|OQ||OP| = |OB||OA|.$$

Efectuando el producto queda $|OQ||OQ'||OP||OP'| = r^4$. Pero, puesto que los puntos se corresponden por la homotecia, se tiene

$$|OQ||OQ'| = (k|OP'|)(\frac{1}{k}|OP|) = |OP'||OP|.$$

Un instante de reflexión permite ver que la demostración será la misma en el caso que las circunferencias se intersecten. \square

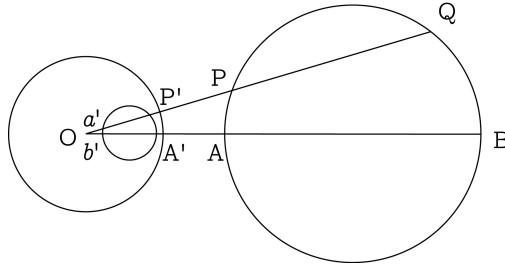


FIGURA 1.20. Configuración imagen

Teorema 1.24. *Toda inversión en una circunferencia preserva ángulos.*

Demostración. Recordemos que el ángulo entre dos circunferencias que se cortan, es igual al ángulo entre sus dos rectas tangentes en el punto de intersección. Sea l una recta y m una recta que pasa por O que forma un ángulo α . Vamos a demostrar que la imagen de l , una circunferencia que pasa por O , tiene un ángulo igual a α con la recta m . Esto bastará, pues un ángulo entre dos rectas cualquiera l y l' puede escribirse como la suma o diferencia de dos ángulos α y α' con m . Consideramos como antes la perpendicular OA a la recta l y la circunferencia correspondiente OA' de diámetro OA' . Sean P y P' las intersecciones respectivas de m con la recta y la circunferencia.

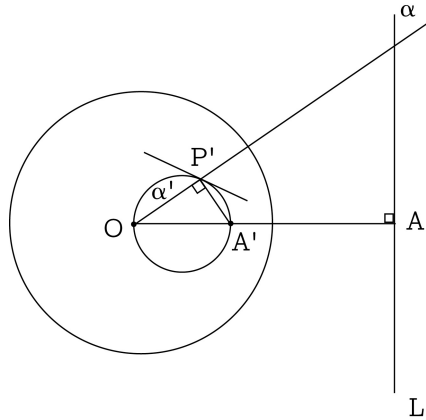


FIGURA 1.21. Ángulos iguales

En la figura, $\alpha' = \angle OA'P'$. Pero los triángulos rectángulos $\triangle OP'A'$ y $\triangle PAO$ tienen el ángulo agudo común, y entonces

$$\angle OA'P' = \angle OPA = \alpha.$$

□

Un *haz de circunferencias* por dos puntos A, B es el conjunto de todas las circunferencias que pasan por dichos puntos, un caso degenerado siendo la recta por A, B .

Corolario 1.2.2. *Por un par de puntos inversos (simétricos) con respecto a una circunferencia C pasa un haz de circunferencias ortogonales a C .*

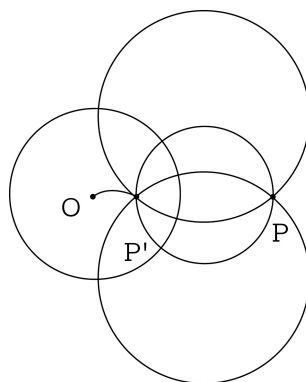


FIGURA 1.22. Haz de circunferencias

Demostración. Sea C' una circunferencia del haz de circunferencias por dos puntos inversos P y P' . La circunferencia C' intersecta a C en un punto Q fijo por la inversión. La imagen de C' bajo la inversión en C es una circunferencia que pasa por Q, P y P' , por lo que debe coincidir con C' ; los puntos del arco interior se corresponden con aquellos al exterior. Un ángulo entre C' y la circunferencia C corresponde al ángulo suplementario, siendo por tanto de 90° . □

Ejercicios 1.25.

1. Demuestre que la inversión en la circunferencia de centro O y radio r se expresa en coordenadas cartesianas por la fórmula

$$F(x, y) = \left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right).$$

2. Sea l la recta definida por la ecuación

$$ax + by + c = 0, \quad c \neq 0.$$

Encuentre la ecuación de la imagen $F(l)$.

3. Sea C la circunferencia definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Encuentre la ecuación de la imagen $F(C)$.

4. Demuestre que la inversión de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, es una recta paralela a la tangente a ella en el centro de inversión.
5. Demuestre que la compuesta de dos inversiones en circunferencias concéntricas, de centro O , es una homotecia de mismo centro. Recíprocamente, toda homotecia de centro O es igual a la compuesta de dos inversiones.
6. Tres tangentes a una circunferencia de centro I se intersectan en puntos A, B, C . Demuestre que AI pasa por el circuncentro del triángulo $\triangle BCI$. Dibuje la figura que se obtiene al invertir el triángulo en ese circuncentro.
7. Sea $ABCD$ un rombo y O un punto equidistante de A y C . Demuestre que O, D, B son colineales y que $|OB||OD| = |OA|^2 - |AB|^2$. Deduzca que si las líneas rectas son barras rígidas, O está fijo y los puntos restantes se mueven libremente, los puntos B y D describen figuras inversas con respecto a una circunferencia de centro O . Si D se mueve en una circunferencia por O , B se moverá en línea recta (Aparato de Peaucellier).

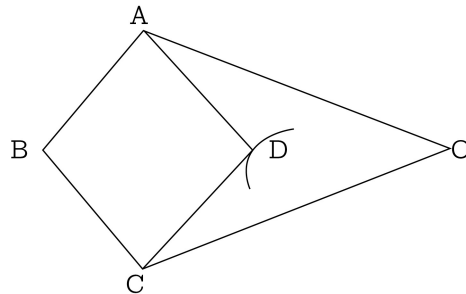


FIGURA 1.23. Aparato de Peaucellier

Capítulo 2: Transformaciones de Möbius



Los números complejos fueron por largo tiempo sospechosos en Matemática, pues si bien se podía pensar en una solución abstracta, puramente algebraica, de una ecuación $x^2 + 1 = 0$, no se asociaba una cantidad tal a alguna magnitud física como la longitud de un segmento, un área o volumen. Sólo fue a comienzos del siglo XIX cuando adquirieron respetabilidad, pues permitieron entender resultados que, vistos solo con números reales, eran misteriosos.

Un hecho clave fue la representación de los números complejos como puntos del plano, permitiendo establecer un puente extraordinariamente fructífero entre el álgebra y la geometría analítica. Las transformaciones del capítulo anterior aparecen de manera natural y su descripción resulta muy sencilla en términos del álgebra de los números complejos. Así, el Teorema 2.12 clasifica todas las colineaciones que preservan ángulos usando una formulación algebraica sencilla y concisa. Agregando la inversión en circunferencias obtendremos las transformaciones de Möbius en la Sección 2.2. Estas transformaciones tienen importancia en sí mismas, pero a la vez, permitirán luego estudiar otra geometría, distinta a la de Euclides. Esta geometría *no euclidenana* conlleva el estudio del subgrupo de las transformaciones de Möbius que transforman el disco unitario como conjunto en sí mismo.

Hoy en día, los números complejos aparecen por doquier en la matemática. El análisis complejo es el centro de muchas áreas fundamentales de la matemática moderna, donde se relacionan ideas que provienen de la geometría, el análisis y el álgebra.

La primera sección de este capítulo estará dedicada al álgebra de los números complejos y su visualización geométrica. En las secciones posteriores se hará la conexión con el primer capítulo, analizando las transformaciones allí vistas desde la perspectiva de los números complejos.

2.1 Números Complejos

2.1.1 El cuerpo de los números complejos

Un número complejo se representa de la forma

$$z = a + ib,$$

donde a, b son dos números reales. Decimos que a es la parte real de z y se escribe

$$a = \operatorname{Re}(z),$$

mientras que b es la parte imaginaria y se escribe

$$b = \text{Im}(z).$$

En particular, por ejemplo, $\text{Re}(i) = 0, \text{Im}(i) = 1$. Cada número complejo se representa por un punto en el plano cartesiano, el punto de coordenadas (a, b) .

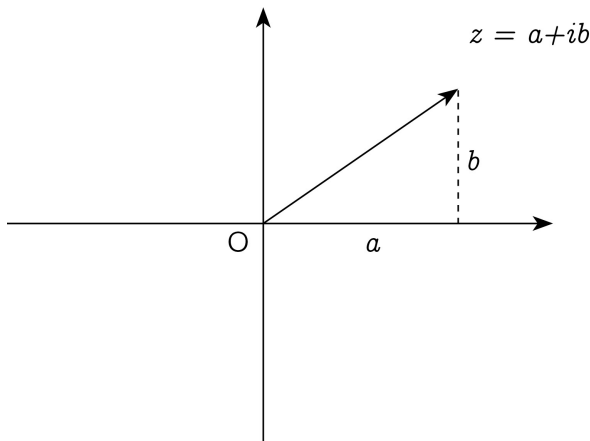


FIGURA 2.1. Un complejo

Al punto de coordenadas $P = (a, b)$ le corresponde el vector \overrightarrow{OP} de iguales componentes y así z determina un único vector en el plano. El eje real es el eje X , son aquellos números complejos con $\text{Im}(z) = 0$. El eje imaginario es el eje Y , son aquellos números complejos con $\text{Re}(z) = 0$.

Suma: Si $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$ son dos números complejos, se define

$$z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

El número complejo $0 = 0 + i0$ es el elemento neutro para la suma y el opuesto es $-z = -a - ib$. Los números complejos tienen una estructura de grupo abeliano para la suma. Así, el álgebra de la suma de complejos se corresponde con el álgebra de los vectores del plano. Existe, sin embargo, una operación adicional para los complejos, a saber, el producto.

Producto: Si $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$ se define el producto por distributividad, usando la convención $i^2 = -1$:

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

El número complejo $1 = 1 + i0$ es el elemento neutro para el producto y el inverso multiplicativo de z es

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}, \quad z \neq 0.$$

En efecto, usando suma por diferencia es inmediato ver que $z \cdot z^{-1} = 1$. Los números complejos no nulos tienen una estructura de grupo abeliano para el producto. Si denotamos por \mathbb{C} al conjunto de los números complejos con esas operaciones de suma y producto, se tiene:

Proposición 2.1. \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo.

Demostración. Se deja al lector. □

Observación 2.1. A diferencia del cuerpo \mathbb{R} de los números reales, no existe en \mathbb{C} un orden que sea compatible con las operaciones algebraicas. En efecto, si así fuese, i debiera ser positivo o negativo. Si $i > 0$ entonces $i^2 = -1 > 0$ imposible pues $1 > 0$. Si $i < 0$ entonces $-i > 0$, luego $(-i)^2 = -1$, imposible.

Definición 2.2. Si $z = a + ib$ se llama *número complejo conjugado* al número

$$\bar{z} = a - ib.$$

Geométricamente \bar{z} es el reflejado de z en el eje real (el eje x).

Proposición 2.3. Se tienen las identidades siguientes:

- i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;
- ii) $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- iii) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \bar{z}'$.

Demostración. Se deja nuevamente como ejercicio al lector. □

Definición 2.4. Si $z = a + ib$ se llama *módulo del número complejo* al número real positivo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nótese que $|z|$ corresponde al largo del vector del plano asociado al número z , o también a su distancia al origen.

Teorema 2.5. Se cumplen las propiedades siguientes:

- i) $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$;
- ii) $|z|^2 = z \bar{z}$ y $|\bar{z}| = |z|$;
- iii) $|zz'| = |z||z'|$.

Demostración. Otro ejercicio al lector. □

Teorema 2.6. *Se tienen las desigualdades siguientes:*

- i) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
- ii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (*desigualdad triangular*).

Demostración.

- i) Tenemos que $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$.
- ii) Así mismo,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + \bar{z}z' + z'\bar{z}' = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{z}'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

□

Interpretación Geométrica: Dado que la suma de los números complejos coincide con la suma vectorial, la desigualdad triangular expresa que la suma de las longitudes dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.

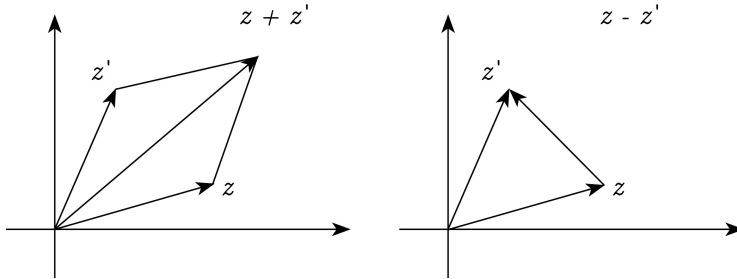


FIGURA 2.2. La suma y resta

En cambio, la distancia de z a z' es igual a

$$|z - z'| = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

Forma Polar de un Número Complejo: Llamaremos *argumento* de un número complejo z

$$\operatorname{Arg}(z) = \theta$$

al ángulo entre el vector z y el vector $(1, 0)$. Este ángulo no está únicamente determinado ya que se puede cambiar en cualquier múltiplo entero de 2π . Esta indefinición en la determinación del argumento de un número complejo, más allá de ser una dificultad, es origen de importantes conceptos matemáticos en el análisis complejo.

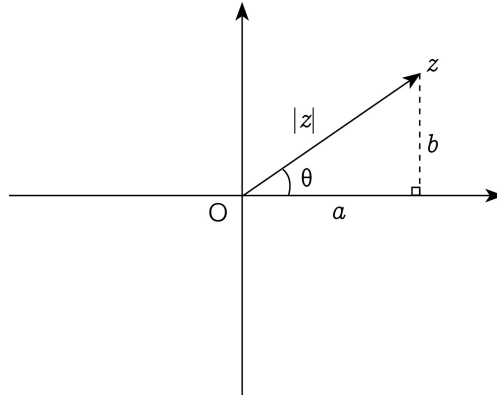


FIGURA 2.3. Representación polar

Si $r = |z|$ entonces se obtiene del triángulo rectángulo definido por z y el eje real que

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Definición 2.7. Se define

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

La fórmula

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta = \operatorname{Arg}(z)$$

se llama la forma polar del número complejo z .

Esta definición de exponencial es consistente o se puede comprobar usando el desarrollo en serie de la función $y = e^x$ con $x = i\theta$. Separamos en la serie las potencias pares de $i\theta$ (que darán términos puramente reales) y las impares (que darán términos puramente imaginarios) para llegar a la definición dada.

Proposición 2.8. La función $e^{i\theta}$ tiene las propiedades siguientes:

- i) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$, $e^{i(\theta-\varphi)} = e^{i\theta}/e^{i\varphi}$.
- ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|e^{i\theta}| = 1$;
- iii) $e^{i\theta} = 1$ si y solo si $\theta = 2\pi k$ con k en \mathbb{Z} , $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Demostración.

i) Tenemos

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi) \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = e^{i\theta} e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

La segunda afirmación sigue de

$$e^{i\varphi} e^{i(\theta-\varphi)} = e^{i\theta}.$$

ii) Ahora

$$\overline{e^{i\theta}} = (\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos \theta - i \sin \theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{i(-\theta)}.$$

La segunda afirmación sigue de

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} \cdot \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i0} = 1.$$

iii) Tenemos que $e^{i\theta} = 1$ si y solo si $\sin \theta = 0$ y $\cos \theta = 1$.

□

Corolario 2.9. *La aplicación $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ es un homomorfismo sobreyectivo del grupo aditivo de los números reales en el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1.*

Algunas consecuencias de la forma polar son las siguientes:

Fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Estas fórmulas se deducen del teorema anterior pues $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ y $\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$.

Producto Geométrico: El producto zz' de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos

$$zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}.$$

Es preciso observar que si $-\pi < \theta \leq \pi$, $-\pi < \theta' \leq \pi$ la suma no tiene por qué estar en el mismo intervalo, pero bastará sumar o restar 2π a $\theta + \theta'$ para quedar en ese intervalo; ello no cambiará el valor de $e^{i(\theta+\theta')}$. Es decir,

$$\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') + 2k\pi$$

con $k = 0, 1$ o -1 .

Fórmula de Moivre (1722): Para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

En efecto, esto equivale a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, fórmula válida pues esa función es un homomorfismo de grupos. Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema acerca de las raíces de la unidad.

Teorema 2.10. *La ecuación $z^n = 1$ tiene n soluciones en \mathbb{C} y son las siguientes:*

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Estas n raíces de la unidad forman un grupo cíclico de orden n y

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$

Demostración. Sea z_k como dado en la fórmula. Entonces

$$(z_k)^n = (e^{\frac{2k\pi i}{n}})^n = e^{2k\pi i} = 1.$$

Esto implica que

$$z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}),$$

donde $z_0 = 1$. Igualando los coeficientes de z^{n-1} se obtiene el resultado para la suma de las raíces. \square

Corolario 2.11. *La ecuación $z^n = w = re^{i\theta}$ tiene n soluciones en \mathbb{C} y son*

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}} z_k,$$

donde z_k es una raíz n -ésima de la unidad.

El caso de las raíces cuadradas merece una mención especial. Las dos raíces cuadradas z_1, z_2 de $w = a + ib = re^{i\theta}$ son

$$z_1 = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad z_2 = -\sqrt{r}, e^{i\theta/2}.$$

Usando las fórmulas para $\cos(\theta/2)$, $\sin(\theta/2)$ obtenemos cuando $b > 0$

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right)$$

con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observemos finalmente que, en general,

$$\sqrt{zw} \neq \sqrt{z}\sqrt{w},$$

aunque difieren a lo más en el signo. Ello se observa con $z = -1, w = -1$ pues $\sqrt{-1} = i, \sqrt{1} = 1$.

Ecuaciones de Rectas y Circunferencias: Como primera aproximación, para traducir el lenguaje de la geometría euclidiana del primer capítulo a números complejos, veremos cómo se reformulan las ecuaciones de rectas. En la ecuación de una recta

$$ax + by + x = 0,$$

observamos que la expresión $ax + by$ es la parte real del producto

$$(a + ib)(x - iy).$$

Con las notaciones $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$, la ecuación de la recta se escribe entonces como

$$\operatorname{Re}(\alpha \bar{z}) + c = 0,$$

o sea,

$$\bar{\alpha}z + \alpha \bar{z} + \beta = 0,$$

con $\beta = 2c$ (un número real). El vector α es ortogonal a la recta.

En cuanto a una circunferencia, utilizamos su definición como el lugar geométrico de los puntos z tales que su distancia a un centro z_0 es igual al radio R . En fórmula,

$$|z - z_0| = R,$$

o bien elevando al cuadrado

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z - z_0}) = R^2,$$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0,$$

con $\alpha = -z_0$, $\beta = |z_0|^2 - R^2$. El hecho de que estas dos ecuaciones sean similares no es coincidencia y su importancia se verá luego.

Ejercicios 2.12.

1. Calcule el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(3 + 5i)(2i + 1)(3i - 4)$;

b) $\frac{3-2i}{1-2i} + \frac{4+i}{2+3i}$;

c) $(1 + i)^3(3 + 7i)$.

2. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$z - 2iw = 5i,$$

$$2z - (1 + i)w = 1 + 3i.$$

3. Demuestre la desigualdad

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

4. Demuestre que

$$|z + w| = |z| + |w|$$

si y solo si existe $t < \text{real}$, $t \geq 0$ tal que $w = tz$.

5. Demuestre que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

6. Encuentre el lugar geométrico de los puntos z tales que

$$|z + 1 + i| = |z - 2i|.$$

7. Demuestre que si $|a| = 1$ y $a \neq b$ entonces

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = 1.$$

8. Establezca la fórmula

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2,$$

y enuncie el resultado geoméricamente.

9. Encuentre el lugar geométrico de los puntos z tales que

$$\left| \frac{z - 4}{z + 2i} \right| = 2.$$

10. Escriba los siguientes números en la forma polar:

- a) $-2 + 2i$;
- b) $(-1 + i)e^{3\pi i/4}$;
- c) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$.

11. Calcule las raíces indicadas:

- a) raíces cuadradas de i ;
- b) raíces cúbicas de -1 ;
- c) raíces quintas de 1 .

12. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- a) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$;
- b) $2z^4 - 3z^2 + 4 = 0$.

13. Escriba en forma polar los números

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i.$$

Deduzca la forma polar de z_1/z_2 y obtenga el valor de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$.

14. Utilice las fórmulas de Euler para obtener las fórmulas

$$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

15. Demuestre que

$$\cos(5\theta) = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta.$$

16. Utilice las identidades

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(u - \frac{1}{u} \right)$$

con $u = e^{i\theta}$ para obtener

$$\cos^8 \theta + \sin^8 \theta = \frac{1}{64} (\cos 8\theta + 28 \cos 4\theta + 35).$$

17. A partir de la suma geométrica

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

obtenga la identidad

$$\sum_{k=0}^m \cos(k\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}((n - \frac{1}{2})\theta)}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

18. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos tales que $|z_i| = 1$. Demostrar que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ si y solo si los puntos son los vértices de un triángulo equilátero.
19. Considere el conjunto M de matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que la biyección

$$x + iy \longleftrightarrow A$$

es un isomorfismo para la suma y el producto.

20. Encuentre todos los números complejos de módulo 1 tales que

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

2.1.2 Transformaciones del Plano y Números Complejos

Una transformación del plano es una biyección del plano en sí mismo. Puesto que cada punto del plano corresponde a un número complejo z en \mathbb{C} resulta que toda transformación es una biyección

$$z \rightarrow F(z)$$

de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Cada una de las transformaciones consideradas en el primer capítulo tendrá una representación sencilla en el lenguaje de los números complejos.

Traslación: Sea \vec{u} un vector dado, que se corresponde con el número complejo z_0 por $\overrightarrow{OP_0} = \vec{u}$. Acá hemos identificado los números complejos $0, z_0$ con los puntos O, P_0 . Entonces la traslación en \vec{u} se escribe

$$T(z) = z + z_0.$$

Si se consideran las partes reales e imaginarias, el lector podrá comprobar de inmediato que esta ecuación coincide con las fórmulas de traslación vistas en el primer capítulo. Observe cómo una sola ecuación compleja comprende las dos ecuaciones reales que definen una traslación. El grupo de las traslaciones es entonces isomorfo al grupo aditivo de los números complejos pues

$$(T' \circ T)(z) = T'(T(z)) = T(z) + z'_0 = z + (z_0 + z'_0), \quad T^{-1}(z) = z - z_0.$$

Rotación: Sea θ_0 un ángulo fijado. Si escribimos un número complejo en su forma polar $z = re^{i\theta}$ entonces

$$e^{i\theta_0} z = re^{i(\theta+\theta_0)}.$$

La rotación de ángulo θ_0 y centro en el origen se escribe como

$$R(z) = e^{i\theta_0} z.$$

Observamos que, en coordenadas cartesianas, esto dará las mismas fórmulas para una rotación que vimos en el primer capítulo. Por otra parte, si consideramos la traslación T de vector z_0 entonces

$$R_{z_0, \theta_0} = T \circ R \circ T^{-1}$$

es una rotación con centro z_0 (llevamos z_0 al origen con T^{-1} , rotamos con R , y volvemos al punto original con T). Explícitamente

$$R_{z_0, \theta_0}(z) = [e^{i\theta_0}(z - z_0)] + z_0 = e^{i\theta_0}z + z_0(1 - e^{i\theta_0}).$$

Una rotación se expresa entonces como

$$R(z) = e^{i\theta_0}z + b,$$

en la que el centro de la rotación (o punto fijo) es $b/(1 - e^{i\theta_0})$. La compuesta de dos rotaciones se obtiene por

$$\begin{aligned} R' \circ R(z) &= e^{i\theta'_0}(e^{i\theta_0}z + b) + b' \\ &= e^{i(\theta'_0 + \theta_0)}z + (b' + e^{i\theta'_0}b). \end{aligned}$$

Si $\theta'_0 + \theta_0 = 2\pi$ es una traslación, una rotación si no; el centro de esta rotación será

$$\frac{b' + e^{i\theta'_0}b}{1 - e^{i(\theta'_0 + \theta_0)}}.$$

Si $\theta_0 = 2\pi/n$, dejamos como ejercicio al lector comprobar que los puntos

$$R^k(z_0 + 1) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z_0 + 1) + z_0(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

serán los vértices de un polígono regular de n lados con centro z_0 . Las rotaciones

$$\{id, R, R^2, \dots, R^{n-1}\}$$

son un grupo cíclico de orden n .

Simetría: Recordemos la definición de simetría como aquella transformación que fija el origen y manda cada punto a su simétrico con respecto a este punto. Así, una simetría con centro en el origen se escribe

$$S(z) = -z.$$

Para determinar la simetría con centro z_0 debemos primero trasladar z_0 al origen, realizar allí la simetría ya vista, y luego trasladar de vuelta a z_0 . La representación está dada entonces por la composición de estas operaciones, como

$$T \circ S \circ T^{-1},$$

lo que entrega en fórmula

$$S_{z_0}(z) = -(z - z_0) + z_0 = -z + 2z_0.$$

Una simetría es un caso particular de una rotación, es una rotación de ángulo $\theta_0 = \pi$.

Reflexión: Sabemos que la reflexión en el eje real cambia de signo la coordenada y del punto. En lenguaje de números complejos, esto estará dado simplemente por

$$U(z) = \bar{z}.$$

Si L es una recta por el origen que hace un ángulo θ_0 con el eje real, debemos hacer un juego similar al hecho para definir rotaciones en torno a un punto z_0 . Ahora rotamos primero de modo que la recta l quede horizontal, hacemos la reflexión, y volvemos a rotar la recta a su posición original. Así, la reflexión en l es la composición

$$R \circ U \circ R^{-1},$$

lo que da en fórmula

$$U_l(z) = e^{i\theta_0}(\overline{z e^{-i\theta_0}}) = e^{2i\theta_0} \bar{z}.$$

Si, más generalmente, l es una recta por z_0 que hace un ángulo θ_0 con el eje real, entonces la reflexión en l es

$$T \circ U_l \circ T^{-1},$$

obteniéndose la fórmula general de una reflexión

$$U(z) = e^{2i\theta_0} \bar{z} + c,$$

donde $c = z_0 - e^{2i\theta_0} \bar{z}_0$. Podremos recobrar en forma compleja el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Las traslaciones, rotaciones y reflexiones conforman el grupo de isometrías del plano complejo.*

Demostración. Observamos que todas ellas se escriben $T(z) = \lambda z + b$ con $|\lambda| = 1$ o bien $T(z) = \lambda \bar{z} + b$ en el caso de una reflexión. Luego

$$|T(z) - T(z')| = |(\lambda z + b) - (\lambda z' + b)| = |\lambda(z - z')| = |z - z'|,$$

y para una reflexión

$$|T(z) - T(z')| = |\overline{z - z'}| = |z - z'|.$$

Además, es inmediato verificar que la compuesta de dos tales transformaciones es de la misma forma y que la inversa también lo es. Las isometrías que preservan la orientación son un subgrupo formado por las transformaciones $T(z) = \lambda z + b$. \square

Observe lo sencillo que ha sido representar los movimientos rígidos del plano en lenguaje de los números complejos. Agregamos ahora las homotecias.

Homotecia: Una homotecia de centro O y razón k se escribe

$$H(z) = kz, \quad k \in \mathbb{R},$$

y si está centrada en z_0 se escribe

$$T \circ H \circ T^{-1},$$

lo que entrega la fórmula

$$H_{z_0}(z) = kz + (1 - k)z_0.$$

Recordando el Teorema 1.17 sobre colineaciones obtenemos:

Teorema 2.14. *Toda colineación del plano que preserva ángulos se escribe*

$$T(z) = az + b$$

para dos números complejos a y b .

Demostración. Si escribimos a en su forma polar $a = r_0 e^{i\theta_0}$ entonces

$$T(z) = e^{i\theta_0}(r_0 z) + b$$

es la compuesta de una homotecia de razón r_0 con una rotación de ángulo θ_0 . Si $a = 1$ es una traslación sin punto fijo. Si $a \neq 1$ el único punto fijo satisface

$$az_0 + b = z_0,$$

es decir,

$$z_0 = \frac{b}{1 - a}.$$

□

Podemos verificar directamente que $T(z) = az + b$ lleva una recta en una recta y una circunferencia en una circunferencia. En efecto si

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$$

es la ecuación de una circunferencia, entonces $w = az + b$ satisface la ecuación

$$\frac{w - b}{a} \frac{\overline{w - b}}{\bar{a}} + \bar{\alpha} \frac{w - b}{a} + \alpha \frac{\overline{w - b}}{\bar{a}} + \beta = 0,$$

es decir,

$$\frac{w\bar{w}}{|a|^2} + \bar{\alpha}'z + \alpha'\bar{z} + \beta' = 0,$$

o

$$w\bar{w} + |a|^2 \bar{\alpha}'z + |a|^2 \alpha'\bar{z} + |a|^2 \beta' = 0,$$

con $|a|^2 \beta'$ real (que se puede calcular).

Inversiones en Circunferencias: Si consideramos la inversión en la circunferencia de centro O y radio $r = 1$ se debe tener

$$z' = kz, \quad k > 0$$

y $|z||z'| = 1$. Luego $k = 1/|z|^2$, $z' = z/|z|^2$ y, por lo tanto,

$$I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

representa la inversión en la circunferencia unitaria. Si C es una circunferencia de radio r y centro O , consideramos la homotecia H que lleva la circunferencia unitaria en la dada, y repetimos el proceso ya hecho anteriormente: llevar C a la circunferencia unitaria, invertir, y luego volver a C . Con esto, la inversión en C es

$$H \circ I \circ H^{-1},$$

con expresión

$$I_r(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}.$$

Si C tiene centro en z_0 debemos trasladar al origen, invertir, y luego volver. La fórmula se obtendrá de

$$T \circ I_r \circ T^{-1},$$

siendo T la traslación en cuestión. Esto resulta

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0.$$

Las propiedades de una inversión se obtienen fácilmente usando números complejos. Por ejemplo, si consideramos una recta

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

su imagen bajo la inversión en una circunferencia de centro O y radio r debe cumplir $w\bar{z} = r^2$, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}r^2}{\bar{w}} + \frac{\alpha r^2}{w} + \beta &= 0, \\ (\bar{\alpha}r^2)w + (\alpha r^2)\bar{w} + \beta w\bar{w} &= 0. \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, esto es si la recta inicial pasa por el origen, su imagen es ella misma. Si $\beta \neq 0$, esto es si la recta inicial no pasa por el origen, su imagen es la circunferencia de ecuación

$$\frac{\bar{\alpha}r^2}{\beta} w + \frac{\alpha r^2}{\beta} \bar{w} + w\bar{w} = 0.$$

Ejercicios 2.15.

1. Escriba en cada caso la fórmula $f(z)$ para la transformación indicada:
 - a) f es la traslación de vector $(-1, 3)$;
 - b) f es la homotecia de centro $2 - i$ y razón -3 ;
 - c) f es la homotecia de centro $1 + i$ y razón $1/2$;
 - d) f es la rotación de centro $2 + i$ y ángulo $\pi/2$;
 - e) f es la rotación de ángulo $-\pi/3$ y centro $1 - 3i$;
 - f) f es la reflexión en la recta $y = x + 1$;
 - g) f es la inversión en la circunferencia de centro i , radio 2.
2. Identifique en cada caso la transformación, cuya fórmula se da:
 - a) $z' = -z + 1$;
 - b) $z' = 2z - 1$;

- c) $z' = iz + 2$;
 d) $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} z - i$;
 e) $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z}$;
 f) $z' = \frac{z}{\bar{z}-1}$.
3. Demuestre que la compuesta de dos homotecias de razones k_1 y k_2 es una traslación o una homotecia.
 4. Demuestre que la compuesta de dos reflexiones es una traslación o una rotación.
 5. Determine una condición necesaria y suficiente para que dos rotaciones conmuten.
 6. a) Demuestre que si $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ entonces los números a, b, c son vértices de un triángulo equilátero.
 b) Demuestre que a, b, c son vértices de un triángulo equilátero si y solo si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$
 7. Sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo se construyen en su exterior triángulos isóceles BCA', CAB' y ABC' rectángulos en A', B' y C' ; I, J, K son los medios de los lados BC, CA y AB . Consideramos un sistema de coordenadas tales que $I = 0$, B y C son reales $B = -b, C = b$ y A es un número complejo a .
 8. a) Calcule los puntos J y K y luego A', B', C' como números complejos.
 b) Demuestre que existe una rotación de ángulo $\pi/2$ que transforma A' en C y B' en C' .
 c) ¿Qué representa la recta CC' en el triángulo $A'B'C'$? Deduzca que las rectas AA', BB', CC' se intersectan en el ortocentro de $\triangle A'B'C'$.

2.1.3 La Proyección Estereográfica

Es conveniente y nos será muy útil en la próxima sección, agregar al conjunto \mathbb{C} de los números complejos un punto ideal que represente un punto al infinito denotado por ∞ . Cualquier camino o curva en el plano complejo que se aleje cada vez más del origen (o de un punto fijo determinado) es una camino que lleva al punto del infinito, independiente de la dirección de la curva. Se puede imaginar en *envolver* el plano sobre una esfera, quedando todo lo que está *infinitamente lejos* sobre el polo norte. Este procedimiento se puede visualizar a través de la proyección estereográfica, en la que identificamos este nuevo plano complejo extendido con la esfera unitaria en tres dimensiones. Esta última es la llamada esfera de Riemann. Desde el punto de vista operatorio, las leyes algebraicas se pueden extender con las siguientes convenciones:

- i) $a + \infty = \infty + a = \infty$ para todo $a \in \mathbb{C}$;
- ii) $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$ para todo $b \neq 0, b \in \mathbb{C}$;
- iii) $\infty \cdot \infty = \infty, a/0 = \infty (a \neq 0) = 0, b/\infty = 0$ para todo $b \in \mathbb{C}$.

Sin embargo, no se pueden definir $\infty + \infty, 0 \cdot \infty, 0/0, \infty/\infty$.

Para visualizar el punto del infinito, consideramos la esfera unitaria

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Desde el polo norte $N = (0, 0, 1)$ consideramos la línea recta por N y P que intersecta al plano $x_3 = 0$ en un punto z . Identificamos el plano $x_3 = 0$ con \mathbb{C} (ver Figura 2.4). Los puntos de la recta por N y P son

$$(1-t)P + tN = ((1-t)x_1, (1-t)x_2, (1-t)x_3 + t).$$

Esta recta intersecta el plano horizontal si

$$(1-t)x_3 + t = 0, \quad t = \frac{x_3}{x_3 - 1},$$

y obtenemos la proyección

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

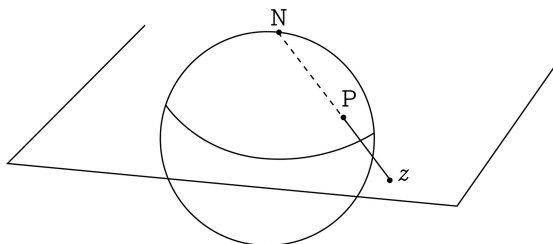


FIGURA 2.4. Proyección estereográfica

De esto podemos calcular a su vez

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

y encontrar así las fórmulas inversas

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}.$$

Con esta correspondencia $P \longleftrightarrow z$ todo punto del plano complejo corresponde biyectivamente a un punto de $S \setminus \{N\}$. Se puede entonces asociar ∞ con el polo norte N , con lo cual

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S.$$

Los puntos del hemisferio inferior corresponden al interior del disco unitario, $|z| < 1$, y los puntos del hemisferio superior corresponden al exterior del disco unitario, $|z| > 1$. Geométricamente se puede ver que las rectas en \mathbb{C} corresponden a círculos en S , círculos que pasan por N , mientras que circunferencias en \mathbb{C} corresponden a círculos en S que no pasan por el polo N . Para lo primero, considere el plano inclinado que pasa

por N y que contiene a una recta l en \mathbb{C} . La intersección de este plano con la esfera unitaria dará precisamente el subconjunto en la esfera que le corresponde a la recta l bajo la proyección estereográfica. Esta intersección es justamente un círculo que pasa por N . La segunda afirmación también se puede visualizar de manera similar, aunque no tan directamente. Para demostrar analíticamente estas proposiciones consideramos un círculo en S como la intersección de un plano con S :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

El plano pasa por N si y solo si $\alpha_3 = \beta$. Si reemplazamos en la ecuación del plano las expresiones en términos de z obtenemos

$$\alpha_1(z + \bar{z}) + \alpha_2 \frac{1}{i}(z - \bar{z}) + \alpha_3(|z|^2 - 1) = \beta(|z|^2 + 1),$$

$$(\alpha_3 - \beta)|z|^2 + (\alpha_1 - i\alpha_2)z + (\alpha_1 + i\alpha_2)\bar{z} - \alpha_3 - \beta = 0.$$

Si $\alpha_3 = \beta$, esto es la ecuación de una recta en \mathbb{C} ; si $\alpha_3 - \beta \neq 0$, es la ecuación de una circunferencia.

Recordemos las coordenadas esféricas de un punto (x_1, x_2, x_3) en el espacio, expresadas en términos del ángulo polar θ y del ángulo φ que el vector (x_1, x_2, x_3) forma con el eje Z positivo. Tenemos que

$$x_1 = \sin \varphi \cos \theta, \quad x_2 = \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = \cos \varphi,$$

donde podemos tomar $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Puesto que el triángulo OPN es isósceles se obtiene $\angle ONP = (\pi - \varphi)/2$ y luego en el triángulo NOZ , $\tan(\pi - \varphi)/2 = |z|$. Obtenemos entonces la forma polar de z :

$$z = [\tan(\pi - \varphi)/2]e^{i\theta} = \frac{1}{\tan(\varphi/2)} e^{i\theta}.$$

La rotación en el espacio en el eje x con un ángulo igual a π , que intercambia el hemisferio superior con el hemisferio inferior, se expresa en coordenada esférica por

$$P(\theta, \varphi) \rightarrow P'(-\theta, \pi - \varphi),$$

lo que da la transformación

$$z' = \frac{1}{z}.$$

Esta rotación es involutiva en el espacio e intercambia el polo norte con el polo sur. Esto se refleja en el plano complejo por esa transformación que intercambia 0 con ∞ . Si queremos ver qué sucede con el ángulo de intersección o con la convergencia de una sucesión en ∞ , hacemos el reemplazo $z' = 1/z$ y miramos qué sucede en el origen. Con esta transformación el punto al ∞ no se distingue de otro punto de \mathbb{C} , lo que es evidente en la esfera S , llamada la esfera de Riemann.

Ejercicios 2.16.

1. Demuestre que P y P' son dos puntos diametralmente opuestos en S si y solo si $\bar{z}z' = -1$.
2. Un cubo tiene sus vértices en S y aristas paralelas a los ejes de coordenadas. Encuentre las proyecciones estereográficas de los vértices en \mathbb{C} .
3. Sean P, P' puntos sobre la esfera S y z, z' sus imágenes bajo la proyección estereográfica. Muestre que la distancia esférica (distancia medida sobre S) es

$$d(P, P') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

Obtenga $d(z, \infty)$.

4. Encuentre los círculos en s que corresponden a
 - a) las rectas $y = x + b$ en \mathbb{C} ;
 - b) las rectas $y = kx$ en \mathbb{C} .

2.2 Transformaciones de Möbius

2.2.1 Definición y Propiedades Básicas

La transformación de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con a, b, c, d constantes tales que $ad - bc \neq 0$ se llama una transformación de Möbius. Estas transformaciones llevan el nombre del matemático y astrónomo teórico alemán August Ferdinand Möbius (1790-1868). Es conocido también por la *banda de Möbius*, una superficie no orientable, es decir, una en la cual *arriba* y *abajo* se confunden, y por su trabajo en geometría proyectiva. También dedicó sus estudios a la teoría de números, donde introdujo una cierta función de conteo que lleva su nombre.

Veremos que, con estas transformaciones, podemos recuperar todas las antes consideradas, incluyendo las inversiones en círculos. Convendremos que $f(\infty) = a/c$ y $f(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$, $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Observamos que la condición $ad - bc \neq 0$ es necesaria y suficiente para que la transformación no sea constante. Para muchos efectos resulta conveniente usar matrices de 2 por 2 para representar estas transformaciones: a cada $f(z)$ de la forma anterior le asociamos la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El conjunto de estas matrices con determinante no nulo forman un grupo (es un conjunto cerrado bajo la multiplicación de matrices, y cada una de ellas posee una matriz inversa del mismo tipo). Este grupo de matrices se denota por $GL(2, \mathbb{C})$, y aparecerá más adelante.

Si el determinante es 0, existe una constante λ tal que $a = \lambda c, b = \lambda d$ (o al revés) y luego

$$f(z) = \frac{\lambda cz + \lambda b}{cz + b} = \lambda.$$

Recíprocamente, si esa transformación es constante

$$az + b = (\lambda c)z + (\lambda d),$$

de donde $a = \lambda c, b = \lambda d$ y $ad - bc = 0$.

Teorema 2.17. *Las transformaciones de Möbius forman un grupo de biyecciones de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denotado por Mob.*

Demostración. Con $a = d = 1, b = c = 0$ obtenemos la identidad

$$U(z) = z,$$

que pertenece al grupo. Si $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ y $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g)(z) &= \frac{ag(z) + b}{cg(z) + d} = \frac{a(\alpha z + \beta) + b(\gamma z + \delta)}{c(\alpha z + \beta) + d(\gamma z + \delta)} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}. \end{aligned}$$

Además

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.$$

La transformación inversa de f es

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

pues es inmediato que $f \circ f^{-1} = U$. El que exista la transformación inversa implica que son biyecciones. \square

Este grupo *no es abeliano*, por ejemplo, si $f(z) = z + 1, g(z) = \frac{1}{z}$ entonces

$$(f \circ g)(z) = \frac{1}{z} + 1 = \frac{z + 1}{z}, \quad (g \circ f)(z) = \frac{1}{z + 1}.$$

Veremos más adelante que rara vez conmutan dos transformaciones de Möbius. Los cálculos recién efectuados se clarifican mejor si consideramos matrices 2×2 .

Teorema 2.18. *La aplicación*

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de $Gl(2, \mathbb{C})$ en Mob.

Demostración. Que φ transforme el producto de matrices en la composición de funciones, es el cálculo efectuado en el teorema anterior. Es mucho más sencillo, sin embargo, multiplicar matrices que componer funciones.

Por otra parte, una matriz 2×2 es invertible si y solo si su determinante no es cero y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esto concuerda con la fórmula para f^{-1} pues dos matrices tienen igual imagen bajo φ si y solo si

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

para $k \neq 0$. En efecto, si

$$\frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{az + b}{cz + d}$$

entonces

$$(a'c)z^2 + (a'd + b'c)z + b'd = (ac')z^2 + (ad' + bc')z + bd'.$$

Luego

$$a'c = ac' \quad , \quad a'd + b'c = ad' + bc' \quad , \quad b'd = bd'.$$

La primera y tercera igualdades dicen que $a' = ka$, $c' = kc$, $b' = k'b$, $d' = k'd$ para constantes k y k' , y la segunda igualdad dice que $(k'k')(ad - bc) = 0$, luego $k = k'$. Esta última observación implica, salvo multiplicar la matriz por $k = (ad - bc)^{-1/2}$ (cualquiera de las dos raíces), que en una transformación de Möbius se puede suponer

$$ad - bc = 1.$$

□

Teorema 2.19. *Una transformación de Möbius es la compuesta de*

- i) *traslaciones* $T(z) = z + a$;
- ii) *rotaciones con centro 0*, $R(z) = e^{i\theta}z$;
- iii) *homotecias con centro 0*, $H(z) = rz, r > 0$;
- iv) *la función* $I(z) = \frac{1}{z}$.

Demostración. Si $c = 0$, $f(z) = (a/d)z + (b/d)$. Escribimos a/d en su forma polar $a/d = re^{i\theta}$ y entonces

$$f(z) = r \circ H(z) + (b/d) = T_{b/d} \circ R \circ H(z).$$

Si $c \neq 0$, resulta al efectuar la división de un polinomio por otro

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

La transformación $cz + d$ es, como antes, una compuesta de i), ii) iii) y componiendo con iv) se obtiene

$$1/(cz + d).$$

Nuevamente una compuesta de i), ii) y iii) dará el resultado. \square

Con esta descomposición de $f(z)$ en transformaciones geométricas más sencillas es posible demostrar el teorema siguiente.

Teorema 2.20. *La imagen de una recta o circunferencia es una recta o circunferencia (se entiende que no respectivamente).*

Demostración. Recordamos que una recta tiene ecuación $L : \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \beta = 0$ con β real mientras que una circunferencia tiene ecuación $C : z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \beta = 0$ con β real.

Para una traslación $z' = z + a$, la imagen satisface

$$L' : \alpha(\overline{z' - a}) + \bar{\alpha}(z' - a) + \beta = \alpha\bar{z}' + \bar{\alpha}z' + (\beta - \alpha\bar{a} - \bar{\alpha}a) = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} C' : (z' - a)(\overline{z' - a}) + \alpha(\overline{z' - a}) + \bar{\alpha}(z' - a) + \beta \\ = z'z' + (\alpha - a)\bar{z}' + (\bar{\alpha} - \bar{a})z' + (\beta - \alpha\bar{a} - \bar{\alpha}a + a\bar{a}) = 0, \end{aligned}$$

que son, respectivamente, una recta y una circunferencia. Lo mismo puede hacerse para rotaciones y homotecias. Por último, si $z' = 1/z$ entonces la imagen de L será

$$\alpha\frac{1}{\bar{z}} + \bar{\alpha}\frac{1}{z} + \beta = \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta z\bar{z} = 0.$$

Si $\beta = 0$ esto es una recta, si $\beta \neq 0$ es la circunferencia

$$z\bar{z} + (\alpha/\beta)\bar{z} + (\bar{\alpha}/\beta)z = 0.$$

La imagen de C produce, de forma similar,

$$\frac{1}{z\bar{z}} + \alpha\frac{1}{\bar{z}} + \bar{\alpha}\frac{1}{z} + \beta = 1 + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta z\bar{z} = 0,$$

que es una recta si $\beta = 0$, una circunferencia si $\beta \neq 0$. \square

En este contexto geométrico es más sencillo interpretar una recta como una circunferencia que pasa por ∞ ; así, por ejemplo, la imagen de una circunferencia será una recta si y solo si $-d/c$ pertenece a la circunferencia pues $f(-d/c) = \infty$.

Ejemplo 2.21. La transformación $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ lleva el eje real en la circunferencia unidad.

Demostración. Podríamos hacer el cálculo de la transformación de la ecuación

$$z - \bar{z} = 0,$$

pero preferimos la idea siguiente: tres puntos determinan una única circunferencia, o una recta si están en línea recta. Consideramos entonces tres puntos en el eje real; sus imágenes determinan la circunferencia o recta que pasa por ellos:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(\infty) = 1.$$

La circunferencia unidad pasa por esos tres puntos y es, por lo tanto, la imagen del eje real. Por otra parte, para t real

$$\frac{t-i}{t+i} = \frac{(t-i)^2}{1+t^2} = \frac{t^2-i}{1+t^2} + i \frac{-2t}{1+t^2},$$

y con $t = \tan(\theta/2)$ recuperamos la parametrización $(\cos \theta, -\sin \theta)$ de la circunferencia unidad.

La imagen del eje imaginario $\{iy \mid y > 0\}$ es el segmento $-1 < x < 1$ pues

$$\frac{iy-i}{iy+i} = \frac{y-1}{y+1}.$$

La imagen de una recta horizontal $z - \bar{z} = 2ik$, $k > 0$ es una circunferencia ortogonal al eje real, tangente a la circunferencia unidad en el punto 1, con centro en $\frac{k}{k+1}$, radio $\frac{1}{k+1}$, que pasa por $\frac{k-1}{k+1}$. Con todo esto, la biyección es geoméricamente clara:

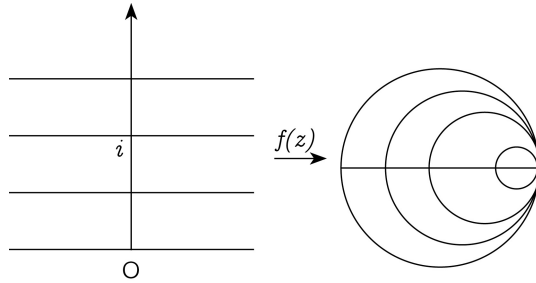


FIGURA 2.5. Traslación compleja

□

Ejemplo 2.22. Consideramos el grupo de orden seis

$$G = \left\{ z, \frac{1}{z}, 1-z, \frac{1}{1-z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1} \right\}.$$

Como grupo es isomorfo al grupo S_3 de permutaciones de tres elementos, correspondiendo dos trasposiciones a $1/z$ y $1 - z$. Vamos a considerar una configuración geométrica en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ asociada a ese grupo. La circunferencia unidad queda fija por $1/z$ pero es llevada a la circunferencia de centro 1 y radio 1 por $1 - z$. El eje real está fijo por $1/z$ y por $1 - z$, luego por todo el grupo G . La recta por los puntos $1/2$, $1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ queda fija también por todo el grupo. Resulta que la configuración siguiente de dos circunferencias y dos rectas está fija por G .

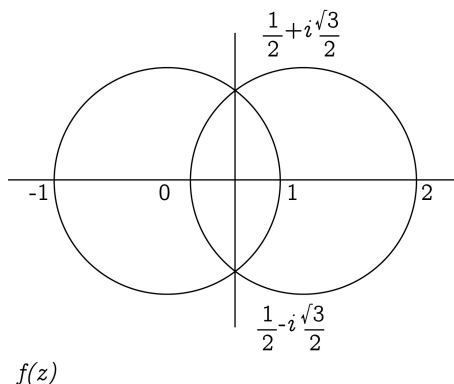


FIGURA 2.6. Configuración de un grupo

Hay allí en total doce triángulos cuyos lados son rectas o arcos de círculo. Un par de ellos, por ejemplo, los dos con vértices en $0, 1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, uno achurado y el otro no, forman lo que se llama una región fundamental F . Las seis imágenes de F por los elementos del grupo completan $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por ejemplo, la imagen de F por $1 - z$ es la región limitada por $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ mientras que por $1/z$ es la región con vértices $1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty$.

Esta configuración puede dibujarse en la esfera de Riemann S observando que en el punto $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ concurren tres circunferencias (una de ellas es una recta) que también concurren en el punto $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Estas tres son ortogonales al eje real. La figura se verá entonces en la esfera.

Teorema 2.23. *Toda transformación de Möbius preserva ángulos de dos curvas en el plano, tanto en sentido como en magnitud.*

Demostración. Recordemos que el ángulo entre dos curvas que se cruzan, está definido como el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de intersección. Un ejercicio fundamental del cálculo en varias variables nos dice que los vectores tangentes a las curvas en la imagen estarán dados por la matriz jacobiana (o matriz diferencial) aplicada a los vectores tangentes a las curvas en el dominio. Por lo tanto, es claro que

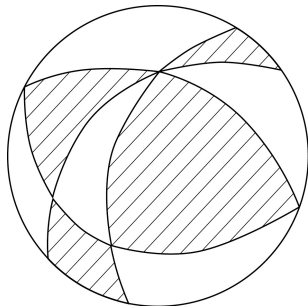


FIGURA 2.7. Rotación en la esfera

tanto las traslaciones, rotaciones y homotecias preservan ángulos. Bastará ver que la transformación

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

preserva ángulos. Puesto que

$$I(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

su matriz jacobiana es

$$JI = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

con $a = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $b = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. Esta matriz se descompone en

$$\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

que es una rotación seguida de homotecia, y preserva ángulos entre vectores. Observemos finalmente que podemos definir el ángulo entre dos curvas en el punto ∞ como el ángulo de sus imágenes bajo $1/z$ en el punto 0.

□

2.2.2 Clasificación de las Transformaciones de Möbius

El álgebra de los números complejos nos permite hacer una clasificación muy detallada de los distintos tipos de transformaciones de Möbius. El concepto central es el de punto fijo, destacándose la fórmula de la resolución de la ecuación cuadrática. Un punto p en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama un punto fijo para $f(z)$ si

$$f(p) = p.$$

En tal caso p debe satisfacer la ecuación

$$\frac{ap + b}{cp + d} = p,$$

es decir,

$$cp^2 + (d - a)p - b = 0. \quad (*)$$

Esta ecuación de segundo grado tiene a lo más dos soluciones, que pueden ser iguales. Resulta que la clasificación de los distintos tipos de transformaciones de Möbius estará dada por cómo se comporta la transformación en torno a sus puntos fijos. ¿Son como rotaciones cerca de esos puntos? ¿o dilataciones? ¿o una superposición de ambas? La respuesta a estas preguntas nos permitirá hacer las distinciones entre los diferentes tipos de transformaciones de Möbius.

El hecho de que una ecuación cuadrática posee sólo dos raíces, permite establecer el siguiente hecho fundamental.

Teorema 2.24. *Si una transformación de Möbius fija tres puntos, es la identidad.*

De manera equivalente, formulamos el siguiente resultado que en la práctica resulta fundamental al determinar transformaciones de Möbius específicas.

Teorema 2.25. *Dados tres puntos z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y tres puntos w_1, w_2, w_3 existe una única transformación de Möbius tal que*

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Demostración. Sea

$$\alpha(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Entonces $\alpha(z_1) = 0$, $\alpha(z_2) = 1$, $\alpha(z_3) = \infty$. De igual forma,

$$\beta(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \frac{z - w_1}{z - w_3}$$

satisface $\beta(w_1) = 0$, $\beta(w_2) = 1$, $\beta(w_3) = \infty$. Entonces

$$f = \beta^{-1} \circ \alpha$$

satisface la condición pedida. Es única, pues si $g(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, entonces $f^{-1} \circ g(z_i) = z_i$, $i = 1, 2, 3$, y por el teorema anterior $f^{-1} \circ g = id$, es decir, $f = g$. \square

El multiplicando K : Las transformaciones de Möbius pueden tener uno o dos puntos fijos. Supongamos primero que tiene dos distintos. La ecuación (*) con $c \neq 0$ tiene dos raíces p_1 y p_2 que satisfacen

$$p_1 + p_2 = \frac{a - d}{c}, \quad p_1 p_2 = -\frac{b}{c},$$

y están dadas por la fórmula

$$\frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Supondremos que $ad - bc = 1$. Los puntos fijos se escriben

$$\frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

La condición $p_1 \neq p_2$ dice entonces que $a + d \neq 2, -2$. Observamos que $a + d$ es la traza de la matriz $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la cual es invariante bajo conjugación, es decir,

$$\text{tr}(m^{-1}Tm) = \text{tr}(T).$$

Por otra parte, la ecuación (*) con $c = 0$ tiene las soluciones $p_1 = \infty$ y $p_2 = \frac{b}{d-a}$. La condición $p_1 \neq p_2$ dice entonces que $a \neq d$ y tomando en cuenta que ahora $ad = 1$ se obtiene también $a + d \neq 2, -2$.

Sea g una transformación de Möbius tal que

$$g(p_1) = 0 \quad , \quad g(p_2) = \infty.$$

Por ejemplo,

$$g(z) = \frac{z - p_1}{z - p_2}.$$

Entonces $g \circ f \circ g^{-1}$ tiene los puntos fijos $0, \infty$. Se deberá tener

$$(g \circ f \circ g^{-1})(z) = Kz$$

para algún número complejo K . Denotamos a esa transformación

$$k(z) = Kz,$$

cuya matriz asociada normalizada con determinante 1 será

$$\begin{pmatrix} \sqrt{K} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{K} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$f = g^{-1} \circ k \circ g,$$

y considerando las trazas de las matrices se obtiene la fórmula de K en términos de los coeficientes:

$$\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} = a + d,$$

o también

$$K = \frac{a - cp_1}{a - cp_2}.$$

Este número, complejo en general, se llama el multiplicador de la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad , \quad ad - bc = 1.$$

Ahora bien, sea C algún objeto geométrico (punto, circunferencia, región) y sea

$$k(C) = C'.$$

Conjugando con g^{-1} obtenemos

$$f(g^{-1}(C)) = g^{-1}(k(C)) = g^{-1}(C').$$

Esto es, f lleva $g^{-1}(C)$ en $g^{-1}(C')$. Usaremos este hecho de la manera siguiente: estudiaremos la transformación $k(z) = Kz$ y encontrando configuraciones geométricas asociadas, las llevamos a f vía g^{-1} . Una segunda ventaja de considerar $k(z)$ es que las potencias bajo composición son directas $k \circ k \circ \dots \circ k(z) = K^n z$. Luego

$$\begin{aligned} f \circ \dots \circ f &= (g^{-1} \circ k \circ g) \circ (g^{-1} \circ k \circ g) \circ \dots \circ (g^{-1} \circ k \circ g) \\ &= g^{-1} \circ (k \circ k \circ \dots \circ k) \circ g, \end{aligned}$$

de modo que el multiplicador de f compuesta n veces es k^n . Escribamos K en forma polar $K = Ae^{i\theta}$ con $A > 0$, para distinguir entonces tres clases de transformaciones.

Transformaciones Hiperbólicas: $K = A > 0$. La transformación $z' = Az$ es una homotecia con centro 0. Entonces:

- i) Una línea recta por el origen queda fija por la homotecia, más precisamente cada semi-recta va en sí misma.
- ii) El semiplano a un lado de una recta va a sí mismo.
- iii) Una circunferencia con centro en el origen, ortogonal a las rectas por 0, va a dar a otra circunferencia con centro en el origen.

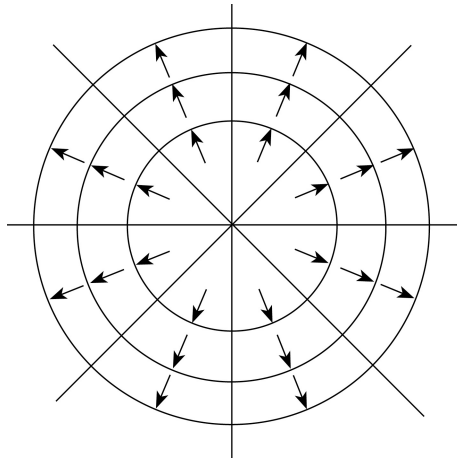


FIGURA 2.8. Dilatación

Efectuamos ahora la transformación g^{-1} que lleva los puntos $0, \infty$ en los puntos fijos p_1, p_2 . Obtenemos entonces

- i) Toda circunferencia por los puntos fijos quedará fija; cada arco entre p_1, p_2 va a dar a sí mismo.

- ii) El interior de un círculo por p_1, p_2 va a dar a sí mismo.
- iii) Una circunferencia ortogonal a las circunferencias por p_1, p_2 va a dar a otra tal circunferencia.

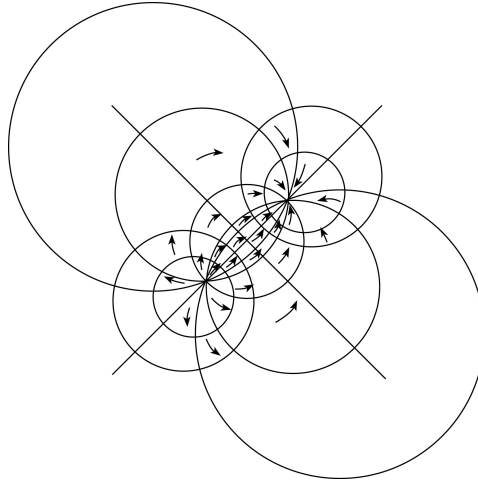


FIGURA 2.9. Hiperbólica

Transformaciones Elípticas: $K = e^{i\theta}$. La transformación $f(z) = e^{i\theta}z$ es una rotación en un ángulo θ con centro en el origen. Entonces:

- i) Una circunferencia con centro en el origen está fija por la rotación.
- ii) El interior y exterior de un círculo con centro 0 va a dar a sí mismo.
- iii) Una recta con centro en el origen, ortogonal a las circunferencias, va a dar a otra tal recta.

Efectuamos la transformación g^{-1} que lleva los puntos $0, \infty$ en p_1, p_2 . Obtenemos respectivamente:

- i) Toda circunferencia ortogonal a las anteriores va a dar a sí misma.
- ii) El interior de tales circunferencias va a dar a sí mismo.
- iii) Toda circunferencia por los puntos fijos va a dar a otra tal circunferencia.

Transformaciones Parabólicas: Una transformación se dice parabólica si los dos puntos fijos coinciden. En tal caso

$$(a + d)^2 - 4 = 0,$$

y el único punto fijo es

$$p_1 = \frac{a - d}{2c}, \text{ si } c \neq 0, \quad p_1 = \infty, \text{ si } c = 0.$$

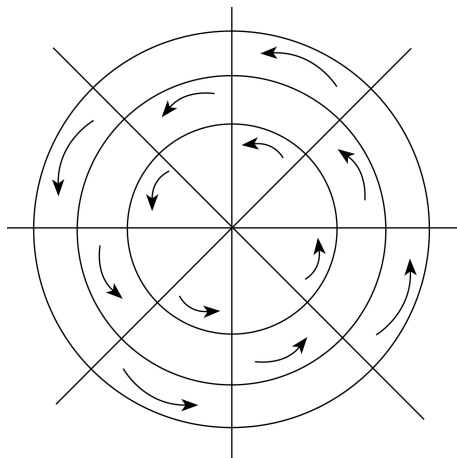


FIGURA 2.10. Rotación

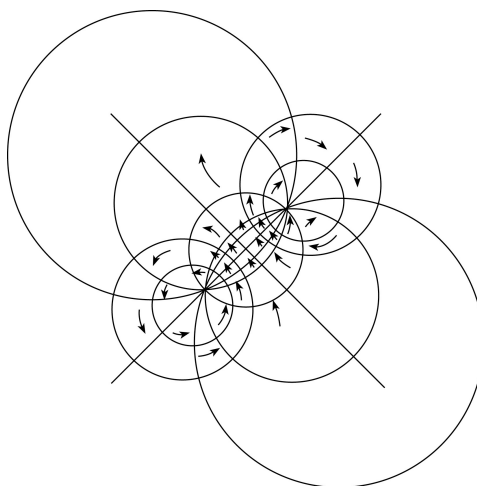


FIGURA 2.11. Elíptica

Conjugamos en el primer caso por

$$g(z) = \frac{1}{z - p_1},$$

de forma que

$$g \circ f \circ g^{-1}$$

tiene el único punto fijo ∞ . Se deberá tener

$$g \circ f \circ g^{-1}(z) = z + t$$

para algún número complejo t . Obtenemos entonces:

- i) Una línea recta paralela a t está fija por la traslación.
- ii) El semiplano de un lado de cada una de ellas va a sí mismo.
- iii) Una recta ortogonal a las anteriores va a dar a otra tal recta ortogonal.

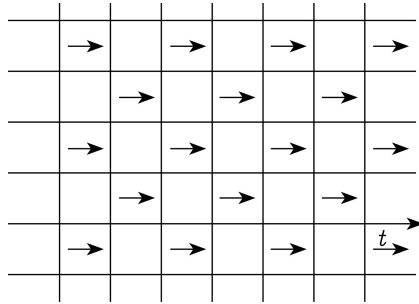


FIGURA 2.12. Traslación

Transformaciones Loxodrómicas: $K = Ae^{i\theta}$. En este caso, $A > 0, A \neq 1$ y $\theta \neq 2\pi n$. La transformación

$$k(z) = Ae^{i\theta}z$$

es la compuesta de una transformación hiperbólica $z_1 = Az$ seguida de una elíptica $z_2 = e^{i\theta}z_1$; hay, en primer lugar, una homotecia seguida de una rotación. Cada circunferencia con centro en el origen se lleva a otra tal circunferencia y toda recta por el origen a otra tal recta, rotada en un ángulo θ respecto a la primera.

La órbita de un punto

$$\{A^n e^{in\theta}z, n \in \mathbb{Z}\}$$

está en una espiral arquimedean. No necesitaremos estas transformaciones en lo que sigue, por lo que sólo completamos una propiedad de la traza. En este caso,

$$(a + d)^2 = \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right)^2 = 2 + \left(A + \frac{1}{A} \right) \cos \theta + i \left(A - \frac{1}{A} \right) \sin \theta.$$

Es un número complejo en general, y si $\theta = \pi$, $(a + d)^2$ es un número real negativo y, por lo tanto, $a + d$ es imaginario puro.

Efectuamos ahora la transformación g^{-1} que lleva ∞ a p_1 , y obtenemos una familia de circunferencias fijas por f y una familia ortogonal de circunferencias que se trasladan.

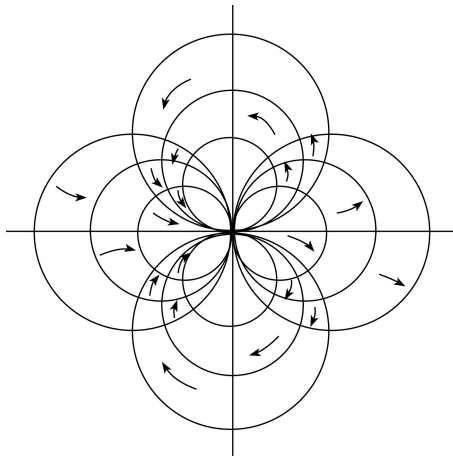


FIGURA 2.13. Loxodrómica

Teorema 2.26. Sea f una transformación de Möbius con $ad - bc = 1$. Entonces f es

- i) *hiperbólica* si $a + d$ real y $|a + d| > 2$;
- ii) *elíptica* si $a + d$ real y $|a + d| < 2$;
- iii) *parabólica* si $a + d$ real y $|a + d| = 2$;
- iv) *loxodrómica* si $a + d$ es complejo.

Demostración. La traza es invariante bajo conjugación y el resultado es inmediato a partir de las matrices

$$\begin{pmatrix} \sqrt{K} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{K} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicios 2.27.

1. a) Muestre que la transformación

$$z' = \frac{1}{z}$$

representa la inversión en la circunferencia $|z| = 1$.

- b) Encuentre la fórmula para la inversión en una circunferencia de centro 0 y radio r .
- c) Encuentre la fórmula para la inversión en una circunferencia de centro p y radio r .

2. Encuentre el inverso del punto $1 + i$ con respecto a

- a) la circunferencia $|z| = 1$;
- b) la circunferencia $|z - i| = 2$.

3. a) Muestre que la transformación

$$z' = \bar{z}$$

representa la reflexión en el eje real.

- b) Encuentre la fórmula para la reflexión en una recta por el origen con un ángulo θ respecto al eje x .
 - c) Encuentre la fórmula para la reflexión en una recta por P con un ángulo θ con respecto al eje x .
4. Sean z, z_1 dos puntos inversos respecto a una circunferencia

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0.$$

Demuestre que

$$z_1\bar{z} + \bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z} + \beta = 0.$$

5. Sea $f(z)$ una transformación de Möbius que lleva una circunferencia C en una circunferencia C' . Demuestre que lleva dos puntos inversos con respecto a C a dos puntos inversos con respecto a C'

6. Encuentre en cada caso la transformación de Möbius.

- a) Lleva $0, i, -i$ en $1, -1, 0$ respectivamente.
- b) Fija $1, -1$ y lleva 0 a i .
- c) Tiene 1 como único punto fijo y lleva i a ∞ .
- d) Fija $1, -1$ y satisface $f^3 = id$.

7. Sea $S = -1/z$, $T = z + 1$. Calcule

$$ST, TS, ST^{-1}, TST^{-1}.$$

8. Encuentre los puntos fijos de las transformaciones

$$\frac{z}{3z+1}, \quad \frac{3z-1}{z}, \quad \frac{2z}{3z-1}.$$

9. Sean a, b, c, d cuatro números en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Demuestre que existe una transformación de Möbius que lleva esos puntos en $1, -1, k, -k$.

10. Encontrar todas las transformaciones de Möbius que representan rotaciones de la esfera de Riemann.

11. Demuestre que toda transformación que lleva \mathbb{R} en \mathbb{R} puede escribirse con coeficientes reales.

2.3 La Razón Doble

Estudiaremos primero la razón doble de cuatro puntos en la recta real, pues es más fácil visualizar los conceptos, pero las fórmulas que obtendremos serán válidas para números complejos o, más precisamente, en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2.3.1 Razón simple de tres elementos

El estudio de los *invariantes* resulta fundamental en toda geometría y su grupo de transformaciones. Los invariantes son los objetos o cantidades que dichas transformaciones no alteran. Por ejemplo, la distancia euclídea es un invariante para el grupo de las isometrías del plano. Para las transformaciones de Möbius existe un invariante destacado, que es la razón de cuatro puntos (Teorema 2.21) que, en particular, permite determinar una transformación de Möbius prescribiendo de manera arbitraria la imagen de tres puntos (algo similar al teorema de unicidad para isometrías euclídeas). Comenzamos primero con la razón de tres puntos. Sean A, B, C tres puntos en la recta real. Se llama razón simple en la que el punto C divide al segmento \overline{AB} al número

$$(A, B, C) = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Si a, b, c son las coordenadas de los tres puntos en la recta por A, B, C , entonces

$$(A, B, C) = \frac{a - c}{b - c}.$$

Observamos que esto tiene sentido aún si $c = \infty$, donde

$$(A, B, \infty) = 1.$$

Si estos tres puntos se proyectan desde un punto S , exterior a la recta l de los puntos, se obtienen tres rectas α, β, γ .

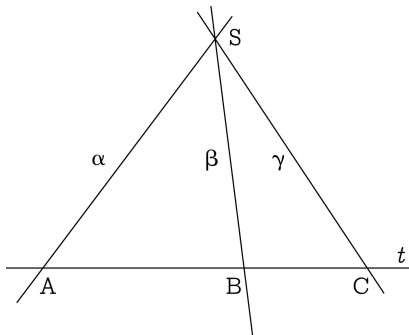


FIGURA 2.14. Razón simple

Si denotamos por $\angle(\alpha, \beta)$ el ángulo entre las dos rectas, medido desde α a β en el sentido positivo, entonces se tiene la relación

$$(A, B, C) = \frac{SA \operatorname{sen} \angle(\alpha, \gamma)}{SB \operatorname{sen} \angle(\beta, \gamma)}.$$

La demostración se basa en el teorema de los senos, pues

$$\frac{AC}{SA} = \frac{\text{sen } \angle(\alpha, \gamma)}{\text{sen } \angle(\gamma, l)} \quad , \quad \frac{BC}{SB} = \frac{\text{sen } \angle(\beta, \gamma)}{\text{sen } \angle(\gamma, l)} .$$

Esa relación indica la necesidad de considerar el punto $c = \infty$ pues en el lado derecho la recta γ correspondiente es una recta paralela a l , y esas razones tienen pleno sentido.

2.3.2 Razón doble de cuatro puntos

Consideramos ahora un cuarto punto D en la recta l . Entonces también se tiene

$$(A, B, D) = \frac{SA}{SB} \frac{\text{sen } \angle(\alpha, \delta)}{\text{sen } \angle(\beta, \delta)} .$$

Dividiendo las dos razones simples obtenemos

$$\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{\text{sen } \angle(\alpha, \gamma)}{\text{sen } \angle(\beta, \gamma)} \frac{\text{sen } \angle(\beta, \delta)}{\text{sen } \angle(\alpha, \delta)} .$$

Esta expresión recibe, dada su importancia, un nombre y notación especial: se llama la *razón doble de los cuatro puntos*, igual a la *razón doble de las cuatro rectas*, y se denota por

$$(A, B, C, D) = \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{b - d}{a - d} ,$$

igual a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\text{sen } \angle(\alpha, \gamma)}{\text{sen } \angle(\beta, \gamma)} \frac{\text{sen } \angle(\beta, \delta)}{\text{sen } \angle(\alpha, \delta)} .$$

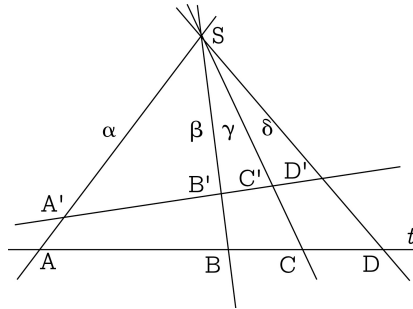


FIGURA 2.15. Razón doble

Esta razón permanece inalterada si en la recta l cambiamos el origen o la escala del sistema de coordenadas, pues en tal caso los números a, b, c, d se reemplazarán por

$$k(a - e) , k(b - e) , k(c - e) , k(d - e) .$$

Pero, además, esta razón es la misma si los cuatro puntos son proyectados desde S sobre otra recta l' por medio de las cuatro rectas, pues los ángulos son los mismos. Si denotamos estos puntos por A', B', C', D' entonces

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Si cambiamos el centro de proyección a un punto S' y desde allí proyectamos mediante rectas $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ esos puntos sobre la recta l nuevamente, obtendremos puntos A'', B'', C'', D'' tales que

$$(A, B, C, D) = (A'', B'', C'', D'').$$

Es por ello que esta razón doble merece el nombre de *invariante proyectivo*.

2.3.3 Razón doble en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Sean a, b, c, d cuatro números complejos. Se define la razón doble por la fórmula:

$$(a, b, c, d) = \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{b - d}{a - d}.$$

Esta fórmula se extiende al caso en que uno de los puntos sea igual a ∞ tomando el límite; por ejemplo,

$$\begin{aligned} (\infty, b, c, d) &= \frac{b - d}{b - c}, \\ (a, \infty, c, d) &= \frac{a - c}{a - d}. \end{aligned}$$

Acá el resultado principal:

Teorema 2.28. *Sea f una transformación de Möbius. Entonces*

$$(f(a), f(b), f(c), f(d)) = (a, b, c, d).$$

Demostración. Es inmediato que la razón doble es invariante por traslaciones, rotaciones y homotecias. Falta ver que es invariante bajo la transformación $z \rightarrow 1/z$. Pero

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right) &= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \cdot \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b - d}{a - d} \\ &= (a, b, c, d). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.29. *Existe una única transformación de Möbius que lleva los puntos b, c, d en $1, 0, \infty$ en ese orden. La imagen del cuarto punto a es λ . Entonces*

$$\lambda = (a, b, c, d).$$

Demostración. Tenemos que

$$(a, b, c, \infty) = \frac{a - c}{b - c}.$$

Luego

$$(\lambda, 1, 0, \infty) = \lambda.$$

Se podría entonces haber definido la razón doble como este número λ , pero queda la duda de lo que sucede si se cambia el orden de los números, de forma que b vaya a 0, por ejemplo. Clarificamos esto en *cambio de la razón doble por permutación de las letras*.

- i) La relación doble no se altera si se cambian entre sí dos números cualquiera, siempre que también se cambien entre sí los otros dos. Así, por ejemplo,

$$(a, b, c, d) = (b, a, d, c) = (c, d, a, b) = (d, c, b, a).$$

Estas identidades se comprueban enseguida.

- ii) Si se intercambian los dos primeros elementos, o los dos últimos, se obtiene

$$(b, a, c, d) = \frac{1}{(a, b, c, d)}.$$

- iii) Si se intercambian los dos elementos medios, o los dos extremos, se obtiene

$$(a, c, b, d) = 1 - (a, b, c, d).$$

Si λ es así el valor de la razón doble, se encuentran en total los seis valores:

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= \lambda, & (a, b, d, c) &= \frac{1}{\lambda}, & (a, c, b, d) &= 1 - \lambda, \\ (a, c, d, b) &= \frac{1}{1 - \lambda}, & (a, d, b, c) &= \frac{\lambda - 1}{\lambda}, & (a, d, c, b) &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Puesto que, por i), podemos siempre suponer a en el primer lugar, el grupo S_3 de las permutaciones de las tres letras b, c, d se encuentra así representado por ese grupo de transformaciones de Möbius, que ya hemos estudiado anteriormente. \square

2.3.4 Cuádruple armónico

Como un caso especial vamos a considerar una construcción geométrica históricamente importante. Consideramos tres puntos A, B, C en la recta real l y un punto P de proyección. Desde C trazamos una transversal que intersecta PA y PB en M y N respectivamente.

Las rectas AN y BM se intersectan en Q y la recta PQ determina D en l , O en la transversal MN . Entonces, proyectando desde P tenemos

$$(A, B, C, D) = (M, N, C, O),$$

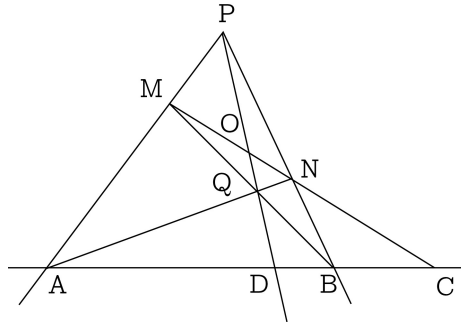


FIGURA 2.16. Configuración armónica

y proyectando desde Q ,

$$(A, B, C, D) = (N, M, C, O).$$

Puesto que $(N, M, C, O) = (M, N, C, O)$ se obtiene por ii) anterior

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{(A, B, C, D)}.$$

Si $(A, B, C, D) = 1$ entonces $\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = 1$ y $D = C$. Sólo queda la posibilidad

$$(A, B, C, D) = -1.$$

En este caso, los cuatro puntos se dicen estar en *relación armónica*. Si $C = \infty$, D es el punto medio de AB y MN es paralela a AB . Esta construcción geométrica se utilizó en los cuadros renacentistas para dibujar el punto medio de AB si el punto C es un punto *al infinito*.

2.3.5 Razón doble y la circunferencia

Las siguientes propiedades serán claves en Geometría no-Euclidiana.

Teorema 2.30. *Cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 están en una circunferencia o recta si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Tres puntos z_1, z_2, z_3 determinan una única circunferencia C o una recta. Existe una única transformación de Möbius, f , que lleva esos tres puntos a $0, 1, \infty$, z_4 a x_4 , y, por lo tanto, la circunferencia (o recta) C a la recta real. Entonces

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 1, \infty, x_4) = \frac{1 - x_4}{-x_4},$$

que es un número real si y solo si x_4 es real.

□

Teorema 2.31. *Considere una orientación dada para una circunferencia C y sean z_1, z_2, z_3, z_4 puntos respectivamente ordenados. Entonces*

$$(z_2, z_3, z_4, z_1) > 1.$$

Demostración. Sea f una transformación de Möbius que lleve C sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 sobre a, b, c, d con $a < b < c < d$. Entonces

$$(z_2, z_3, z_4, z_1) = (b, c, d, a) = \frac{b-d}{c-d} \frac{c-a}{b-a} > 1,$$

pues cada factor es mayor que 1.

□

Teorema 2.32. *Para cinco puntos se tiene*

$$(a, b, y, x)(b, c, y, x) = (a, c, y, x).$$

Demostración. Inmediata.

□

Teorema 2.33. *Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos que determinan una circunferencia C . Entonces dos puntos z y z^* son inversos respecto a C si y solo si*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Demostración. Sea a el centro y R el radio de C . Por las propiedades de invarianza de la razón doble se obtiene

$$\begin{aligned} (\bar{z}, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} \\ &= \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a} \right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right) = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3 \right). \end{aligned}$$

Esto será igual a lo pedido si y solo si

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a,$$

o bien, como sabemos,

$$|z^* - a||z - a| = R^2.$$

□

Corolario 2.34. *Si una transformación de Möbius lleva una circunferencia C en otra C' , lleva puntos inversos respecto a C en puntos inversos respecto a C' .*

Ejercicios 2.35.

1. Sea f una transformación de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo tal que

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

para todos los cuádruples de puntos. Demuestre que f es una transformación de Möbius.

2. Encuentre la relación entre (a, b, c, d) , (b, c, d, a) , (c, d, a, b) y (d, a, b, c) (permutación cíclica).
 3. Demuestre que si $(A, B, C) = k$ entonces

$$C = \frac{A - kB}{1 - k}.$$

4. Pruebe que si A, B, C, D es un cuádruple armónico entonces

$$C = \frac{A - kB}{1 - k}, \quad D = \frac{A + kB}{1 + k}.$$

5. Si A, B, C, D es un cuádruple armónico y el origen de coordenadas coincide con A entonces

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right).$$

6. Cuatro rectas de un haz se dicen un cuádruple armónico si y solo si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -1$. Demuestre que las bisectrices de un ángulo separan a los lados del ángulo armónicamente.

7. Verifique directamente que si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

8. Usando una transformación de Möbius tal que $f(y) = 0, f(x) = \infty$ demuestre que

$$(a, b, y, x)(b, c, y, x) = (a, c, y, x).$$

Capítulo 3: Geometría Hiperbólica



Durante más de dos mil años el V° postulado de Euclides: *por un punto fuera de una recta pasa una y una sola paralela a esa recta*, constituyó una fuente de sorpresa. Por un lado se descubrió que este axioma era lógicamente equivalente a una serie de proposiciones tales como

- *la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados,*
- *existen triángulos de área tan grande como se quiera,*

y, por otra parte, al ser un axioma, era concebible que pudiera existir una geometría distinta a la euclidiana. Recién en el siglo XIX se encontró que efectivamente existía una geometría en la cual por un punto fuera de una recta pasa una infinidad de rectas paralelas a ella. El modelo para esta geometría *no euclidiana* puede ser contruido usando como universo el disco unitario \mathbb{D} , y su grupo de isometrías o movimientos rígidos resultan ser las transformaciones de Möbius que llevan \mathbb{D} en sí mismo (ver Teorema 3.6). Es decir, habremos cambiado todo el plano en la geometría euclidiana por un conjunto más pequeño, con un nuevo grupo de transformaciones que conocemos bien por el capítulo anterior.

El matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792-1856) fue uno de los primeros en aplicar un tratamiento crítico a los postulados fundamentales de la geometría euclidiana. En forma independiente del húngaro Bolyai y del alemán Gauss, descubrió en la primera mitad del siglo XIX un sistema de geometría no euclidiana, es decir, uno en el cual no se cumplía el famoso quinto postulado. Antes de esto, muchos matemáticos habían tratado infructuosamente de deducir este postulado de los primeros cuatro. En las obras de Lobachevski se destacan *Sobre los principios de la geometría* y *Geometría imaginaria*.

3.1 El Modelo de Poincaré

3.1.1 Preliminares

¿Qué significa cambiar una geometría? ¿Cómo se logra? En términos modernos, y aunque parezca poco natural al comienzo, resulta que las distintas geometrías están caracterizadas por cómo se mida la distancia entre puntos. La razón principal de esto, es que la manera cómo midamos la distancia entre puntos determina el cómo se mide el largo de un camino (piense en aproximar el camino curvo por un camino poligonal,

cuyo largo es la suma de las distancias entre puntos consecutivos). Al cambiar los largos de curvas cambian entonces las llamadas *geodésicas*, es decir, los caminos más cortos entre dos puntos dados. El largo de dicha geodésica será igual a la distancia entre dichos puntos. Todos sabemos que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, pero esto es así porque subyacentemente estamos pensando en la geometría euclidiana con la distancia usual. A manera de ejemplo, si entre dos puntos del plano hubiera un cerro, es probable que el camino más corto entre ellos debiera curvarse algo para esquivar el obstáculo. El haber puesto un cerro es una manera de cambiar la distancia. En el modelo de la geometría de Poincaré en el disco, pusimos *cerros* cada vez más altos cerca del borde del disco, de modo que los caminos más cortos entre dos puntos (cerca del borde) tratarán de evitar estar cerca de él, curvándose hacia adentro del disco (un análisis más preciso en términos matemáticos será dado en la Sección 3.3). Por un efecto que es parte de la construcción de esta geometría, las nuevas geodésicas resultarán circunferencias perpendiculares al borde del disco, curvadas justamente hacia adentro. Son este nuevo tipo de líneas rectas generalizadas las que permitirán que no se cumpla el postulado anterior de la geometría euclidiana (Figura 3.1). En este modelo, las transformaciones de Möbius que lleven \mathbb{D} en sí mismo llevarán las nuevas rectas en nuevas rectas; serán por ende, colineaciones en el sentido amplio de la palabra. En resumidas cuentas, se puede definir una geometría definiendo cuáles han de ser sus geodésicas, o nuevas rectas, y todo pasa implícitamente por la noción de distancia que se use. En la presentación que haremos de este modelo vamos a comenzar definiendo las nuevas rectas o geodésicas. Luego definiremos la nueva distancia, la cual se mostrará ser invariante bajo el conjunto de transformaciones de Möbius que preserva \mathbb{D} (el nuevo grupo de isometrías). Finalmente, estudiaremos cómo cambian los elementos de largo y de área.

Sea \mathbb{D} el interior del disco unitario en el plano complejo

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}.$$

Un punto en \mathbb{D} se llama un punto no euclidiano y el disco mismo se llama el plano no euclidiano. Los puntos del borde, en la circunferencia unitaria, no pertenecen a esta geometría y se consideran puntos al infinito.

Sea l una circunferencia ortogonal a la circunferencia unitaria; el arco de círculo al interior de \mathbb{D} se llama una recta no euclidiana, o hiperbólica. En esta acepción admitimos que los diámetros son rectas no euclidianas también; son las rectas que pasan por el origen.

Con estas solas nociones es posible ver ya la diferencia esencial con la geometría de Euclides: *por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a ella*. Acá se entiende por rectas *paralelas*, rectas que sencillamente no se cortan o no tienen un punto en común.

Podemos tener además un caso especial de rectas paralelas, las rectas *asintóticas* en la Figura 3.2.

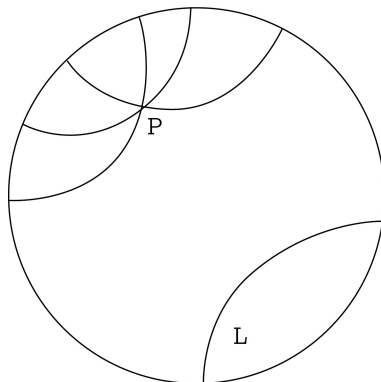
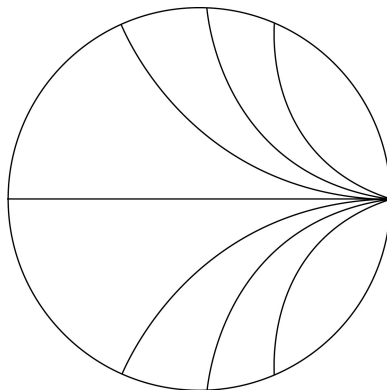
FIGURA 3.1. Rectas por p paralelas a L 

FIGURA 3.2. Rectas paralelas asintóticas

Junto con el disco unitario, es conveniente considerar como modelo auxiliar equivalente, el semiplano superior en el plano complejo

$$\mathbb{H} = \{w : \text{Im}(w) > 0\}.$$

¿En qué sentido es éste un modelo equivalente? Sabemos que existe una transformación de Möbius T que lleva \mathbb{D} en \mathbb{H} . Esta transformación nos permite trasladar a \mathbb{H} la manera de medir distancia en \mathbb{D} , y por ende, sus geodésicas. Es decir, la geodésica entre puntos $P, Q \in \mathbb{H}$ será la imagen bajo T de la geodésica en \mathbb{D} que une $T^{-1}(P)$ con $T^{-1}(Q)$. Como las transformaciones de Möbius preservan ángulos y llevan círculos en círculos, las nuevas geodésicas en \mathbb{H} han de ser nuevamente círculos perpendiculares al borde \mathbb{H} . ¿Por qué se introduce este nuevo modelo de la geometría de Poincaré? Sencillamente, porque en ciertas instancias resulta más sencillo comprobar un hecho

geométrico en \mathbb{H} que en \mathbb{D} . El modelo \mathbb{D} destaca de alguna manera el punto $z = 0$, mientras que el modelo \mathbb{H} destaca el punto del infinito.

La transformación de Möbius $z = \frac{w-i}{w+i}$, con inversa $w = i\frac{1+z}{1-z}$, establece una biyección entre el semi-plano y el disco. Los puntos no euclidianos serán así los puntos del semiplano, mientras que las rectas no euclidianas son las semicircunferencias ortogonales al eje real, con centro en el eje real (que no pertenece a ese universo no-euclidiano). Debemos considerar las rectas ortogonales al eje real como rectas no euclidianas también; son las que corresponden a las rectas asintóticas de la Figura 3.2, pues pasan por $w = \infty$.

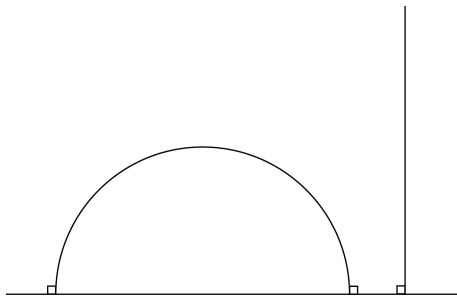


FIGURA 3.3. Rectas en el modelo \mathbb{H}

Teorema 3.1. *Dos puntos no euclidianos determinan una única recta no euclidiana.*

Demostración. Usaremos el modelo del semiplano superior. Sean p y q dos puntos del semiplano. Si ambos puntos tienen igual parte real, están en una recta vertical, que es una recta no euclidiana. Suponemos entonces que esos puntos no están en una misma vertical. Hay entonces una única circunferencia ortogonal al eje real que pasa por esos puntos. Se construye tomando la simetral del segmento euclidiano pq e intersectando con el eje real. Esto determina el centro y luego el radio.

Por otra parte, es fácil ver que dos rectas no euclidianas se intersectan en un punto a lo más, a menos que coincidan. De allí la unicidad. \square

3.1.2 Ángulos y Distancias

Denotaremos por $c(p, q)$ al arco de la circunferencia por p y q que es ortogonal al borde de \mathbb{D} . Para completar las nociones geométricas básicas debemos definir ángulos, distancias y calcular las isometrías. Se define el ángulo entre dos rectas no euclidianas como igual al ángulo euclidiano entre las dos circunferencias. Ésta es a su vez igual al ángulo entre las rectas tangentes, esto es, las rectas ortogonales a los radios.

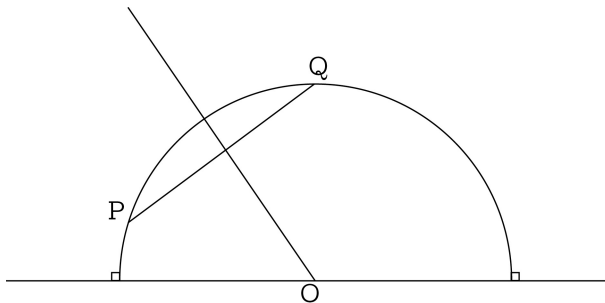


FIGURA 3.4. Una recta por dos puntos

Teorema 3.2. *Sea θ el ángulo entre dos rectas no euclidianas. Entonces*

$$\cos \theta = 2(c, a, b, d) - 1.$$

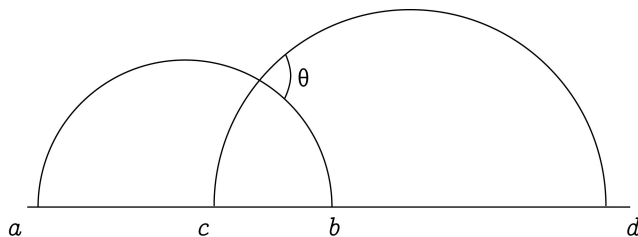


FIGURA 3.5. El ángulo entre dos rectas

Demostración. La transformación de Möbius

$$T(w) = \frac{-w + c}{w - d}$$

lleva \mathbb{H} en \mathbb{H} , la circunferencia de diámetro cd en una recta por $0, \infty$, y la circunferencia de diámetro ab en una circunferencia de diámetro $a'b'$. A su vez, $T(w)$ preserva ángulos y razones cruzadas. Bastará entonces establecer la fórmula en el caso de la Figura 3.6, en que una de las rectas es vertical.

El ángulo θ será igual a $\angle OCD$, y, por trigonometría

$$\cos \theta = \frac{(a' + b')/2}{(b' - a')/2} = \frac{b' + a'}{b' - a'}.$$

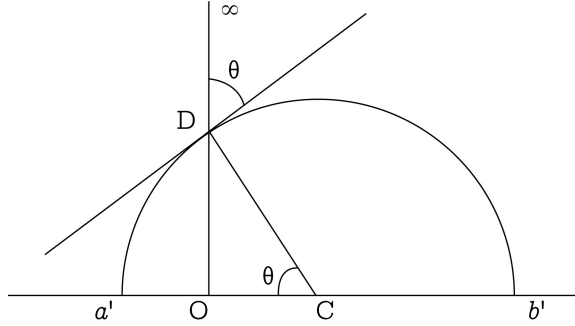


FIGURA 3.6. Coseno de un ángulo

Por otra parte,

$$(0, a', b', \infty) = \frac{b'}{b' - a'},$$

por lo que

$$\cos \theta = 2(0, a', b', \infty) - 1,$$

como se pedía. Observamos, además, que tanto los ángulos como las razones cruzadas son invariantes por transformaciones de Möbius, y así la misma fórmula es cierta en el disco \mathbb{D} .

□

Para definir la distancia entre dos puntos recordamos las principales propiedades de la razón doble:

- i) Cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 pertenecen a una circunferencia (o recta) si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$. Además, los pares z_1, z_2 y z_3, z_4 no se separan si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$.
- ii) Se tiene que $(z_1, z_0, z_3, z_4)(z_0, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Esta afirmación se establece llevando los puntos a $0, 1, \infty, \lambda$ y utilizando la invarianza bajo transformación de Möbius.

Definición 3.3. Sean z_1 y z_2 dos puntos no euclidianos. La circunferencia por z_1, z_2 ortogonal al borde lo intersecta en los puntos z_3 y z_4 , numerados como en la figura.

La distancia no-euclidiana se define por

$$\delta(z_1, z_2) = \log(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Teorema 3.4. Para dos puntos z_1, z_2 en el disco \mathbb{D} se cumple la fórmula

$$\delta(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|,$$

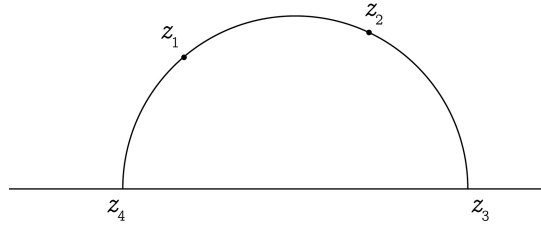


FIGURA 3.7. Distancia no-euclidiana

y, en cambio, para dos puntos z_1, z_2 en el semiplano \mathbb{H} ,

$$\delta(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|.$$

Demostración. Demostramos la fórmula en \mathbb{D} ; la fórmula en \mathbb{H} será consecuencia de la transformación de Möbius entre ambas. Primero, observamos que para $t > 0$, real en \mathbb{D} ,

$$\delta(0, t) = \log \frac{1+t}{1-t},$$

pues

$$(0, t, 1, -1) = \frac{1+t}{1-t}.$$

Luego, para un punto z_2 consideramos la transformación de Möbius de \mathbb{D} en \mathbb{D} dada por

$$f(z) = \lambda \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z},$$

con $|\lambda| = 1$ que vamos a escoger. Se tiene

$$f(z_2) = 0, \quad f(z_1) = \lambda \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1}.$$

Escribimos $\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} = re^{i\theta}$, y escogemos $\lambda = e^{-i\theta}$. Luego $f(z)$, que preserva la razón cruzada, lleva los puntos z_2, z_1 en $0, t$, con $t = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|$, de lo cual se deduce la fórmula. \square

Teorema 3.5. *La distancia así definida satisface las propiedades:*

- i) $\delta(z_1, z_2) \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $z_1 = z_2$;
- ii) $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1)$;
- iii) (desigualdad triangular) $\delta(z_1, z_2) \leq \delta(z_1, z_0) + \delta(z_0, z_2)$. Se tiene igualdad si y solo si z_0 está en el segmento de geodésica que une z_1 y z_2 .

Demostración.

- i) Puesto que los pares de puntos no se separan (ver Figura 3.7), tenemos que $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$. De

$$\left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right| \leq 1$$

se obtiene $(z_1, z_2, z_3, z_4) \leq 1$. Será igual a 1 sólo si ambas razones son 1, en cuyo caso $z_1 = z_2$.

- ii) Si se cambia z_1 con z_2 también cambia la numeración de los puntos z_3 y z_4 . Luego,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_1, z_4, z_3).$$

- iii) Primero, si z_0 pertenece a $c(z_1, z_2)$ entonces

$$(z_1, z_0, z_3, z_4)(z_0, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

y tomando logaritmos se obtiene la igualdad. Para establecer la desigualdad triangular supondremos en \mathbb{D} que $z_0 = 0$ pues podemos usar la transformación

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \text{ como antes. La desigualdad}$$

$$\delta(z_1, z_2) \leq \delta(z_1, 0) + \delta(z_2, 0)$$

se escribe, usando la fórmula del teorema anterior,

$$\log \frac{1+t}{1-t} \leq \log \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|} + \log \frac{1+|z_2|}{1-|z_2|},$$

con

$$t = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{1-t} &= \frac{(1+t)^2}{1-t^2} = \frac{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|)^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \leq \frac{(1 + |z_1 z_2| + |z_2| + |z_1|)^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \\ &= \frac{(1 + |z_1|)^2(1 + |z_2|)^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} = \frac{(1 + |z_1|)(1 + |z_2|)}{(1 - |z_1|)(1 - |z_2|)}, \end{aligned}$$

de donde resulta la conclusión.

□

3.1.3 Las Isometrías

En el disco unitario \mathbb{D} consideramos las transformaciones

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad , \quad |a| < 1 \quad , \quad |\lambda| = 1 .$$

Entonces $|f(z)| < 1$ si $|z| < 1$ y $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. En efecto, $|f(z)| \geq 1$ si y solo si $|z - a|^2 \geq |1 - \bar{a}z|^2$. Esto equivale a $|z|^2 + |a|^2 \geq 1 + |a|^2|z|^2$, o $(1 - |a|^2)(1 - |z|^2) \leq 0$, lo que entrega la conclusión.

La transformación inversa

$$f^{-1}(w) = \lambda^{-1} \frac{w + a\lambda}{1 + (\bar{a}\lambda)w}$$

es de la misma forma; luego tanto f como f^{-1} son biyecciones de \mathbb{D} en \mathbb{D} . Es un ejercicio el demostrar que la compuesta de dos tales transformaciones es de la misma forma. Puesto que son transformaciones de Möbius, preservan la razón doble y, por lo tanto, la distancia no euclidiana. Además preservan los ángulos, tanto en magnitud como en sentido.

Teorema 3.6. *Las transformaciones*

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad , \quad |a| < 1 \quad , \quad |\lambda| = 1$$

constituyen el grupo de isometrías del disco hiperbólico que preservan ángulos en sentido y magnitud. Una transformación

$$f(z) = \lambda \frac{\bar{z} - a}{1 - \bar{a}\bar{z}} \quad , \quad |a| < 1 \quad , \quad |\lambda| = 1$$

es una isometría que invierte el signo de los ángulos y es una reflexión (no euclidiana) en una recta (no euclidiana).

Demostración. Sólo verificamos que una reflexión en una recta es efectivamente de esa forma. Si la recta (no euclidiana) está determinada por dos puntos a y B , usando $f(z)$ llevamos a a 0 y b al intervalo real positivo. La reflexión en el eje real es $\tau(z) = \bar{z}$. Luego, la reflexión en la recta por a y b será $f^{-1} \circ \tau \circ f$ y es inmediato verificar que tiene esa forma. \square

Teorema 3.7. *Una isometría no euclidiana es*

- i) *hiperbólica con puntos fijos en $|z| = 1$;*
- ii) *parabólica con punto fijo en $|z| = 1$;*
- iii) *elíptica con puntos fijos a y $1/\bar{a}$, $|a| < 1$, pero nunca es loxodrómica.*

Demostración. La transformación anterior $f(z)$ fija la circunferencia unitaria. Sabemos que las transformaciones fijan las circunferencias por los puntos fijos en el caso hiperbólico, por el punto fijo en el caso parabólico y ortogonales a las otras en el caso

elíptico. En cambio las transformaciones loxodrómicas no fijan circunferencia alguna. Para demostrar el teorema analíticamente es mejor usar el modelo del semiplano, como lo hacemos a continuación. \square

Teorema 3.8. *Las transformaciones*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con a, b, c, d reales y $ad - bc = 1$ constituyen el grupo de las isometrías que preservan ángulos en el plano hiperbólico \mathbb{H} .

Demostración. Podríamos usar la transformación $(z - i)/(z + i)$ de \mathbb{H} en \mathbb{D} pero preferimos verificar las propiedades directamente. Es claro que $z \rightarrow -1/z$ lleva \mathbb{H} en \mathbb{H} , y entonces escribiendo

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2 z + dc}$$

se obtiene que para a, b, c, d reales, $ad - bc > 0$, esa transformación lleva \mathbb{H} en \mathbb{H} . Dividiendo los coeficientes por $\sqrt{ad - bc}$ llegamos a $ad - bc = 1$. La inversa es

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

que es de igual forma, y la compuesta también lo es.

Con respecto a los puntos fijos, deben satisfacer

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

es decir, son

$$\frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Si $|a + d| > 2$, caso hipérbolico, los puntos fijos son reales. Si $|a + d| = 2$, caso parabólico, el punto fijo es real (o bien ∞ si $c = 0$). Si $|a + d| < 2$, caso elíptico, los puntos fijos son conjugados: p y \bar{p} . La traza es real y luego no es loxodrómico. \square

Teorema 3.9. *Dados dos pares p, q y p', q' con $\delta(p, q) = \delta(p', q')$ en el plano hiperbólico, existe una y solo una isometría tal que*

$$f(p) = p' \quad , \quad f(q) = q'.$$

Dados tres puntos $a < b < c$ y $a' < b' < c'$ en el eje real (o en el círculo $|z| = 1$) existe una y solo una isometría tal que

$$f(a) = a' \quad , \quad f(b) = b' \quad , \quad f(c) = c'.$$

Demostración. Demostramos la primera aserción en el disco \mathbb{D} . Puesto que podemos tomar

$$g(z) = \lambda \frac{z - p}{1 - \bar{p}z}$$

con $|\lambda| = 1$ apropiado de modo que $g(q)$ sea real positivo, y del mismo modo tomamos $h(z)$ para p' y q' , se tiene que $f = h^{-1} \circ g$ lleva p en p' y q en q' . Para demostrar la unicidad, supondremos entonces que f fija 0 y un punto x tal que $0 < x < 1$. Puesto que f debe fijar la circunferencia unidad, ésta debería pasar por los puntos fijos o separados (elíptico); esto es imposible, a menos que sea la identidad.

Demostremos la segunda aserción en el semiplano \mathbb{H} . Bastará construir una isometría tal que

$$f(a) = 0 \quad , \quad f(b) = 1 \quad , \quad f(c) = \infty .$$

Pero

$$f(z) = \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$$

cumple esa condición, tiene coeficientes reales y además

$$-c \frac{b-c}{b-a} + a \frac{b-c}{b-a} = (c-a) \frac{c-b}{b-a} > 0 .$$

La transformación f es única, pues si fija tres puntos es la identidad. \square

3.1.4 Rectas y Circunferencias

Veremos aquí sólo algunas propiedades de circunferencias y rectas no euclidianas, pero dejamos para la sección siguiente un estudio más sistemático de los teoremas no-euclídeos.

Una circunferencia no euclidiana es el lugar geométrico de los puntos z que están a una distancia r de un centro dado z_0 . Esto es

$$\delta(z, z_0) = r .$$

Usando una isometría conveniente podemos llevar z_0 a 0; los puntos z irán a los puntos w tales que

$$\delta(0, w) = \log \frac{1 + |w|}{1 - |w|} = r ,$$

y luego

$$|w| = \tanh(r/2) .$$

El lugar geométrico es entonces una circunferencia euclidiana de radio $\tanh(r/2)$. Si usamos la isometría inversa para regresar a z_0 obtendremos una circunferencia, pero cuyo centro euclidiano no coincide con z_0 . Una circunferencia no euclidiana es entonces una circunferencia euclidiana, ortogonal a todas las rectas no euclidianas que pasan por z_0 (Figura 3.8).

Dada una recta (no-euclidiana) y un punto en ella, habrá una sola recta que forme un ángulo prescrito en el punto. Bastará llevar el punto a 0 por una simetría y tomar dos radios que formen el ángulo dado α , y luego usar la isometría inversa. Esto es cierto en particular si $\alpha = \pi/2$. Por otra parte, si el punto z_0 no pertenece a la recta

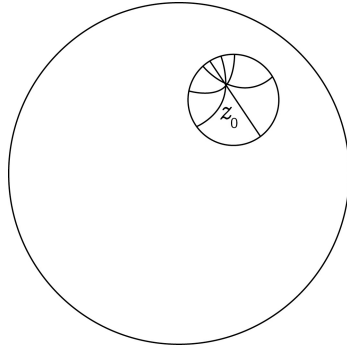


FIGURA 3.8. Una circunferencia no euclidiana

dada l , hay una sola recta que pasa por z_0 que es ortogonal a l . Esa recta es ortogonal a l en un punto z_1 tal que

$$\delta(z_0, z_1) \leq \delta(z_0, z), \quad z \in l.$$

En efecto, podemos tomar $z_0 = 0$. El punto z_1 a menor distancia del centro será el que tenga módulo menor y, por lo tanto, pertenece al radio ortogonal a l (Figura 3.9).

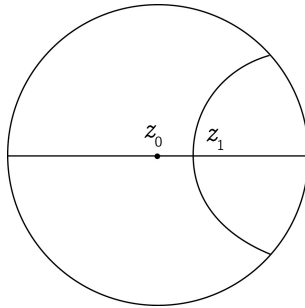


FIGURA 3.9. Distancia menor

Teorema 3.10. *El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados es la recta ortogonal (en el punto medio a la recta por los puntos).*

Demostración. Podemos llevar el punto medio z_0 al origen, llevando un punto z_1 a $t > 0$ y z_2 a $-t$ (Figura 3.10).

Consideremos la isometría (que invierte ángulos)

$$\tau(z) = -\bar{z},$$

lleva t en $-t$ y fija los puntos del eje imaginario. Un punto de ese eje equidista entonces de t y de $-t$. Si ahora p es un punto con $\delta(t, p) = r$, la circunferencia de centro t y radio

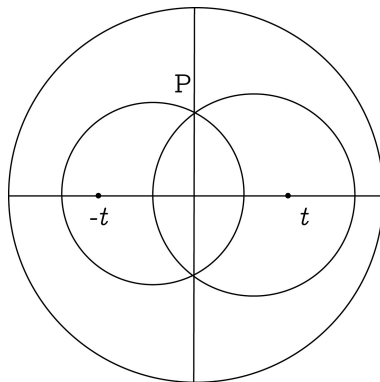


FIGURA 3.10. La simetral de un segmento

r contiene todos los puntos a igual distancia. La imagen por τ de esa circunferencia es la circunferencia de igual radio y centro $-t$. Ambas se intersectan en dos puntos en el eje imaginario y son los únicos dos puntos tales que $\delta(t, p) = \delta(-t, p)$. \square

Ejercicios 3.11.

1. Si $z_0 = 0$ es un punto en el disco \mathbb{D} y L es una recta no euclidiana que no contiene z_0 , dibuje el haz de rectas por z_0 que no intersectan a L .
2. Sean is, it dos puntos en \mathbb{H} en el eje imaginario.
 - a) Calcule la distancia entre ellos.
 - b) Demuestre que si $s \rightarrow 0$ la distancia va a infinito.
 - c) Encuentre el punto medio entre ambos.
3. a) Demuestre que una isometría que preserva ángulos en \mathbb{D} se puede escribir

$$f(z) = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p}, \quad p\bar{p} - q\bar{q} = 1.$$

- b) Si $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d reales, $ad - bc = 1$ demuestre que $p = \frac{a+d}{2} + i\frac{c-b}{2}$, $q = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}$.
4. Escriba la fórmula para una rotación de orden n en \mathbb{H} que fije i . En particular, escriba las fórmulas para $n = 2, 3, 4$.
5. Demuestre que las semirectas euclidianas $y = kx, y = -kx$ son el lugar geométrico de los puntos a una distancia dada del semieje imaginario. Dibuje ese lugar geométrico para una recta no euclidiana en \mathbb{D} .
6. Sean p_0 un punto al infinito (en el borde). Encuentre las circunferencias ortogonales a las rectas no euclidianas por p_0 .
7. Sean l_1 y l_2 dos rectas no euclidianas que no se intersectan.
 - a) Demuestre que existe una única recta ortogonal a ambas.

- b) Muestre cómo medir la distancia entre dos rectas l_1 y l_2 .
- 8. Dibuje las figuras 8,9 y 10 en \mathbb{H} en vez de \mathbb{D} .
- 9. Demuestre que por un punto z_0 fuera de una recta l hay dos rectas que pasan por z_0 que forman un ángulo dado θ con l .
- 10. Sea l el semieje imaginario y z en \mathbb{H} .
 - a) Demuestre que el punto en l a menor distancia de z es $i|z|$.
 - b) Si $\theta = \text{Arg}(z)$ y $\delta(z, l)$ es esa menor distancia, entonces $\cosh \delta(z, l) = 1/\sin \theta$.
- 11. **Distancia en \mathbb{H} .** Si z, w son dos puntos en \mathbb{H} , entonces
 - a) $\tanh(\frac{1}{2}\delta(z, w)) = \frac{|z-w|}{z-\bar{w}}$;
 - b) $\cosh \delta(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}$.

3.2 Comparación entre la Geometría Euclidiana y la Hiperbólica

En esta sección presentamos una serie de actividades elementales obtenidas usando un software, las cuales permiten explorar y repasar las propiedades básicas de la geometría no-euclidiana. Usaremos el software *Cinderella*, pero lo mismo puede ser hecho con el software de libre disposición <http://cs.unm.edu/~joel/nonEuclid/>, o con el software comercial *Cabri*.

3.2.1 Actividad 1: Medir Ángulos y Áreas

Al cargar el programa Cinderella aparece una pantalla como en la Figura 3.11. Observe que abajo a la derecha hay tres opciones de geometrías; si es primera vez que utiliza usted un software de naturaleza geométrico, familiarícese primero marcando *Euc* y luego colocando las flechas sobre los distintos íconos de arriba. Aparecen explicaciones de cómo proceder en cada caso.

Seleccione ahora *Hyp* (abajo a la derecha) y luego en *Vistas* (arriba al medio) seleccione *Vista hiperbólica*. Tiene entonces a su vista el modelo de Poincaré en el disco unitario en la Figura 3.13.

En *Modos* se recobran los principales elementos constructivos. Escoja allí *Línea | por dos puntos* y dibuje entonces un triángulo hiperbólico de vértices A, B, C y lados por rectas a, b, c . (Desafortunadamente la recta a no es la recta por BC .) Vamos a medir los ángulos internos; en *Formato* fije *Ángulo radio* para medir ángulos en radianes. Luego vuelva a *Modos* y escoja *Medir | ángulo*. Con el cursor marque ahora dos rectas para medir el ángulo entre ellas. Observe que se miden los ángulos en el sentido positivo usual, contrario a los punteros del reloj. Así, es distinto marcar a y luego b , que b y luego a .

(El ángulo entre dos arcos de circunferencia es igual al ángulo entre sus rectas tangentes en el punto.)

En *Modos | Mover* puede ahora arrastrar con el cursor un vértice del triángulo, obteniéndose todos los triángulos que uno quiera. En la Figura 3.13 se ha movido el vértice C hacia el borde; en el borde mismo el ángulo es 0. En la Figura 3.15 se ha dibujado un cuadrilátero con sus ángulos.

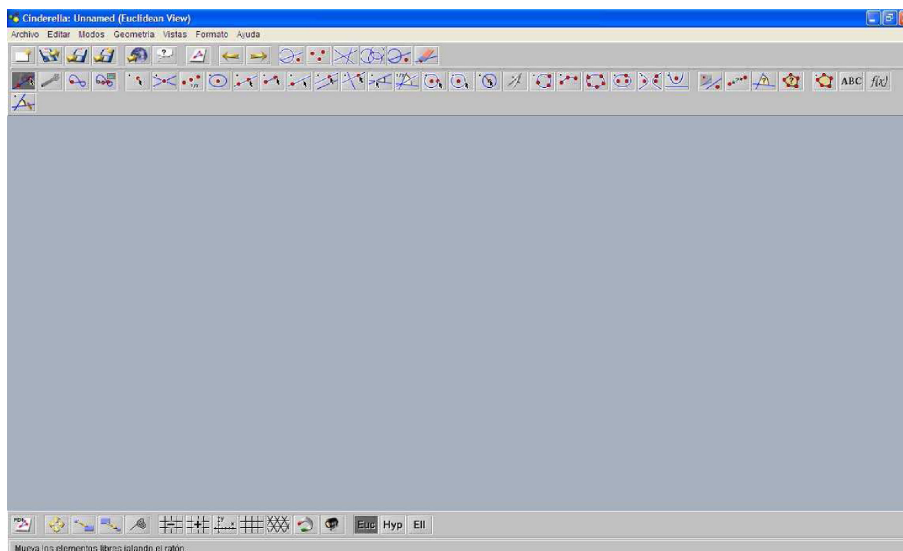


FIGURA 3.11. Inicio de Cinderella

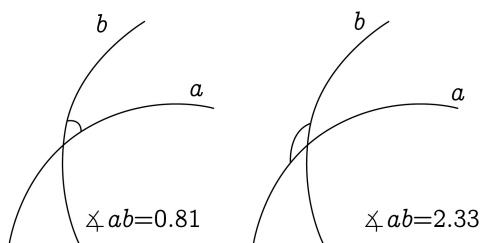


FIGURA 3.12. Medida de ángulo

En realidad hemos obtenido algo más que la medida de los ángulos. Como veremos en la siguiente unidad, se tiene esta fórmula para el área hiperbólica de un polígono de n lados:

$$A = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k .$$

Así entonces

Figura 2 : $A = \pi - (0,83 + 0,58 + 0,9) = 0,83$;

Figura 3 : $A = \pi - (0,66 + 0,63 + 0,13) = 1,72$;

Figura 4 : $A = 2\pi - (1,08 + 1,05 + 0,7 + 0,87) = 2,58$.

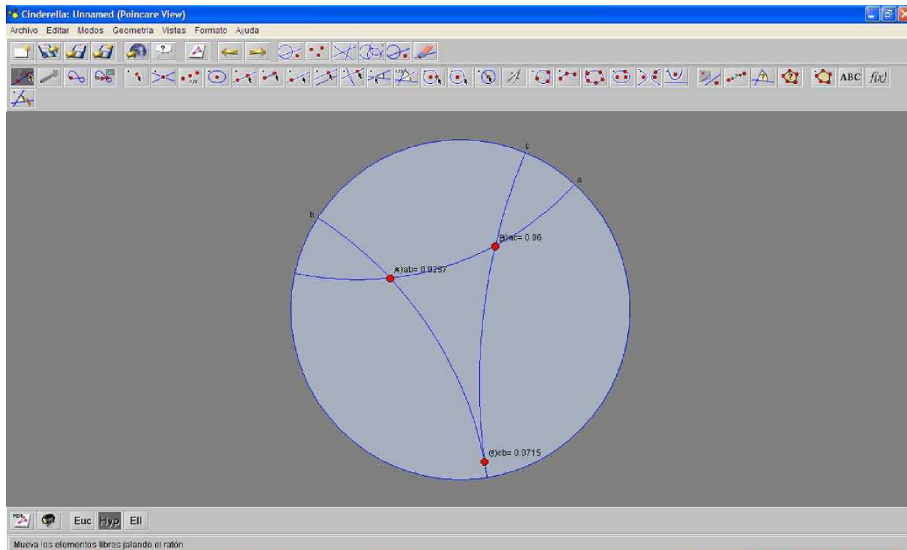


FIGURA 3.13. Un triángulo hiperbólico

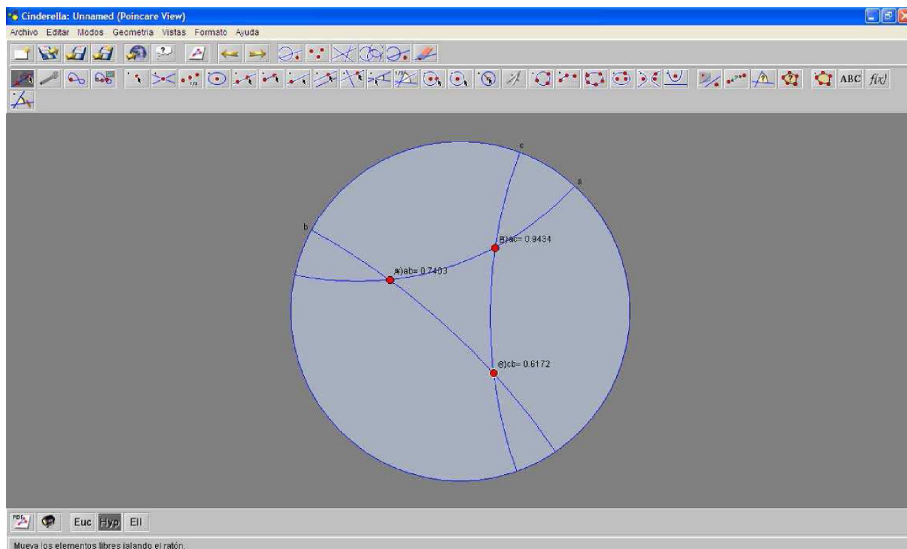


FIGURA 3.14. Un vértice que tiende al infinito

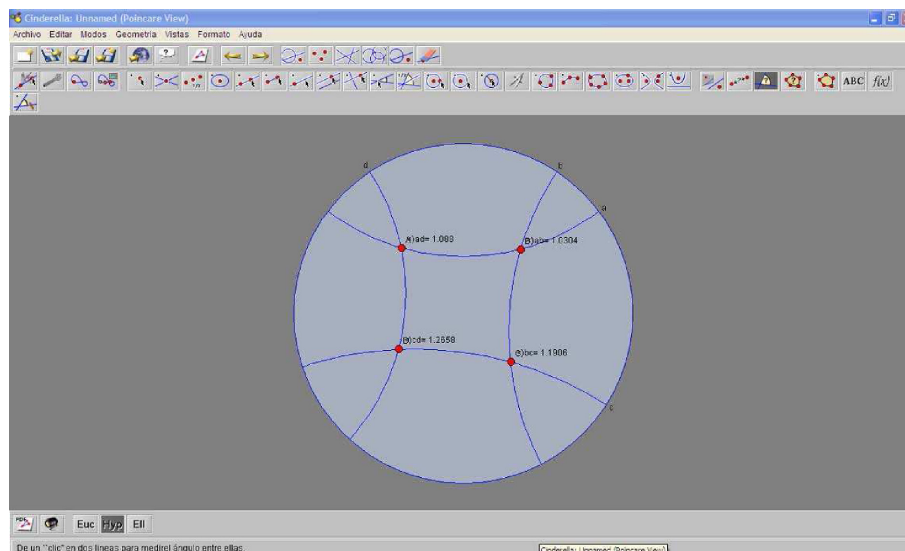


FIGURA 3.15. Un cuadrilátero hiperbólico

3.2.2 Actividad 2: Construcciones de Triángulos

Recordamos los principales teoremas de congruencia en geometría euclidiana:

LLL : si dos triángulos tienen tres lados iguales;

LAL : si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales;

ALA : si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado comprendido iguales.

Se puede plantear cada uno de ellos como una construcción: dados los lados a, b, c de un triángulo, construirlo. Si la solución es única, esto equivaldrá al primer teorema de congruencia.

- Construcción *LLL* : Dibuje tres segmentos AB, CD, EF . Escoja *Modos* | *Círculo* | *Compás* y marque sucesivamente los vértices A, B y el centro E . Luego dibuje otra circunferencia con radio C, D y centro F . Dibujando un segmento en cualquier lugar y luego arrastrarlo para construir los segmentos EH y FH dará el resultado en la Figura 3.16. El resultado es único, pues reflejando en la recta EF se obtiene la otra solución posible, congruente por lo tanto (tal como en geometría euclidiana).

- Construcción *LAL* : Dados dos segmentos DE y FG se dibuja un ángulo tomando dos rectas AB, AC . Con el compás se dibuja una circunferencia de radio DE y otra circunferencia de radio FG . Los puntos de intersección determinan el triángulo AHK . La solución es única pues siempre podemos mover el vértice del ángulo dado al punto A y los lados a las rectas AB, AC , utilizando transformaciones de Möbius en este

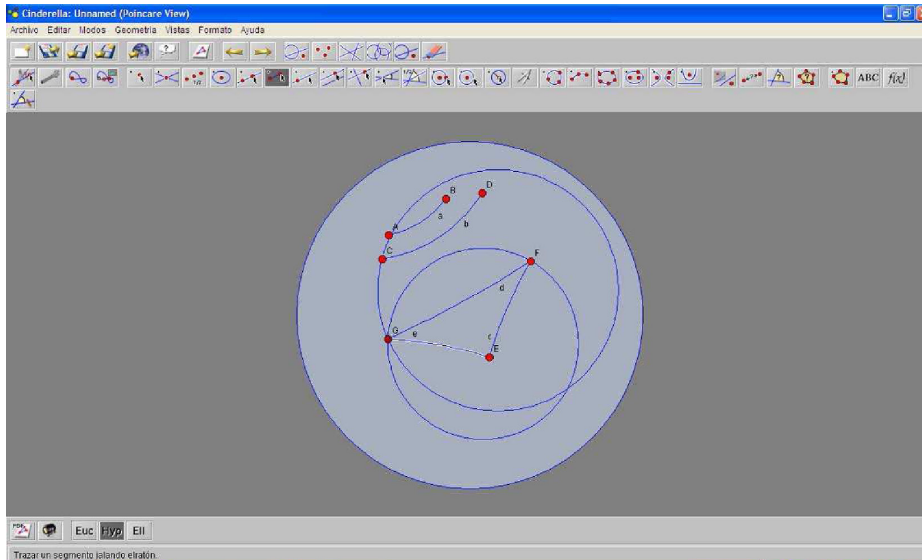


FIGURA 3.16. Construir un triángulo dados sus tres lados

caso. La construcción es igual a la de la geometría euclidiana. El resultado está en la Figura 3.17.

- Construcción *ALA* : Dado un segmento EF dibujamos un ángulo dado trazando una recta AB con $A = E$ y un segundo ángulo dado con una recta CD con $C = F$. El punto de intersección de ambas rectas, si lo hay, determina el triángulo como en la Figura 3.18.

En geometría de Euclides dos triángulos pueden tener ángulos iguales sin ser congruentes. En geometría hiperbólica esto no ocurre.

Teorema 3.12. *Si dos triángulos hiperbólicos tienen ángulos iguales entonces son congruentes.*

Demostración. Lo establecemos en el semiplano superior donde colocamos el vértice A en i y el lado AB en el semieje imaginario. Puesto que α se supone dado ello determina los puntos a, b en la Figura 3.19.

Debemos encontrar c, d como en la figura tales que γ y β tengan los valores dados. Por las fórmulas para el coseno del ángulo se obtienen las dos ecuaciones

$$\frac{c-b}{a-b} \frac{a-d}{c-d} = \frac{\cos \gamma + 1}{2},$$

$$\frac{d}{d-c} = \frac{\cos \beta + 1}{2}.$$

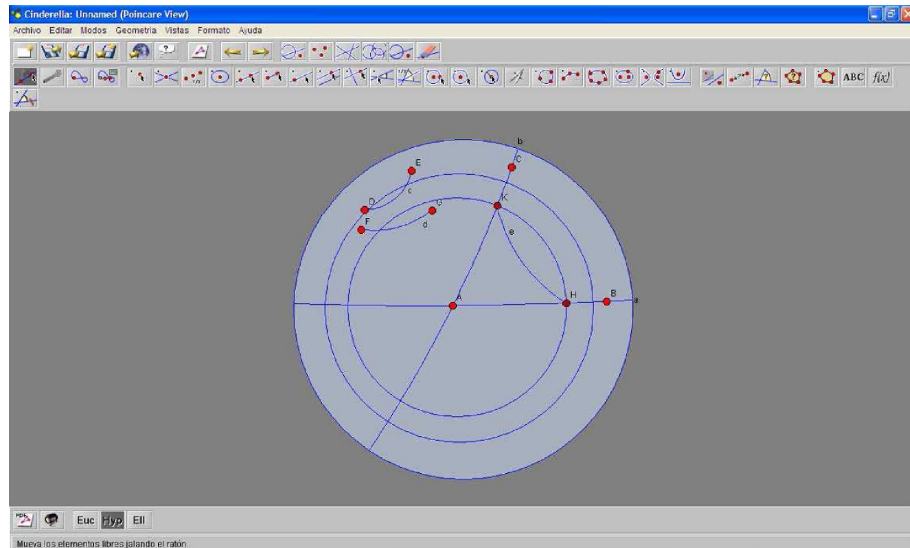


FIGURA 3.17. Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido

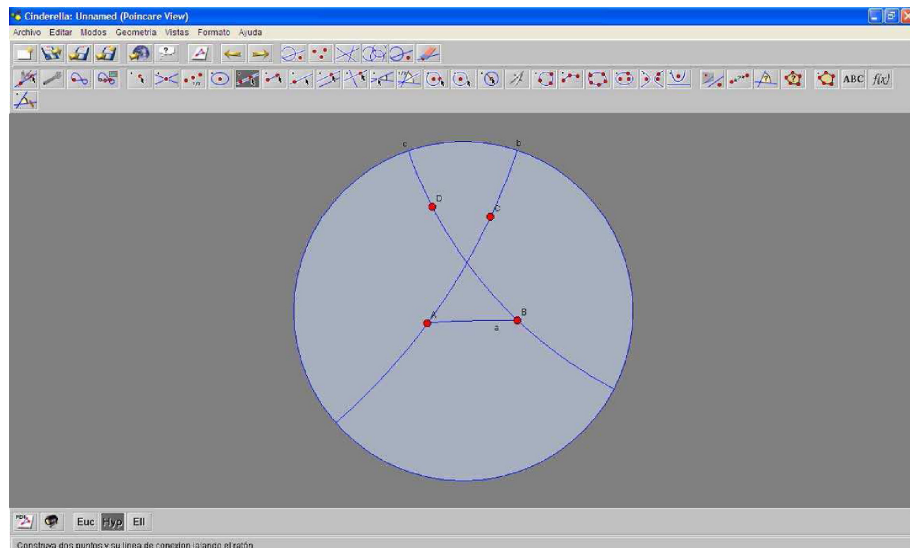


FIGURA 3.18. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y el lado comprendido

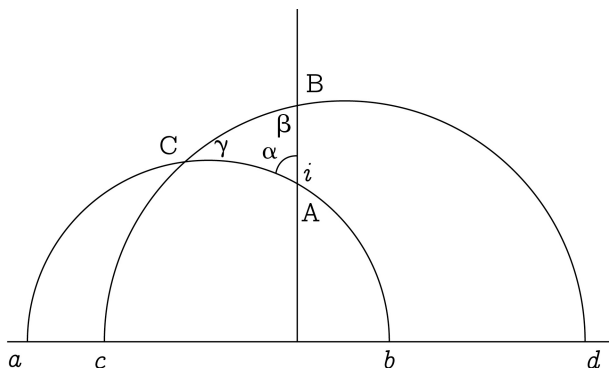


FIGURA 3.19. Área de un triángulo

Esto dará una ecuación de segundo grado para d y, por ende, dos soluciones. Para ver que hay solo una solución, observemos que la segunda ecuación determina la razón

$$\frac{d}{c} = \frac{\cos \beta + 1}{\cos \beta - 1}.$$

Si β está dado, esto dice que todas las geodésicas con igual ángulo con el eje imaginario tienen extremos (kc, kd) . El área del triángulo es estrictamente creciente en función de k y luego habrá un solo triángulo con área $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ dada. \square

3.2.3 Actividad 3: Rectas y Puntos Notables en un Triángulo

• Sabemos que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados, es la perpendicular en el punto medio de esos dos puntos. Se sigue que la intersección de las dos simetrales de segmentos AB y BE es un punto que equidista de A, B y E : es, por tanto, centro de una circunferencia que pasa por esos tres puntos. A su vez este centro L estará en la simetral del segmento AE pues equidista de A y E . Para efectuar la construcción con Cinderella procedemos como sigue:

- i) *Modos Punto Punto Medio*: Tres veces dibuja los vértices de un triángulo y puntos medios de los lados.
- ii) *Línea Por dos puntos*: Dibuja los lados del triángulo.
- iii) *Línea Definir Perpendicular*: Dibuja las tres simetrales de los lados.
- iv) *Mover*: Moviendo los vértices se verifica que siempre las simetrales pasan por el mismo punto.
- v) *Círculo Por dos puntos*: Dibuja la circunferencia circunscrita (Figura 3.20).

• Construimos las transversales de gravedad, esto es, las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos.

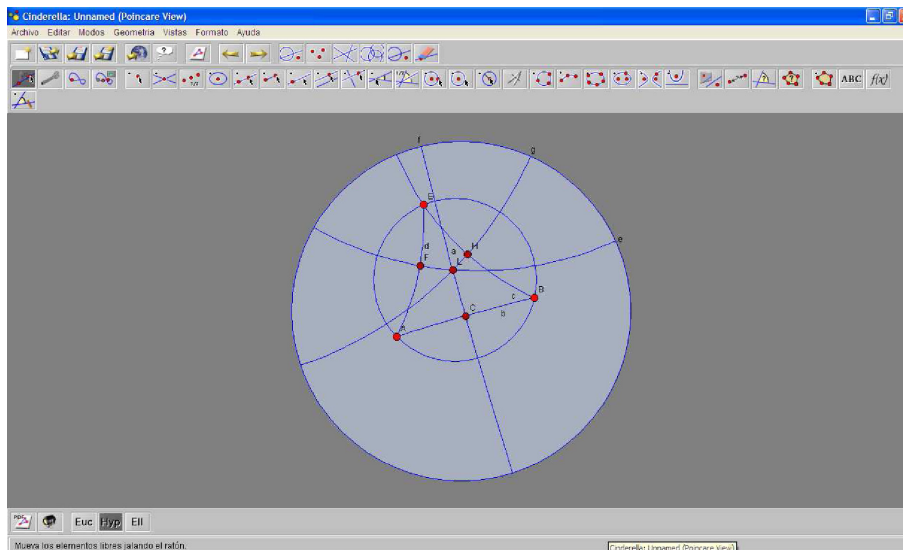


FIGURA 3.20. Simetrales y la circunferencia circunscrita al triángulo ABE

- i) *Punto – Punto Medio*: Tres veces para obtener el triángulo y los puntos medios de los lados.
 - ii) *Graficación Segmento*: Permite dibujar los tres lados y las tres transversales.
 - iii) *Mover*: Moviendo los vértices del triángulo se observa que, tal como en geometría euclidiana, las tres transversales pasan por un mismo punto. Para demostrar este teorema esperaremos, sin embargo, el capítulo siguiente donde se desarrolla la trigonometría hiperbólica (ver Figura 3.20).
- Construimos las tres alturas de un triángulo.
 - i) *Línea – Por dos puntos*: para los lados y vértices del triángulo ABC .
 - ii) *Línea – Definir perpendicular*: traza las alturas.
 - iii) *Mover*: Moviendo los vértices se observa que siempre las tres alturas pasan por un mismo punto (ver Figura 3.21).
 - Trazamos los tres lados de un triángulo y las bisectrices.
 - i) *Línea – Por dos puntos*: para los lados del triángulo.
 - ii) *Línea – Bisectriz*: para las bisectrices.

El punto D , intersección de dos bisectrices, equidista de los tres lados del triángulo. En efecto, una reflexión en la bisectriz lleva un lado del ángulo en el otro, y una perpendicular desde un punto de la bisectriz a la perpendicular por el mismo punto al otro lado: la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico

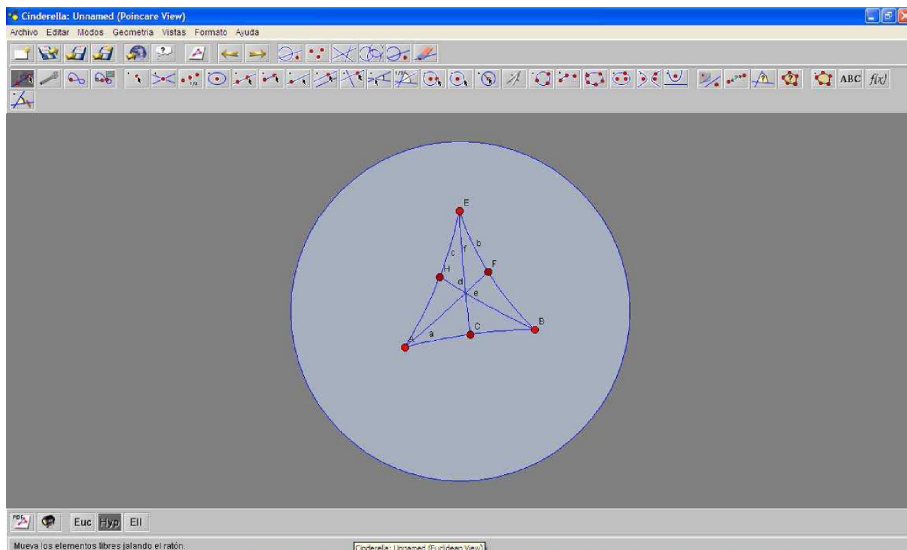


FIGURA 3.21. Transversales y el centro de gravedad del triángulo ABE

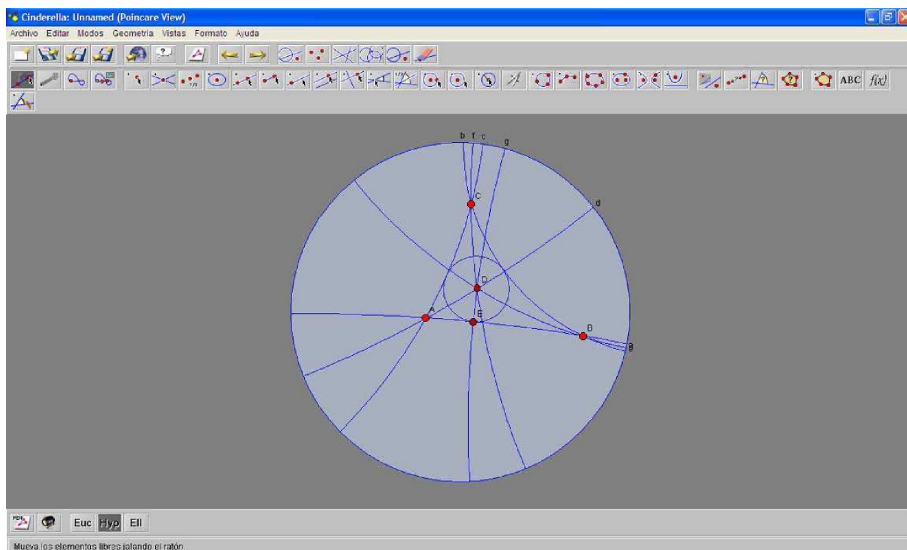


FIGURA 3.22. Alturas y el ortocentro del triángulo ABC

de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. El punto D pertenecerá a la tercera bisectriz también.

- iii) *Línea – Definir perpendicular*: traza la perpendicular desde D al lado AB .
- iv) *Punto – Punto único*: define la proyección E .
- v) *Círculo – Por dos puntos*: traza la circunferencia inscrita al triángulo ABC (ver Figura 3.23).

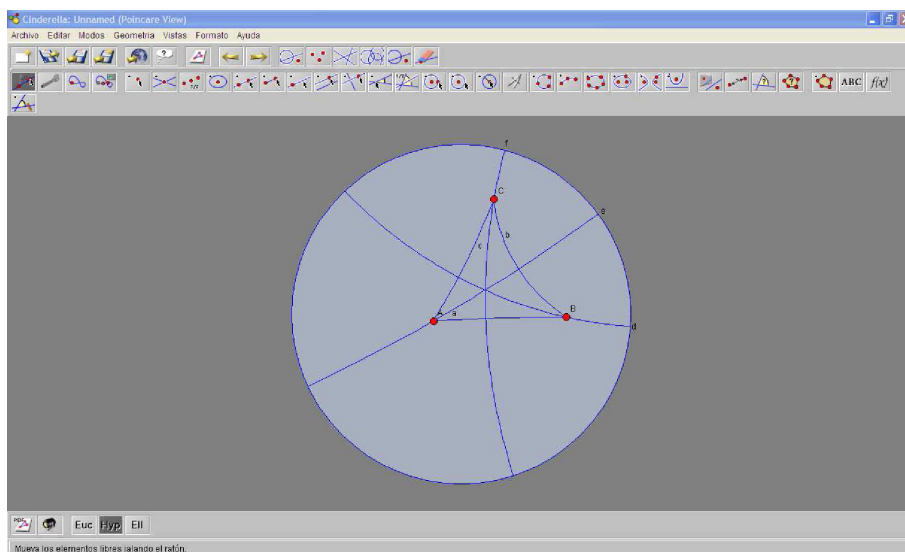


FIGURA 3.23. Bisectrices y la circunferencia inscrita al triángulo ABC

3.2.4 Actividad 4: Sistema de Coordenadas

Si quisieramos definir un sistema de coordenadas de manera similar al caso de las coordenadas cartesianas, podríamos escoger dos ejes ortogonales por el origen y luego tomar las rectas perpendiculares a los ejes a distancias 1, 2, 3,...

Al dibujar esto con Cinderella obtendremos la Figura 1.23. Hay allí una sorpresa, pues esas rectas no se intersectan necesariamente. La cuarta perpendicular a la derecha no intersecta a la tercera horizontal, por ejemplo. De hecho, como luego calcularemos usando trigonometría, las rectas más lejanas que puedan intersectarse en la diagonal corresponden a un punto $P = 0,8358$. Más allá no se intersectan.

Una estrategia distinta es considerar desde un punto B cualquiera, las dos perpendiculares BC y BD a los ejes de coordenadas. Las longitudes no euclidianas BC y BD serán entonces las coordenadas cartesianas del punto B . Estas longitudes no son iguales a AC o AD , sin embargo, (ver Figura 3.24). Dado B obtenemos así dos

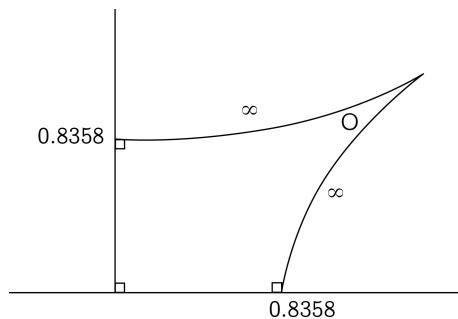


FIGURA 3.24. Las últimas perpendiculares

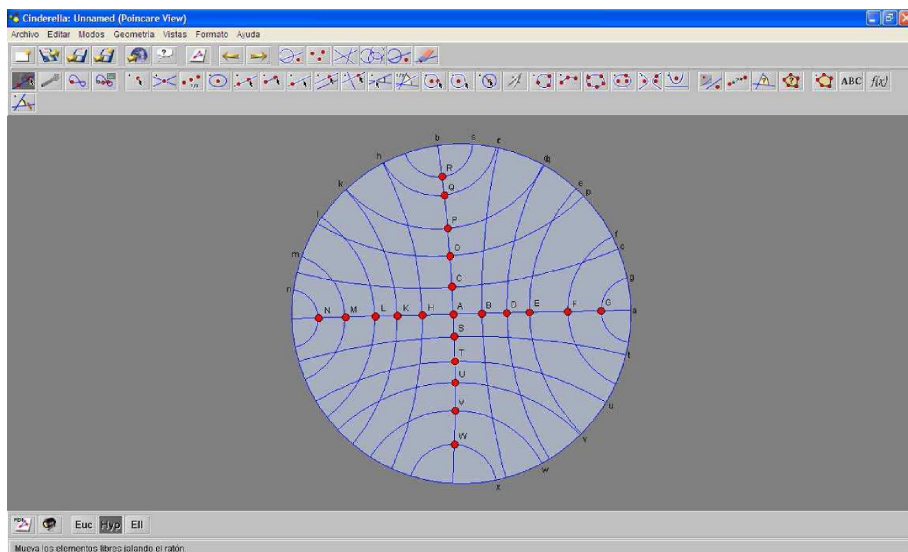


FIGURA 3.25. Rectas “cartesianas” que no se intersectan

números (x, y) pero dados estos números necesitaremos nuevamente fórmulas trigonométricas para poder calcular los puntos necesarios C y D . El resultado es que esas coordenadas varían en la región limitada por las hipérbolas como en la Figura 3.26.

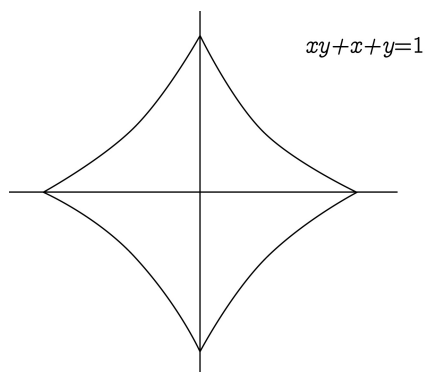
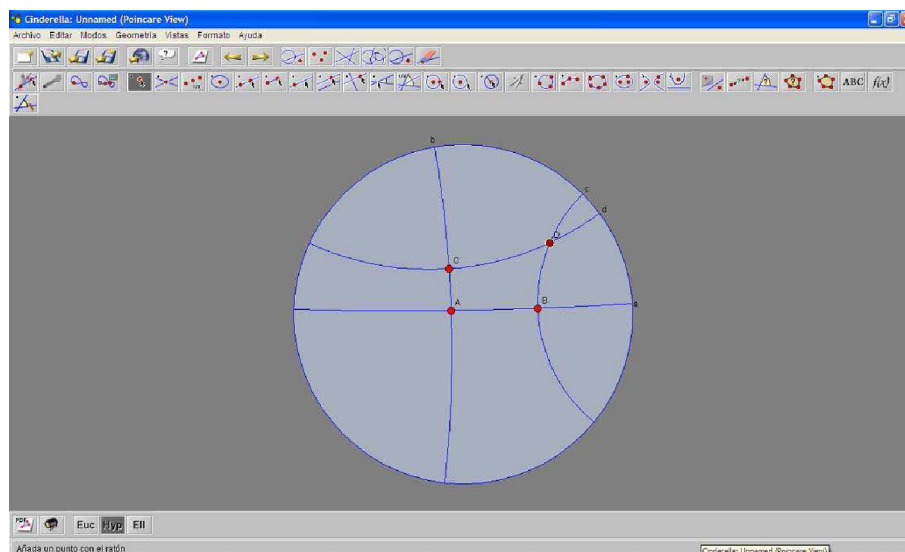


FIGURA 3.26. Rango de las coordenadas cartesianas

FIGURA 3.27. Coordenadas cartesianas de B

3.3 Longitudes y Áreas

3.3.1 El Elemento de Longitud

Recordemos que en la geometría euclidiana el elemento de longitud de una curva es $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (o $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ si piensa en poligonales). Acá no hay *cerros*, y todos los elementos de arco son iguales en todo punto y en cualquier dirección. En términos matemáticos, el poner *cerros* equivale a decir que el nuevo

elemento de arco puede variar de punto en punto, es decir, el nuevo elemento de arco puede ser de la forma $\lambda(p)ds$, donde $\lambda(p)$ es una función positiva que depende del punto p donde se esté. Un caso sencillo sería decir $\lambda(p) = 2$, lo que resultaría en duplicar todo largo euclídeo (tal como lo haría una homotecia de factor 2). Las geometrías de interés son aquellas en que la función $\lambda(p)$ varía con p . Así, resultará más costoso pasar por los lugares donde $\lambda(p)$ sea muy grande, y habrá que evitárseles para obtener un camino corto. A la vez, resultará conveniente pasar por lugares donde $\lambda(p)$ sea pequeño. Queda en evidencia cómo el cambiar la manera de medir (largos en este caso) afecta la geometría (de los caminos más cortos). Como mencionamos al comienzo del capítulo, en el modelo del disco \mathbb{D} para la geometría de Poincaré, se hará el elemento de largo muy grande a medida que nos acercamos al borde; en el modelo de \mathbb{H} significará hacer el elemento de largo muy grande a medida que nos acercamos su borde $y = 0$. Existen muchas maneras de hacer tal elemento de largo grande cerca de $y = 0$, por ejemplo, podría ser ds/y^n para cualquier exponente $n \in \mathbb{N}$. Con esto, el nuevo elemento de largo efectivamente se hace cada vez mayor si se le considera en puntos (x, y) del semiplano superior cuya coordenada y es próxima a cero. Entre todas las posibilidades de nuevos elementos de largo debemos escoger aquella que sea consistente con la función distancia (o largo de camino más corto) conocida. Sabemos por el ejercicio 11 de la Sección 3.1 que, en el semiplano superior, la distancia entre los puntos ia, ib es igual a $\log(b/a)$ si $b > a$. Esto es igual a

$$\int_a^b \frac{dy}{y} = \int_\gamma \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} \quad , \quad \gamma(t) = it \quad , \quad t \in [a, b] \quad ,$$

lo que nos lleva a considerar el nuevo elemento de longitud como $|dz|/y$ (acá hemos reemplazado ds por su representación compleja $|dz|$).

Para una curva cualquiera su longitud hiperbólica es

$$L(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt \quad .$$

El largo de una curva γ ha sido alterado de su habitual $\int_\gamma |dz|$ introduciendo el factor $\text{Im}(z)$ en el denominador. Este factor varía con el punto, afectando de manera opuesta si la curva está cerca o lejos del eje real $\text{Im}(z) = 0$.

Teorema 3.13. *El elemento de longitud $ds = |dz|/\text{Im}(z)$ es invariante por las transformaciones de Möbius que llevan el semi-plano en sí mismo.*

Demostración. Las transformaciones son $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ con a, b, c, d reales y $ad - bc > 0$, son compuestas de traslaciones, dilataciones, inversiones. Para una traslación $t(z) = z + a$, $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{|dt(z)|}{\text{Im}(t(z))} = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} \quad ,$$

y lo mismo se cumple para una dilatación $f(z) = kz$, $k > 0$. Para la inversión $g(z) = -1/\bar{z}$ tenemos

$$\frac{|dg(z)|}{\operatorname{Im}(g(z))} = \frac{1}{|z|^2} \frac{|dz|}{\frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right)} = \frac{|dz|}{\frac{1}{2i}(z - \bar{z})} = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}.$$

□

Corolario 3.14. *El elemento de longitud en el disco es*

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Demostración. Es claro usando $z = \frac{u-i}{u+i}$, $\operatorname{Im}(u) > 0$. □

Corolario 3.15. *La geodésica que une dos puntos es el arco de recta hiperbólica (circunferencia ortogonal al borde).*

Demostración. Sea $\gamma(t)$ una curva cualquiera en el semiplano que una ia con ib . Entonces

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{|x'(t) + iy'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

Como ejemplo, podemos calcular la longitud de una circunferencia hiperbólica.

Teorema 3.16. *El valor de la longitud de una circunferencia de radio (hiperbólico) r es $2\pi \sinh(r)$.*

Demostración. Usaremos el modelo del disco de Poincaré con la circunferencia centrada en el origen. Si R es el radio euclidiano entonces

$$r = \log \frac{1+R}{1-R}, \quad R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}.$$

Luego

$$R = \frac{e^{r/2} - e^{-r/2}}{e^{r/2} + e^{-r/2}} = \frac{\sinh(r/2)}{\cosh(r/2)}.$$

La longitud hiperbólica de la curva $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{2R d\theta}{1 - R^2} = 2\pi \frac{2R}{1 - R^2} = 2\pi \frac{\sinh(r/2)}{\cosh(r/2)} = 2\pi \sinh(r).$$

□

3.3.2 El Elemento de Área

Haciendo la analogía entre elemento de largo y elemento de área, se define el elemento de área hiperbólica en el semiplano

$$dw = \frac{dx dy}{y^2}.$$

En cambio en el disco se tendrá

$$dw = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dx dy.$$

Teorema 3.17. *El área de un círculo de radio r es igual a $4\pi \sinh^2(r/2)$.*

Demostración. En el disco,

$$\begin{aligned} A &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{4\rho d\rho d\theta}{(1 - \rho^2)^2} = \frac{4\pi R^2}{1 - R^2}. \end{aligned}$$

Puesto que $R = \sinh(r/2) \cosh(r/2)$ el resultado sigue. \square

Consideramos ahora un triángulo hiperbólico de vértices A, B, C y ángulos α, β, γ (medidos en radianes).

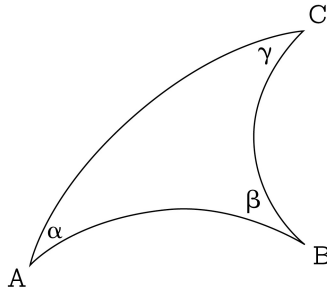


FIGURA 3.28. Triángulo hiperbólico

Teorema 3.18. *El área de un triángulo hiperbólico es igual a $A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. La suma de los ángulos es, por lo tanto, menor que π .*

Demostración. En el semiplano consideramos primero un triángulo con un ángulo $\alpha = 0$. Podemos suponer que $C = \infty$ y luego por una traslación y dilatación que A y B están en la circunferencia $|z| = 1$. Entonces

$$A = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - \alpha.$$

Usando el modelo del disco vemos que esto implica que para $\gamma = 0$ y α, β arbitrarios se tendrá

$$A = (\pi - \alpha) - (\pi - (\pi - \beta)) = \pi - (\alpha + \beta).$$

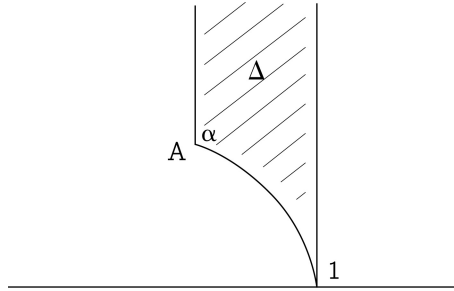


FIGURA 3.29. Un ángulo cero

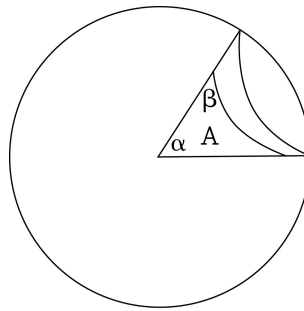


FIGURA 3.30. Área

y luego

$$A = \pi - (\alpha + \gamma + \delta) - (\pi - (\pi - \beta + \delta)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

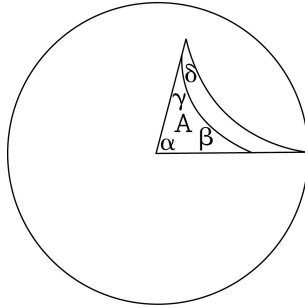


FIGURA 3.31. Caso general

Corolario 3.19. *El área de un polígono de n lados y ángulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es igual a*

$$(n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Demostración. Para un polígono convexo (en el sentido hiperbólico), desde un vértice trazamos $n-3$ diagonales dividiendo al polígono en $(n-2)$ triángulos. En cada uno de ellos usamos la fórmula del teorema y luego sumamos. Si a un polígono convexo le agregamos un triángulo, obteniéndose un polígono que puede no ser convexo, n aumenta en uno y los ángulos y áreas se suman. La fórmula se generaliza entonces a cualquier polígono. \square

3.3.3 El Teorema de Pitágoras

Sea ABC un triángulo rectángulo en C con catetos hiperbólicos a, b e hipotenusa c . Entonces

$$\cosh a \cosh b = \cosh c.$$

Demostración. Por un movimiento no euclidiano podemos suponer, en el disco \mathbb{D} , que c está en el origen, $A = x$, $x > 0$ y $B = iy$, $y > 0$.

Puesto que

$$a = \log \frac{1+y}{1-y}, \quad b = \log \frac{1+x}{1-x}, \quad c = \log \frac{1+t}{1-t},$$

con $t = \left| \frac{x-iy}{1+ixy} \right|$, obtenemos

$$\cosh a = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \quad \cosh b = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad \cosh c = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Dado que $t^2 = \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2}$, la fórmula de Pitágoras se reduce a una identidad algebraica sencilla de ser verificada. \square

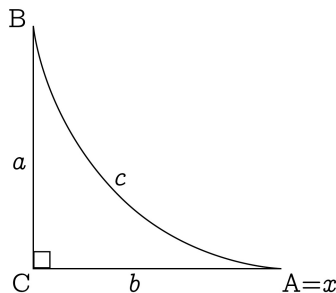


FIGURA 3.32. Pitágoras

3.3.4 El Ángulo de Paralelismo

Por un punto P fuera de una recta hiperbólica L pasan infinitas rectas paralelas a L . Sin embargo, podemos distinguir dos de entre ellas: son las que pasan por P e intersectan a L en el borde y son tangentes allí. Se llama ángulo de paralelismo el ángulo φ formado por una de esas rectas y la perpendicular desde P a la recta L . En el semiplano podemos suponer que L es la semicircunferencia $|z| = 1$ y que P está situado en el semieje imaginario.

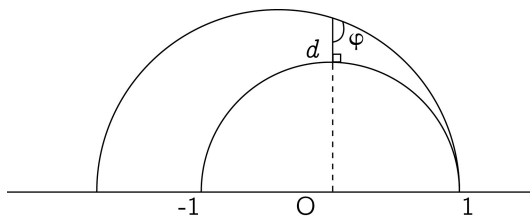


FIGURA 3.33. El ángulo de paralelismo

Teorema 3.20. Si d es la distancia de P a L entonces

$$\tan \varphi = \frac{1}{\sinh d}.$$

Demostración. Si x es el centro de la circunferencia por P y r su radio (euclidiano), entonces

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = 1 + x.$$

De esto se obtiene

$$y = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi},$$

y puesto que $d = \log y$ tenemos

$$e^d - e^{-d} = y + \frac{1}{y} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 - \cos \varphi} - \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{2}{\tan \varphi}.$$

□

Ejercicios 3.21.

1. Demuestre que en coordenadas polares en \mathbb{D} se tiene

$$ds = 2 \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{1 - r^2},$$

$$dw = \frac{4r}{(1 - r^2)} dr d\theta.$$

Deduzca las fórmulas para la longitud y área de una circunferencia.

2. Muestre que no todos los triángulos tienen una circunferencia circunscrita.
3. Sea $\triangle ABC$ isósceles con AB y AC iguales, $\alpha = \pi/2$. Muestre que la longitud de la altura AD satisface

$$AD < \cosh^{-1}(\sqrt{2}) \simeq 0,881.$$

4. Muestre cómo construir las dos rectas tangentes desde un punto exterior a una circunferencia dada.
5. Utilizando la fórmula del área de un triángulo demuestre que si dos triángulos hiperbólicos tienen ángulos iguales, entonces son congruentes.
6. En un triángulo de ángulos $\alpha, 0, 0$ demuestre que el radio de la circunferencia inscrita satisface

$$4 \tanh^2(R) = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha).$$

Capítulo 4: Apéndice: Trigonometría



En el análisis de problemas geométricos se utilizan métodos diferentes, ya sea razonamientos sintéticos como en Euclides, o bien con geometría analítica o también con trigonometría. En este capítulo presentamos una visión completa de la trigonometría válida para las tres geometrías: la de Euclides o plana, la esférica y la hiperbólica. Veremos cómo, con métodos semejantes, se pueden demostrar teoremas válidos en cualquiera de ellas, como el Teorema de Menelao, por ejemplo, en 4.11, 4.21 y 4.29. Trataremos de formular conceptos trigonométricos generales, cuya única diferencia sea la representación de acuerdo a la geometría que se esté considerando. En particular, en este capítulo haremos hincapié en la trigonometría esférica, tema que hace cien años se estudiaba intensivamente pero que ahora a dejado de ser parte del curriculum normal, cosa que no es razonable pues, mal que mal, la Tierra es esférica ¿o no? Así, la trigonometría esférica ha jugado un rol importante en áreas como el diseño de mapas terrestres, la navegación y la astronomía.

4.1 Trigonometría Plana

En esta sección revisaremos las fórmulas básicas de trigonometría en un triángulo y sus aplicaciones en algunos teoremas de geometría plana, para luego estudiar sus análogos en geometría esférica e hiperbólica en las secciones siguientes. Recordemos que en un triángulo rectángulo de catetos a, b e hipotenusa c , se definen

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b},$$

y esas definiciones dependen sólo del ángulo α y no del triángulo rectángulo particular elegido. Por el teorema de Pitágoras se tiene

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \tag{1}$$

y

$$\cos \beta = \sin \alpha, \quad \sin \beta = \cos \alpha, \tag{2}$$

para β el ángulo complementario de α .

Teorema 4.1. Teorema de los Senos.

En un triángulo ABC cualquiera se tiene

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R}, \tag{3}$$

donde $2R$ es el diámetro de la circunferencia circunscrita.

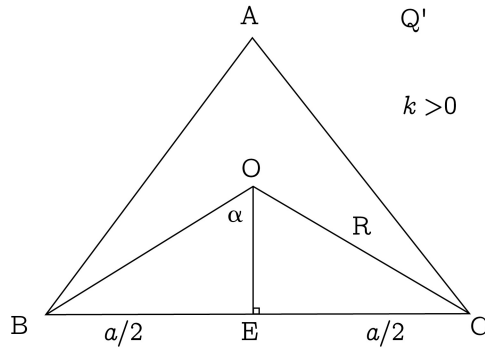


FIGURA 4.1. Senos

Demostración. Sea O la intersección de las simetrales de los lados, centro de la circunferencia circunscrita, de radio que denotamos por R . Si el ángulo inscrito $\angle CAB = \alpha$ entonces el ángulo central $\angle BOC = 2\alpha$. Puesto que $\triangle BOC$ es isósceles, su altura OE coincide con la bisectriz: $\angle COE = \angle BOE = \alpha$. En el triángulo rectángulo $\triangle BOE$ se obtiene

$$\text{sen } \alpha = (a/2)/R = a/2R.$$

Luego $\text{sen } \alpha/a = 1/2R$. □

Teorema 4.2. Teorema de los Cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (4),$$

y fórmulas análogas para los lados b y c .

Demostración.

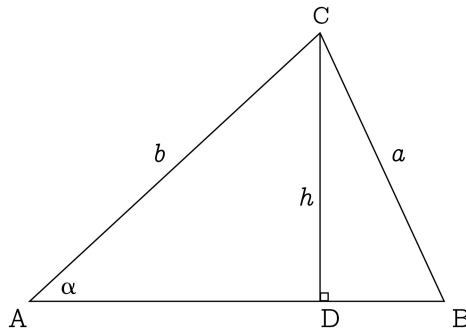


FIGURA 4.2. Cosenos

Por el teorema de Pitágoras en $\triangle CDB$

$$a^2 = h^2 + DB^2 = h^2 + (c - AD)^2.$$

Pero $h = b \sin \alpha$, $AD = b \cos \alpha$. Luego

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. Fórmulas para el Ángulo Medio.

Se tiene

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}, \quad \sin \theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}, \quad (5)$$

$$\tan(\theta/2) = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}. \quad (6)$$

Demostración. En una circunferencia de centro O y radio 1 dibujamos el ángulo central θ y el ángulo inscrito $\theta/2$.

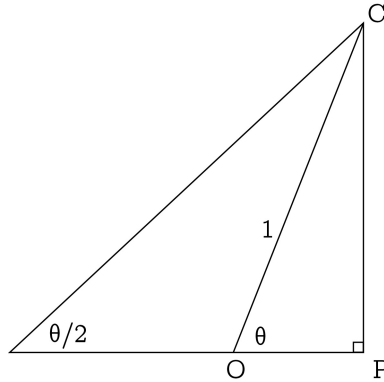


FIGURA 4.3. Ángulo medio

Se obtiene $OP = \cos \theta$ y luego

$$\tan(\theta/2) = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Las otras dos fórmulas se obtienen por sustitución de esta expresión en las fracciones racionales. □

Teorema 4.4. Fórmulas de Suma.

Se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta + \varphi) &= \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ \cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi.\end{aligned}\tag{7}$$

Demostración. Es inmediato establecer la fórmula para el área de un triángulo

$$\Delta = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma.$$

Dibujamos ahora un ángulo $\theta + \varphi$ y la perpendicular a la semi-recta del medio

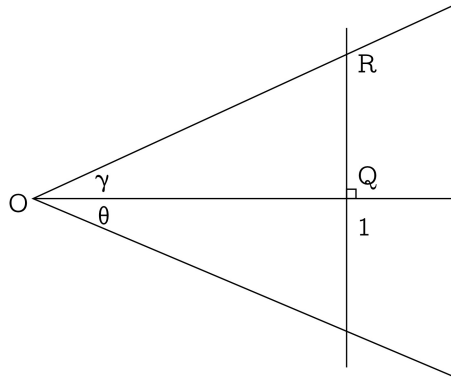


FIGURA 4.4. Fórmula de suma

Entonces las áreas de los dos triángulos rectángulos suman el área de $\triangle OPR$

$$\triangle OPQ + \triangle OQR = \triangle OPR.$$

Luego

$$\frac{1}{2}OQ \cdot OP \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2}OQ \cdot OR \operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2}OP \cdot OR \operatorname{sen}(\theta + \varphi)$$

Multiplicando por 2 y dividiendo por $OP \cdot OR$ se obtiene

$$\frac{OQ}{OR} \operatorname{sen} \theta + \frac{OQ}{OP} \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen}(\theta + \varphi),$$

y el resultado sigue por definición de coseno. Para la función coseno la fórmula se obtiene por

$$\cos(\theta + \varphi) = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta - \varphi)$$

y aplicando lo anterior. □

4.1.1 El Conjunto de las Fórmulas

En esta sección veremos que toda fórmula trigonométrica en el triángulo es consecuencia de una sola de ellas. Este es un hecho significativo, como equivaldría a decir que todas las leyes de la física provinieran de tan solo una (hecho que ciertamente no estamos afirmando). Primero observamos que en un triángulo ABC podemos suponer, salvo por un cambio de escala, que el diámetro de la circunferencia circunscrita es 1, es decir, que $2R = 1$. Mantendremos esta suposición por el resto de esta sección. Con esto, el teorema de los senos implica que los lados son función de los ángulos pues

$$a = \operatorname{sen} \alpha, \quad b = \operatorname{sen} \beta, \quad c = \operatorname{sen} \gamma.$$

Definimos seis variables reales

$$x_1 = \cos \alpha, \quad x_2 = \cos \beta, \quad x_3 = \cos \gamma,$$

$$y_1 = \operatorname{sen} \alpha, \quad y_2 = \operatorname{sen} \beta, \quad y_3 = \operatorname{sen} \gamma.$$

y debemos encontrar las ecuaciones satisfechas en \mathbb{R}^6 . Primero se tiene las relaciones

$$x_i^2 + y_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

y, en principio, sólo hará falta una ecuación más, para definir el conjunto de dimensión real 2 que corresponde a los triángulos con $2R = 1$.

Lema 4.5. *Las fórmulas de suma se expresan por*

$$x_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2, \quad y_3 = y_1 x_2 + y_2 x_1, \quad (9)$$

y ecuaciones similares por permutación cíclica de los índices 1, 2, 3.

Demostración.

$$x_3 = \cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$y_3 = \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen}(\pi - (\alpha + \beta)) = -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

□

Lema 4.6. *La fórmula del coseno se expresa por*

$$y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 x_3, \quad (10)$$

y fórmulas similares por permutación de los índices. Estas fórmulas son consecuencia de las fórmulas de suma anteriores.

Demostración. Tenemos que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ se escribe

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma.$$

Verifiquemos que esta fórmula es consecuencia de las fórmulas del Lema 1:

$$\begin{aligned} y_3^2 &= (y_1 x_2 + y_2 x_1)^2 = y_1^2 x_2^2 + y_2^2 x_1^2 + 2y_1 y_2 x_1 x_2 = y_1^2 (1 - y_2^2) + y_2^2 (1 - y_1^2) + 2y_1 y_2 x_1 x_2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 (y_1 y_2 - x_1 x_2) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 x_2. \end{aligned}$$

□

Lema 4.7. Se definen los números complejos $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$. Entonces $|z_j| = 1$ y

$$z_1 z_2 z_3 = -1. \quad (11)$$

Esta identidad es equivalente a las fórmulas de suma.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= -x_3 + iy_3 = -\bar{z}_3 = -1/z_3. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.8. Toda fórmula trigonométrica en el triángulo es consecuencia de la identidad única

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = -1 + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta. \quad (12)$$

Demostración. En el producto $z_1 z_2 z_3$ la parte real es igual a

$$x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_1 y_3 y_2 - x_2 y_1 y_3.$$

Si esta expresión es igual a -1 entonces, puesto que $|z_1 z_2 z_3| = 1$ se sigue que $z_1 z_2 z_3 = -1$. De allí entonces se deducen las fórmulas de suma y el teorema de los cosenos.

Aún así, en este teorema estamos usando las relaciones (8). Para reducirnos a una sola fórmula, usaremos las de la tangente del ángulo medio. Definimos la transformación birracional

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, & y_1 &= \frac{2x}{1 + x^2}, & x &= \frac{y_1}{1 + x_1}, \\ x_2 &= \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, & y_2 &= \frac{2y}{1 + y^2}, & y &= \frac{y_2}{1 + x_2}, \\ x_3 &= \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, & y_3 &= \frac{2z}{1 + z^2}, & z &= \frac{y_3}{1 + x_3}. \end{aligned} \quad (13)$$

□

Teorema 4.9. En \mathbb{R}^3 la variedad que corresponde por (13) a las fórmulas trigonométricas es la cuádrica

$$xy + yz + zx = 1. \quad (14)$$

Es un hiperboloide de revolución de dos hojas.

Demostración. Tenemos que

$$x_1 x_2 x_3 = -1 + x_3 y_1 y_2 + x_1 y_3 y_2 + x_2 y_1 y_3$$

se escribe usando (13) como

$$(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) = (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + (1 - z^2)4xy + (1 - x^2)4zy + (1 - y^2)4xz,$$

luego

$$1 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2(xy + yz + xz - x^2yz - y^2xz - z^2xy)$$

o sea,

$$z^2(x + y)^2 + 2z(x + y)(xy - 1) + (xy - 1)^2 = 0,$$

lo cual se reduce a

$$[z(x + y) + (xy - 1)]^2 = 0.$$

□

Observación 1. Esta última fórmula $z = \frac{1-xy}{x+y}$ equivale a $\tan(\gamma/2) = 1/\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})$.

Observación 2. Que toda fórmula trigonométrica se deduzca de (14) significa que una fórmula

$$f(\cos \alpha, \dots, \sin \gamma) = 0$$

se escribe, usando (13), como

$$f(x, y, z) = 0.$$

Entonces existirá un polinomio $p(x, y, z)$ tal que

$$f = (xy + yz + xz - 1)p.$$

Observación 3. El cambio de variables

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \quad , \quad x = u + v - w$$

$$v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \quad , \quad y = u - v - w$$

$$w = z \quad , \quad z = w$$

lleva (14) en el hiperboloide

$$u^2 - v^2 - w^2 = 1.$$

Puesto que los lados a, b, c están determinados por los ángulos pues $2R = 1$, el hiperboloide puede ser visto como la variedad de todos los triángulos en el plano. Los triángulos rectángulos corresponden, por ejemplo, a la mitad de una hipérbola

$$u^2 - v^2 = 2.$$

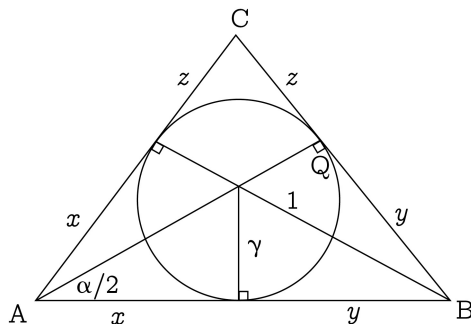


FIGURA 4.5. Circunferencia inscrita

4.1.2 Teoremas de Geometría

Veremos ahora varios teoremas de geometría clásica que tienen análogos en geometría esférica e hiperbólica, y que se demuestran usando fórmulas de trigonometría.

Teorema 4.10. (*Radio de la Circunferencia Inscrita*) Si r es el radio de la circunferencia inscrita y $s = (a + b + c)/2$ es el semi-perímetro del triángulo, entonces

$$r = (s - a) \tan(\alpha/2) = (s - b) \tan(\beta/2) = (s - c) \tan(\gamma/2).$$

Demostración.

Puesto que las dos tangentes desde un punto a una circunferencia determinan segmentos de igual longitud, obtenemos los segmentos de longitudes x, y, z como en la figura. Pero

$$x + y = c \quad , \quad y + z = a \quad , \quad z + x = b.$$

Luego

$$x = (b + c - a)/2 \quad , \quad y = (c + a - b)/2 \quad , \quad z = (a + b - c)/2.$$

En uno de los triángulos rectángulos se tiene

$$\tan(\alpha/2) = r/x,$$

de donde se deduce la fórmula. □

En el siguiente teorema usaremos la notación $|PQ|^*$ para denotar la distancia dirigida, de modo que $|PQ|^* = -|QP|^*$. Cuando tres puntos P, Q, R son colineales, podemos expresar los segmentos dirigidos entre ellos en términos de las coordenadas p, q, r sobre la recta. Así, $|PQ|^* = q - p$ y $|QR|^* = r - q$.

Teorema 4.11. Teorema de Menelao.

Sea l una recta que no pasa por los vértices de $\triangle ABC$. Sea P la intersección de l con AB , Q la intersección de l con BC , y R la intersección de l con CA . Entonces

$$\frac{|AR|^*}{|RB|^*} \cdot \frac{|BP|^*}{|PC|^*} \cdot \frac{|AP|^*}{|PB|^*} \cdot \frac{|BQ|^*}{|QC|^*} \cdot \frac{|CR|^*}{|RA|^*} = -1.$$

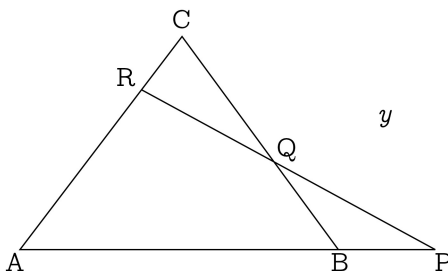


FIGURA 4.6. Menelao

Demostración. Expresar estas razones signadas en términos de las coordenadas en una recta AB :

$$\frac{|AX|^*}{|XB|^*} = \frac{x - a}{b - x}.$$

Luego $\frac{|AX|^*}{|XB|^*} > 0$ si X está entre A y B , y $\frac{|AX|^*}{|XB|^*} < 0$ si X está fuera de AB .

El producto de las razones debe ser negativo pues un punto, P en la figura, está fuera mientras que dos están en el interior, o bien los tres estarán fuera. En la demostración trabajaremos con los valores absolutos de los segmentos y bastará demostrar que el producto de los valores absolutos es 1. En los triángulos $\triangle APR$, $\triangle BPQ$, $\triangle CRQ$ se tiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle APR}{AR} &= \frac{\sin \angle ARP}{AP}, \\ \frac{\sin \angle BPQ}{BQ} &= \frac{\sin \angle BQP}{BP}, \\ \frac{\sin \angle CQR}{CR} &= \frac{\sin \angle CRQ}{CQ}. \end{aligned}$$

Entonces, en valores absolutos,

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} &= \frac{AP}{AR} \cdot \frac{BQ}{BP} \cdot \frac{CR}{CQ} = \\ \frac{\sin \angle ARP}{\sin \angle APR} \cdot \frac{\sin \angle BPQ}{\sin \angle BQP} \cdot \frac{\sin \angle CQR}{\sin \angle CRQ} &= \frac{\sin \angle BPQ}{\sin \angle APR} \cdot \frac{\sin \angle CQR}{\sin \angle BQP} \cdot \frac{\sin \angle ARP}{\sin \angle CRQ}. \end{aligned}$$

Cada una de las razones es 1, pues

$$\angle APR = \angle BPQ, \angle BQP = \angle CQR, \angle ARP = \pi - \angle CRQ.$$

□

Teorema 4.12. Recíproco del Teorema de Menelao.

Si P, Q, R son puntos en AB, BC, CA respectivamente tales que

$$\frac{|AP|^*}{|PB|^*} \cdot \frac{|BQ|^*}{|QC|^*} \cdot \frac{|CR|^*}{|RA|^*} = -1,$$

entonces P, Q, R están en una misma recta l .

Demostración. Si una razón es negativa y dos positivas estaremos en la situación de la figura anterior. La recta por RQ intersecta, por el Teorema de Menelao, al lado AB en un punto P' tal que el producto de razones es -1 . Entonces $AP'/P'B$ queda determinado e igual a AP/PB . Entonces $P = P'$. □

Teorema 4.13. Teorema de Ceva.

Sean P, Q, R tres puntos en los lados BC, AC y AB de un triángulo ABC . Entonces las rectas AP, BQ, CR concurren en un mismo punto x si y solo si

$$\frac{|AR|^*}{|RB|^*} \cdot \frac{|BP|^*}{|PC|^*} \cdot \frac{|CQ|^*}{|QA|^*} = 1.$$

Demostración. Supongamos que las tres rectas concurren en x . Por el Teorema de Menelao en $\triangle APC$ y transversal BXQ

$$\frac{|PB|}{|CB|} \cdot \frac{|QA|}{|QC|} \cdot \frac{|XP|}{|XA|} = 1.$$

Por el Teorema de Menelao en $\triangle APB$ y transversal CXR

$$\frac{|CP|}{|CB|} \cdot \frac{|XA|}{|XP|} \cdot \frac{|RB|}{|RA|} = 1 \quad \frac{|RA|}{|RB|} \cdot \frac{|CB|}{|CP|} \cdot \frac{|XA|}{|XP|} = 1.$$

Multiplicando estas expresiones y cancelando los elementos comunes se obtiene

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1,$$

pero, dadas las intersecciones internas como en la figura las razones son positivas y el producto es $+1$. Si x está en otra posición, dos de las razones serán negativas manteniéndose el producto positivo.

El recíproco se establecerá observando que si x , determinado por AP y BQ , determina CR' entonces la razón $AR'/R'B$ tendrá que ser igual a AR/RB y, por lo tanto, $R = R'$. □

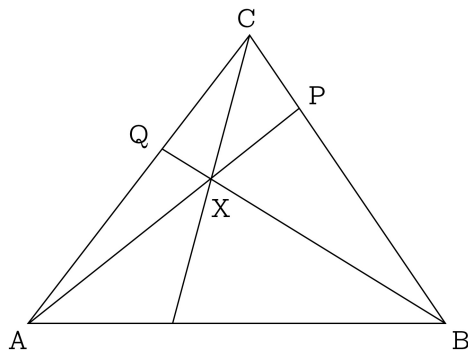


FIGURA 4.7. Ceva

Teorema 4.14. Teorema de Steward.

En el triángulo ABC sea D un punto en el lado (interno) BC . Si $AD = d$, $BD = m$ y $DC = n$ entonces

$$a(d^2 + mn) = mb^2 + nc^2.$$

En particular si D es el punto medio de BC

$$d^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4.$$

Demostración. Por el Teorema de Cosenos en $\triangle ADB$

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2dm \cos \angle ADB.$$

Por el Teorema de Cosenos en $\triangle ADC$

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn \cos \angle ADC = d^2 + n^2 + 2dn \cos \angle ADB.$$

Luego

$$nc^2 + mb^2 = (n + m)d^2 + m^2n + n^2m.$$

Puesto que $n + m = a$, se obtiene la fórmula. □

Ejercicios 4.15.

1. En un triángulo ABC demuestre la identidad

$$1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

2. En un triángulo no rectángulo se cumple la identidad

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

3. Escriba la fórmula de suma (9) usando la transformación biracional (13) en términos de x, y, z .
4. Escriba el Teorema de Cosenos (10) usando la transformación biracional (13) en términos de x, y, z .

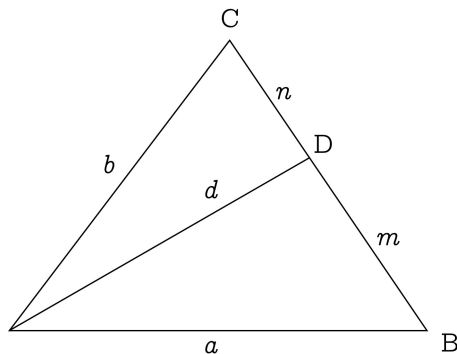


FIGURA 4.8. Steward

5. Demuestre que el Teorema de Steward se extiende
 - a) si D está más allá de C : $a(d^2 - mn) = mb^2 - nc^2$;
 - b) si D está más allá de B : $a(d^2 - mn) = nc^2 - mb^2$.
6. Demuestre que la longitud de la bisectriz del ángulo γ en un triángulo ABC es igual a

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \sqrt{(a+b-c)(a+b+c)}.$$

7. Demuestre el Teorema de Steiner-Lehmus: Si en un triángulo dos de las bisectrices tienen igual longitud, entonces el triángulo es isósceles.
8. Utilizando el Teorema de Ceva demuestre que
 - a) las tres transversales de gravedad concurren en un punto;
 - b) Las tres alturas concurren en un punto;
 - c) Las tres bisectrices concurren en un punto.
9. Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ y una recta $ax + by + c = 0$ que intersekte a la recta P_1P_2 en el punto Q , calcule la razón

$$P_1Q/QP_2.$$

Deduzca otra demostración del Teorema de Menelao.

10. Sean P, Q, R los puntos en que una recta corta a los lados BC, CA, AB respectivamente de un triángulo. Sean
 - h_1 la homotecia de centro P que lleva C en B ,
 - h_2 la homotecia de centro R que lleva B en A ,
 - h_3 la homotecia de centro Q que lleva A en C .
 - a) Encuentre las razones de las homotecias.
 - b) Calcule $h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

4.2 Trigonometría Esférica

La teoría y las fórmulas que se desarrollan en esta sección tienen una doble finalidad. Primero, es un tema que no forma parte de los currículos actuales y que, sin embargo, es claramente importante pues la geometría de la esfera es en cierto sentido más real que la euclidea del plano. Segundo, y es ésta la principal intención aquí, las fórmulas de la trigonometría hiperbólica son iguales a las de trigonometría en una esfera de radio $\sqrt{-1}$.

4.2.1 Geometría de la Esfera

Consideramos como modelo la esfera unitaria en \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Un plano que pasa por el origen intersecta a la esfera en una *circunferencia máxima*, y son estas circunferencias máximas las *rectas* en esta geometría. Por dos puntos A y B de la esfera pasará una única tal recta, intersección del plano por el origen y esos dos puntos con la esfera. Esta circunferencia máxima se encuentra dividida en dos arcos, uno de longitud mayor que π y el otro menor que π . En lo que sigue el arco \widehat{AB} representa aquel arco de circunferencia de longitud menor que π , o a lo sumo igual a π si A y B son opuestos por un diámetro. Tres puntos A, B y C que no están diametralmente opuestos determinan un *triángulo esférico* que tiene estos puntos como vértices y lados los arcos $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ de longitudes $a = |\widehat{BC}|$, $b = |\widehat{CA}|$ y $c = |\widehat{AB}|$ respectivamente. Hemos decidido mantener la misma notación que en el Capítulo 1 para denotar a la distancia entre puntos, en el entendido de que ahora nos referimos la distancia esférica, es decir, al largo del arco circular que une los dos puntos medido sobre la esfera. Como la esfera tiene radio 1, la longitud $a = |\widehat{BC}|$ será igual a la medida en radianes del ángulo $\angle BOC$. La medida del ángulo en A , denotada por \hat{A} , es el ángulo entre los dos planos BOA y COA ; corresponde al ángulo formado por esos dos planos con el plano ortogonal a ellos, que es el plano ortogonal a la recta OA que pasa por A . Esa medida será entonces igual al ángulo formado por las dos rectas tangentes a los arcos \widehat{AB} y \widehat{AC} . Los vértices A, B y C determinan junto al origen O un triedro de caras AOB, BOC, COA . Puesto que al inclinar un plano ortogonal a dos planos el ángulo disminuye, resulta que un plano cualquiera intersecta a las caras en un triángulo plano, de suma angular π . Resulta entonces, que en un triángulo esférico $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$. Se llama exceso esférico E a la cantidad definida por

$$2E = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi,$$

y perímetro naturalmente a

$$2p = a + b + c.$$

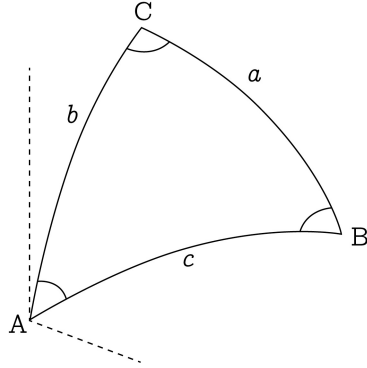


FIGURA 4.9. Un triángulo esférico

4.2.2 Principio de Dualidad

Dado un triángulo esférico ABC , el plano OAB divide al espacio en dos semiespacios y a la esfera en dos hemisferios. La recta por O ortogonal al plano determina dos polos; se llama polo del lado AB a aquel polo C' que está en el mismo hemisferio que el vértice C . Se define así un triángulo $A'B'C'$ llamado triángulo polar del triángulo ABC . El triángulo polar de $A'B'C'$ es ABC . Si consideramos dos planos AOB y AOC el ángulo A estará determinado por los vectores ortogonales a los planos. Esos vectores, convenientemente orientados, determinan el arco $\widehat{C'B'}$ de longitud a' . Luego, se tienen las fórmulas duales

$$\begin{aligned} a' &= \pi - \hat{A}, \quad b' = \pi - \hat{B}, \quad c' = \pi - \hat{C}, \\ \hat{A}' &= \pi - a, \quad \hat{B}' = \pi - b, \quad \hat{C}' = \pi - c. \end{aligned}$$

Supongamos que hemos establecido una fórmula

$$f(a, b, c, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$$

válida en todo triángulo esférico, entonces será válida la fórmula

$$f(a', b', c', \hat{A}', \hat{B}', \hat{C}'),$$

es decir

$$f(\pi - \hat{A}, \pi - \hat{B}, \pi - \hat{C}, \pi - a, \pi - b, \pi - c)$$

se cumplirá también. Ésta es una fórmula que se obtiene reemplazando los lados por los suplementos de los ángulos y los ángulos por los suplementos de los lados. Como ejemplo, puesto que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$$

entonces también $(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) > \pi$, y luego

$$a + b + c < 2\pi.$$

4.2.3 Área de un Triángulo Esférico

Consideramos dos planos por el origen que se intersectan en dos puntos A y A^* con la esfera y que tienen un ángulo α . Se obtiene un sector angular en la esfera. Puesto que el área de la esfera es 4π , y corresponde a un ángulo $\alpha = 2\pi$, se sigue proporcionalmente que el área de un sector angular α es 2α . Para un triángulo esférico, se obtienen sectores angulares y sus opuestos que conjuntamente cubren la esfera, pero pasando tres veces por el triángulo ABC y tres por $A^*B^*C^*$ (de igual área). Luego, si Δ es el área del triángulo esférico ABC

$$4\pi = 4\hat{A} + 4\hat{B} + 4\hat{C} - 4\Delta.$$

Entonces

$$\Delta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 2E.$$

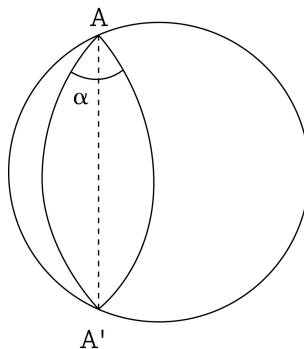


FIGURA 4.10. Sector angular

4.2.4 Fórmulas Trigonómicas en el Triángulo Rectángulo

Consideramos un triángulo esférico ABC con $\hat{C} = \pi/2$. Unimos los vértices A, B y C con el centro de la esfera y desde A trazamos el plano ortogonal al lado \widehat{OC} .

Observamos entonces varios triángulos rectángulos euclideos: $\triangle EDA$ rectángulo en D , $\triangle OED$ rectángulo en E , y $\triangle ODA$ rectángulo en D . Además $\angle AOD = b$, $\angle DOE = a$, $\angle DEA = B$. Obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *En un triángulo esférico recto en C se tienen las fórmulas*

- i) $\sin \hat{B} = \sin b / \sin c$;
- ii) $\cos \hat{B} = \tan a / \tan c$;
- iii) $\cos \hat{C} = \cos a \cos b$.

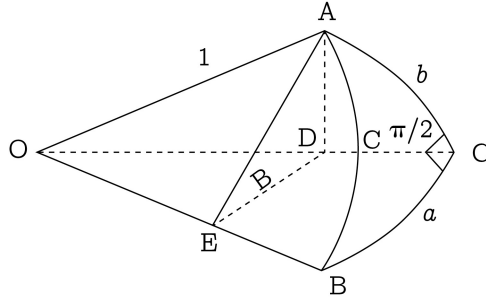


FIGURA 4.11. Un triángulo esférico rectángulo

Demostración. En el triángulo $\triangle DEA$ se tiene

$$|OE| = \cos c \quad , \quad |EA| = \sin c \quad ,$$

pues el largo de \widehat{OA} es 1. Así mismo, en el triángulo $\triangle ODA$ se tiene

$$|OD| = \cos b \quad , \quad |DA| = \sin b \quad ,$$

mientras que en el triángulo $\triangle OED$ se obtiene entonces

$$\cos a = \cos c / \cos b \quad , \tag{c}$$

en el triángulo $\triangle EDA$

$$\sin \hat{B} = \sin b / \sin c \tag{a}$$

y puesto que $|ED| = \tan a \cos c$,

$$\cos \hat{B} = \tan a \cos c / \sin c \quad . \tag{b}$$

□

4.2.5 Fórmulas Fundamentales de la Trigonometría Esférica

Deduciremos los teoremas de senos y cosenos con una construcción similar a la efectuada en un triángulo euclídeo. En un triángulo esférico trazamos la altura \widehat{CD} de largo h .

Teorema 4.17. Teorema de los Senos.

Se tiene

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c} \quad .$$

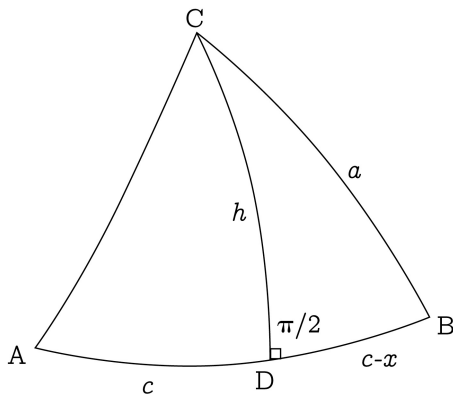


FIGURA 4.12. Un triángulo esférico rectángulo

Demostración. Por la fórmula (a) del teorema anterior se obtiene

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} b},$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} a}.$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene el resultado. □

Teorema 4.18. Teorema de los Cosenos.

Se tiene

$$\cos a = \cos c \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{A}.$$

Demostración. Por la fórmula (c) del teorema anterior se tiene

$$\cos a = \cos h \cos(c - x),$$

$$\cos b = \cos h \cos x.$$

Luego

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos c \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} c}{\cos x} = \cos c + \operatorname{sen} c \tan x.$$

Pero por la fórmula (b), $\cos \hat{A} = \tan x / \tan b$, y reemplazando $\tan x$ en la última expresión tenemos

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{sen} c \cos \hat{A} \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b},$$

lo que demuestra la fórmula. Efectuando permutaciones cíclicas en la fórmula se tendrá entonces

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \hat{A},$$

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos \hat{B}, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \hat{C},\end{aligned}$$

y, por el principio de dualidad, reemplazando a por $\pi - \hat{A}$, etc., se obtiene

$$\begin{aligned}\cos \hat{A} &= \cos \hat{B} \cos \hat{C} + \operatorname{sen} \hat{B} \operatorname{sen} \hat{C} \cos a, \\ \cos \hat{B} &= \cos \hat{C} \cos \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{C} \operatorname{sen} \hat{A} \cos b, \\ \cos \hat{C} &= \cos \hat{A} \cos \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{A} \operatorname{sen} \hat{B} \cos c.\end{aligned}$$

El primer grupo de fórmulas permite decir que los (cosenos de) ángulos están determinados por los lados. El segundo grupo de fórmulas permite decir que los (cosenos de) lados están determinados por los ángulos. \square

4.2.6 Teoremas de Geometría Esférica

Veremos ahora, cómo los teoremas anteriormente vistos en geometría euclidiana tienen análogos en geometría esférica.

Teorema 4.19. Radio de la Circunferencia Inscrita.

Si r es el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo esférico y $s = (a+b+c)/2$ es el semi-perímetro entonces

$$\tan(r) = \operatorname{sen}(s-a) \tan(\hat{A}/2) = \operatorname{sen}(s-b) \tan(\hat{B}/2) = \operatorname{sen}(s-c) \tan(\hat{C}/2).$$

Demostración. Tal como en el caso euclídeo, es sencillo encontrar que la bisectriz de un ángulo esférico es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. (Dado un punto y un arco máximo, existen dos arcos por el punto que son ortogonales al arco dado: el menor de ellos es la distancia). Las tres bisectrices se intersectan, por lo tanto, en un solo punto que está a distancia r de los tres lados. Sean, como antes, x, y, z los arcos desde A, B, C a los puntos de tangencia E, F, G de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo esférico.

Podremos obtener de igual forma $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. En el triángulo $\triangle AEI$ aplicamos las fórmulas demostradas anteriormente para un triángulo esférico rectángulo y obtenemos

$$\begin{aligned}\tan(\hat{A}/2) &= \operatorname{sen}(\hat{A}/2) / \cos(\hat{A}/2), \\ &= \frac{\operatorname{sen}(r) \tan(e)}{\operatorname{sen}(e) \tan(x)}.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\cos(e) = \cos(r) \cos(x),$$

esto se reduce a

$$\tan(r) / \operatorname{sen}(x),$$

que equivale a lo afirmado. \square

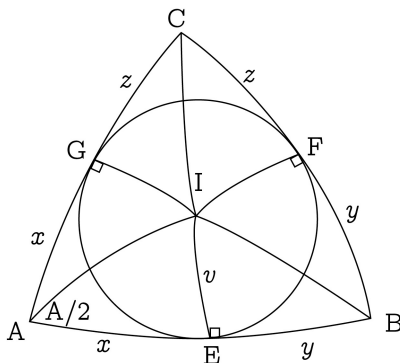


FIGURA 4.13. Menelao esférico

Teorema 4.20. Teorema de Menelao.

Sea Γ un círculo máximo que no pasa por los vértices de un triángulo esférico ABC . Sean P la intersección de Γ con \widehat{AB} , Q la intersección de Γ con \widehat{BC} , y R la intersección de Γ con \widehat{CA} . Entonces

$$\frac{\text{sen } |AP|}{\text{sen } |PB|} \cdot \frac{\text{sen } |BQ|}{\text{sen } |QC|} \cdot \frac{\text{sen } |CR|}{\text{sen } |RA|} = -1.$$

Demostración. Primero precisamos que $\text{sen } |AP| > 0$ para P a la derecha de A , hasta llegar al punto diametralmente opuesto donde se anula, y $\text{sen } |AP| < 0$ para P a la izquierda de A . Así la razón

$$\frac{\text{sen } |AP|}{\text{sen } |PB|} > 0$$

para P entre A y B , y será negativa en caso contrario. En las tres razones del teorema dos son positivas y una negativa o bien las tres son negativas tal como en el caso euclídeo. Demostraremos el teorema en el primer caso, como se muestra en la figura adjunta.

Por el teorema de los senos en el triángulo $\triangle APR$,

$$\frac{\text{sen } |AP|}{\text{sen } \hat{R}} = \frac{\text{sen } |AR|}{\text{sen } \hat{P}},$$

luego

$$\frac{\text{sen } |AP|}{\text{sen } |AR|} = \frac{\text{sen } \hat{R}}{\text{sen } \hat{P}}.$$

Por la misma razón en los triángulos BPQ y CRQ

$$\frac{\text{sen } |PB|}{\text{sen } \hat{Q}} = \frac{\text{sen } |QB|}{\text{sen } \hat{P}},$$

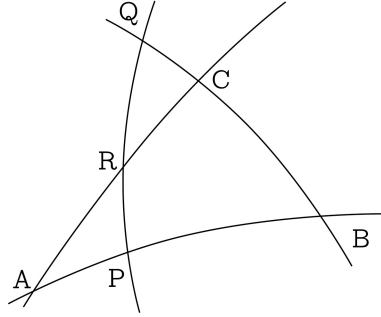


FIGURA 4.14. Configuración esférica

luego

$$\frac{\sin |QB|}{\sin |PB|} = \frac{\sin \hat{P}}{\sin \hat{Q}},$$

$$\frac{\sin |QC|}{\sin \hat{R}} = \frac{\sin |RC|}{\sin \hat{Q}},$$

por lo que

$$\frac{\sin |RC|}{\sin |QC|} = \frac{\sin \hat{Q}}{\sin \hat{R}}.$$

El resultado se obtiene al multiplicar las últimas tres razones a la derecha, observando que $\sin |AR| = -\sin |RA|$, $\sin |QB| = -\sin |BQ|$, y $\sin |RC| = -\sin |CR|$.

□

Teorema 4.21. Recíproco del Teorema de Menelao.

Sean P, Q, R puntos en \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} respectivamente tales que

$$\frac{\sin |AP|}{\sin |PB|} \cdot \frac{\sin |BQ|}{\sin |QC|} \cdot \frac{\sin |CR|}{\sin |RA|} = 1.$$

Entonces los tres puntos están en un círculo máximo.

Demostración. El círculo máximo por Q y R intersecta a \widehat{AB} en un punto P con razón determinada, pero la pregunta es si la razón $\frac{\sin |AP|}{\sin |PB|}$ determina un único punto en \widehat{AB} . Para ello, primero observamos que $|AB| < \pi$ en todo triángulo y luego $|AP|$ o $|PB|$ es menor que $\pi/2$. Supongamos que $0 < |AP| < \pi/2$. Con $\sin |AP| = x$, $\sin |AB| = a$ y r el valor de la razón, se obtiene la ecuación

$$\frac{x}{\sin(|AB| - |AP|)} = \frac{x}{a\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-a^2}} = r.$$

Esta ecuación tiene la solución positiva

$$x = \frac{ar}{\sqrt{1 + 2r\sqrt{1 - a^2} + r^2}},$$

y menor que 1, si se analiza con cuidado. Pero dado x , $\text{sen } |AP| = x$ tiene una solución única $0 < |AP| < \pi/2$.

□

Teorema 4.22. Teorema de Ceva.

Sean P, Q, R puntos en los lados \widehat{BC} , \widehat{AC} y \widehat{AB} de un triángulo ABC . Entonces los círculos máximos por A, P , por B, Q y por C, R concurren en un mismo punto X si y solo si

$$\frac{\text{sen } |AR|}{\text{sen } |RB|} \cdot \frac{\text{sen } |BP|}{\text{sen } |PC|} \cdot \frac{\text{sen } |CQ|}{\text{sen } |QA|} = 1.$$

Demostración. Supongamos que las tres rectas concurren en X . Por el teorema de Menelao en $\triangle APC$ y transversal BXQ

$$\left| \frac{\text{sen } |PB|}{\text{sen } |CB|} \cdot \frac{\text{sen } |QA|}{\text{sen } |QC|} \cdot \frac{\text{sen } |XP|}{\text{sen } |XA|} \right| = 1.$$

Por Menelao en $\triangle APB$ y transversal CXR ,

$$\left| \frac{\text{sen } |RA|}{\text{sen } |RB|} \cdot \frac{\text{sen } |CB|}{\text{sen } |CP|} \cdot \frac{\text{sen } |XA|}{\text{sen } |XP|} \right| = 1.$$

Multiplicando estas dos expresiones se obtiene

$$\left| \frac{\text{sen } |RA|}{\text{sen } |RB|} \cdot \frac{\text{sen } |BP|}{\text{sen } |PC|} \cdot \frac{\text{sen } |CQ|}{\text{sen } |QA|} \right| = 1.$$

Dadas las intersecciones, como por ejemplo, en la figura anterior, las razones son positivas y el producto es 1. El recíproco se establece tal como en el teorema de Menelao pues la razón $\text{sen } |AR|/\text{sen } |RB|$ determina un único punto en \widehat{AB} .

□

Teorema 4.23. Teorema de Steward

En un triángulo ABC sea D un punto en el lado (interno) BC . Si $|AD| = d$, $|BD| = m$ y $|DC| = n$ entonces

$$\text{sen } \alpha \cos d = \text{sen } m \cos b + \text{sen } n \cos c.$$

En particular si D es el punto medio de \widehat{BC}

$$\cos d = (\cos b + \cos c)/2 \cos(a/2).$$

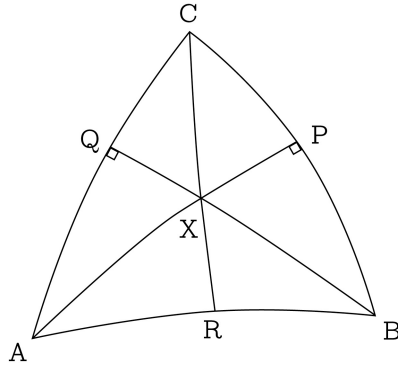


FIGURA 4.15. Ceva esférico

Demostración. Por el Teorema de los Cosenos en $\triangle ABD$

$$\cos c = \cos d \cos m + \sin d \sin m \cos \angle ADB .$$

Por el mismo teorema en $\triangle ADC$

$$\cos b = \cos d \cos n + \sin d \sin n \cos \angle ADC = \cos d \cos n - \sin d \sin n \cos \angle ADB .$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \sin n \cos c + \sin m \cos b &= \cos d (\cos m \sin n + \cos n \sin m) \\ &= \cos d \sin(n + m) = \cos d \sin a . \end{aligned}$$

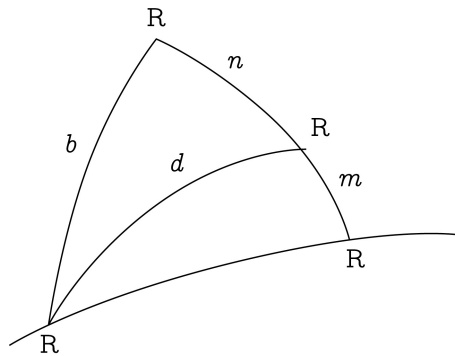


FIGURA 4.16. Steward esférico

□

Teorema 4.24. Teorema de Steward.

En un triángulo ABC sea D un punto en el lado (interno) \widehat{BC} . Si $\angle BAD = \mu$, $\angle DAC = \nu$, $\angle ADB = \delta$, entonces

$$\cos \hat{A} \cos \delta = \cos \hat{C} \sin \mu - \cos \hat{B} \sin \nu.$$

En particular si \widehat{AD} es la bisectriz del ángulo \hat{A} entonces

$$\cos \delta = (\cos \hat{C} - \cos \hat{B}) / 2 \cos(\hat{A}/2).$$

Demostración. Por el teorema dual del teorema de cosenos en $\triangle ADB$

$$\cos \hat{B} = -\cos \mu \cos \delta + \sin \mu \sin \delta \cos |AD|,$$

y, de igual forma, en $\triangle ADC$

$$\cos \hat{C} = +\cos \nu \cos \delta + \sin \nu \sin \delta \cos |AD|.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \hat{B} \sin \nu - \cos \hat{C} \sin \mu &= -(\cos \mu \sin \nu + \cos \nu \sin \mu) \cos \delta \\ &= -\sin \hat{A} \cos \delta. \end{aligned}$$

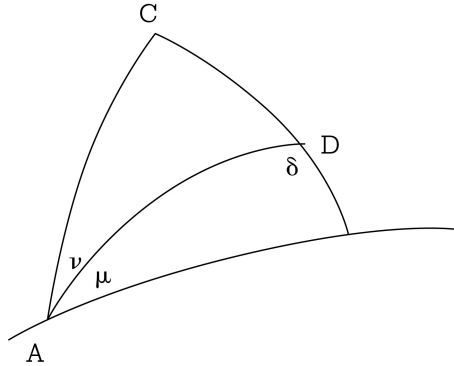


FIGURA 4.17. Lado interno

□

Ejercicios 4.25.

1. Demuestre las fórmulas siguientes para vectores en \mathbb{R}^3

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad , \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))\vec{a}.$$

2. Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores unitarios desde el centro O de la esfera unidad a puntos A, B, C , demuestre que calculando $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ de dos maneras distintas se obtiene el teorema de cosenos. De igual forma $\|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})\|$ expresado como seno del ángulo por las longitudes de los vectores demuestra el teorema de senos.
3. Encuentre los teoremas de senos y cosenos en una esfera de radio R
4. ¿Qué se obtiene al hacer $R \rightarrow +\infty$ en las fórmulas del ejercicio 3?
5. Para calcular la distancia entre dos ciudades A, B en la esfera terrestre, construya un triángulo ABN donde N es polo norte y utilice el Teorema de Cosenos.
6. La longitud se mide en ángulos al Oeste o Este del meridiano de Greenwich y varía entre 0° y 180° . La latitud se mide en ángulos al Norte o Sur del Ecuador y varía entre 0° y 90° . Se conocen los datos
 - a) Talca: $35^\circ 26'S - 71^\circ 40'O$;
 - b) París: $48^\circ 54'N - 2^\circ 45'E$;
 - c) Londres: $51^\circ 30'N - 0^\circ 07'O$.

Si el radio de la Tierra es 6.320 km. calcule las distancias de Talca a París y de Talca a Londres.

7. Demuestre que el Teorema de Steward se extiende
 - a) si D está más allá de C entonces

$$\text{sen } a \cos d = \text{sen}(a + n) \cos b - \text{sen } n \cos c;$$

- b) si D está más allá de B entonces

$$\text{sen } a \cos d = \text{sen}(a + m) \cos c - \text{sen } m \cos b.$$

8. Demuestre que si f es la longitud de la bisectriz del ángulo C en el triángulo ABC entonces

$$\cos f = \frac{1 + \cos \hat{C}}{\text{sen } \hat{C}} \frac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{B}}.$$

4.3 Trigonometría Hiperbólica

Veremos en esta sección las fórmulas de trigonometría válidas para triángulos en el semi-plano superior o equivalentemente en el disco unidad. Las fórmulas de trigonometría esférica, tal como el teorema de cosenos en una esfera de radio R

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \text{sen } \hat{B} \text{sen } \hat{C} \cos(a/R),$$

por ejemplo, dan al reemplazar formalmente $R = i$

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \text{sen } \hat{B} \text{sen } \hat{C} \cosh(\alpha),$$

pues $\cos(ix) = \cosh(x)$. Esta fórmula tiene el sentido que $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ son los ángulos euclidianos o hiperbólicos y que a es la longitud hiperbólica del lado opuesto a A . Esta fórmula necesita, sin embargo, una demostración que procederemos a relizar;

previo a ello recordamos las fórmulas para distancias. En el semi-plano superior \mathbb{H} el elemento de distancia es

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z},$$

y la distancia hiperbólica de $P = ia$ a $Q = ib$ con $b > a$ es

$$d(ia, ib) = \log(b/a).$$

En el disco unidad \mathbb{D} la fórmula para el elemento de distancia es

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

y la distancia de un punto z al origen es

$$d(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

Esta relación entre la distancia euclidiana, $|z|$, y la distancia hiperbólica, d , al origen, se puede escribir también como

$$\tanh(d/2) = |z|,$$

o bien

$$\cosh(d) = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Para dos puntos z, w cualquiera

$$d(z, w) = \log \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

con

$$\lambda = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|.$$

Teorema 4.26. *En un triángulo hiperbólico rectángulo ABC con $\gamma = \pi/2$ se tienen las identidades*

- i) $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$ (Pitágoras hiperbólico);
- ii) $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{senh}(c)}$;
- iii) $\cos(\alpha) = \frac{\cosh(a) \operatorname{senh}(b)}{\operatorname{senh}(c)}$.

Demostración. Por un movimiento isométrico podemos llevar C al origen en \mathbb{D} , A a un punto x real, B a un punto iy , y real. Por la relación recién observada entre las distancias hiperbólicas y euclidianas

$$\cosh b = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}, \quad \cosh a = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}, \quad \cosh c = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2},$$

con

$$\lambda = \left| \frac{x - iy}{1 - xiy} \right|.$$

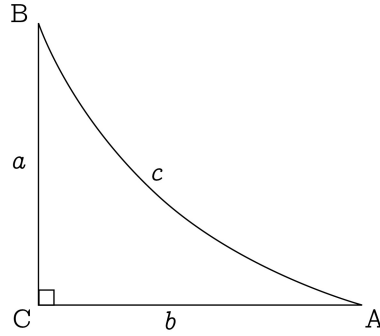


FIGURA 4.18. Pitágoras hiperbólico

Puesto que $\lambda^2 = (x^2 + y^2)/(1 + x^2y^2)$ la fórmula de Pitágoras se verifica fácilmente. Para establecer las identidades ii), iii) trasladamos A al origen por la transformación

$$\frac{x - z}{1 - xz},$$

obteniéndose el triángulo ABC con $B = \frac{x-iy}{1-ixy}$.

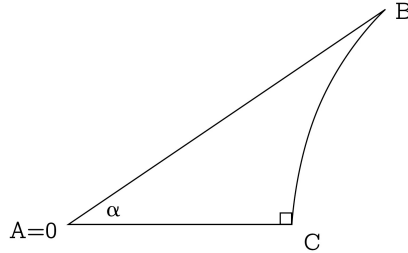


FIGURA 4.19. Sumas y coordenadas

Puesto que

$$B = \frac{x(1 + y^2) + iy(x^2 - 1)}{1 + x^2y^2}$$

se obtiene

$$\tan(\alpha) = -\frac{y(1 - x^2)}{x(1 + y^2)}.$$

Pero

$$\frac{1 - x^2}{x} = \frac{1 - \tanh^2(b/2)}{\tanh(b/2)} = \frac{\cosh^2(b/2) - \sinh^2(b/2)}{\sinh(b/2) \cosh(b/2)} = \frac{2}{\sinh(b)},$$

$$-\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2} \tanh(a),$$

de donde

$$\tan(\alpha) = \frac{\tanh(a)}{\sinh(b)}.$$

De allí es sencillo obtener las fórmulas para seno y coseno. □

Teorema 4.27. Teorema de los Senos.

En un triángulo hiperbólico ABC se tiene

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\sinh(c)}.$$

Demostración. Tracemos desde C la altura CD de longitud d .

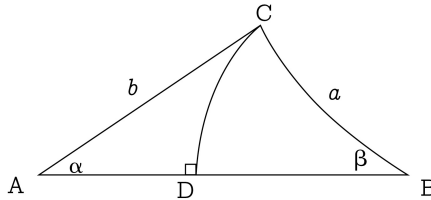


FIGURA 4.20. Senos hiperbólicos

Por la fórmula ii) anterior en cada triángulo rectángulo se tiene

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\sinh(d)}{\sinh(b)},$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\sinh(d)}{\sinh(a)},$$

de donde la conclusión. □

Teorema 4.28. Teorema de Cosenos I.

En un triángulo hiperbólico ABC

$$\cosh(a) = \cosh(c) \cosh(b) - \sinh(c) \sinh(b) \cos(x),$$

y fórmulas análogas por permutación de los lados y ángulos.

Demostración. En la figura anterior del teorema de los senos sea x la longitud de AD , e y la longitud de DB . En BCD ,

$$\cosh(a) = \cosh(d) \cosh(y),$$

y en ADC ,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cosh(b) \cosh(y)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh(b)}{\cosh(x)} \cosh(c - x) \\
&= \frac{\cosh(b)}{\cosh(x)} (\cosh(c) \cosh(x) - \sinh(c) \sinh(x)) \\
&= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(c) \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \cosh(b).
\end{aligned}$$

Pero en ADC ,

$$\cos(\alpha) = \frac{\cosh(d) \sinh(x)}{\sinh(b)},$$

luego

$$\cos(\alpha) \sinh(b) = \cosh(d) \sinh(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) \cosh(b)$$

por Pitágoras. □

Teorema 4.29. Teorema de Cosenos II.

En un triángulo hiperbólico ABC

$$\cos \alpha = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c.$$

Demostración Siempre refiriéndonos a la figura del teorema de los senos, sean $\gamma' = \angle ACD$, $\gamma'' = \angle BCD$. Entonces

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= \cos(\gamma' + \gamma'') = \cos(\gamma') \cos(\gamma'') - \sin(\gamma') \sin(\gamma'') \\
&= \frac{\cosh(x) \cosh(y) \sinh^2(d)}{\sinh(a) \sinh(b)} - \frac{\sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(a) \sinh(b)}.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$-\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh(c) = -\frac{\cosh^2(d) \sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(a) \sinh(b)} + \frac{\sinh^2(d) \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)},$$

y la igualdad resulta por verificación directa pues

$$\cosh^2(d) - \sinh^2(d) = 1,$$

$$\cosh(c) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y).$$

□

4.3.1 Teoremas de Geometría Hiperbólica

Completamos ahora los teoremas vistos en geometría euclidiana y esférica en el caso hiperbólico.

Teorema 4.30. Radio de la Circunferencia Inscrita.

Si r es el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo hiperbólico y $s = (a + b + c)/2$ es el semi perímetro entonces

$$\tanh(r) = \sinh(s - a) \tan(\alpha/2) = \sinh(s - b) \tan(\beta/2) = \sinh(s - c) \tan(\gamma/2).$$

Demostración. Si consideramos un ángulo con vértice en O en el disco unidad, la bisectriz del ángulo es claramente el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo (por simetría respecto a esa bisectriz un arco ortogonal a un lado corresponde al otro arco). Las tres bisectrices se intersectan en el punto que equidista de los tres lados. Sean entonces x, y, z los arcos desde A, B, C a los puntos de tangencia E, F, G de la circunferencia inscrita (el centro de la circunferencia inscrita no es el euclideano).

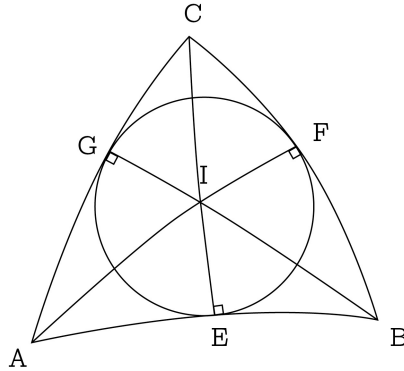


FIGURA 4.21. Circunferencia inscrita hiperbólica

Para esas longitudes hiperbólicas se obtiene $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. En el triángulo rectángulo AEI se tendrá

$$\begin{aligned} \tan(\alpha/2) &= \frac{\sinh(\alpha/2)}{\cosh(\alpha/2)} = \frac{\sinh(r)}{\sinh(e)} \frac{\sinh(e)}{\cosh(r) \sinh(x)} \\ &= \tanh(r) / \sinh(x) = \tanh(r) / \sinh(s - a). \end{aligned}$$

□

Tal como en el Teorema 4.11 (Menelao) hubo que considerar segmentos dirigidos, en la versión hiperbólica de este teorema denotaremos tal como antes por $|AB|^*$ las

distancia o largo de geodésica, ahora hiperbólica, dirigida. Así, por ejemplo,

$$\frac{\sinh(|AP|^*)}{\sinh(|PB|^*)} = \frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(P, B))} > 0$$

para P entre A y B , y que

$$\frac{\sinh(|AP|^*)}{\sinh(|PB|^*)} = -\frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(P, B))} < 0$$

para P fuera del segmento de A a B .

Teorema 4.31. Teorema de Menelao.

Sea Γ una recta hiperbólica que no pasa por los vértices de un triángulo ABC . Sean P la intersección de Γ con AB , Q la intersección de Γ con BC , y R la intersección de Γ con CA . Entonces

$$\frac{\sinh(|AP|^*)}{\sinh(|PB|^*)} \frac{\sinh(|BQ|^*)}{\sinh(|QC|^*)} \frac{\sinh(|CR|^*)}{\sinh(|RA|^*)} = -1.$$

Demostración. En las tres razones del teorema, dos deberán ser positivas y una negativa o bien las tres son negativas.

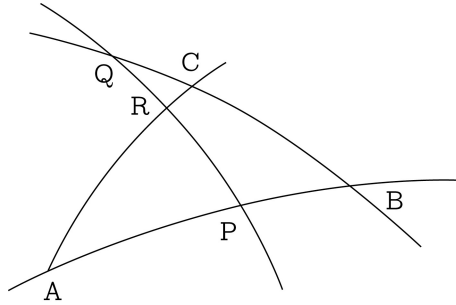


FIGURA 4.22. Menelao hiperbólico

Por el teorema de los senos en $\triangle APR$

$$\frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(\hat{R})} = \frac{\sinh(d(A, R))}{\sinh(\hat{P})}, \quad \frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(AR))} = \frac{\sinh(\hat{R})}{\sinh(\hat{P})},$$

y, por la misma razón, en los triángulos $\triangle BPQ$ y $\triangle CRQ$

$$\frac{\sinh(d(P, B))}{\sinh(\hat{Q})} = \frac{\sinh(d(A, R))}{\sinh(\hat{P})}, \quad \frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(A, R))} = \frac{\sinh(\hat{R})}{\sinh(\hat{P})}.$$

Multiplicando, y tomando en cuenta la convención de signos, se obtiene el teorema. \square

Teorema 4.32. Recíproco del Teorema de Menelao.

Sean P, Q, R puntos en AB, BC, CA respectivamente. Si

$$\frac{\sinh(|AP|^*)}{\sinh(|PB|^*)} \frac{\sinh(|BQ|^*)}{\sinh(|QC|^*)} \frac{\sinh(|CR|^*)}{\sinh(|RA|^*)} = -1$$

entonces los tres puntos están en una misma recta hiperbólica.

Demostración. La recta hiperbólica por Q y R intersecta a AB en un punto P^* con razón determinada. Bastará ver, para P entre A y B , por ejemplo, que

$$\frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(P, B))} = \frac{\sinh(d(A, P^*))}{\sinh(d(P^*, B))}$$

implica $P = P^*$. Supongamos que P^* está entre P y B . Entonces $d(A, P^*) > d(A, P)$ y $d(P^*, B) < d(P, B)$, y se obtendría

$$\frac{\sinh(d(A, P))}{\sinh(d(P, B))} < \frac{\sinh(d(P, P^*))}{\sinh(d(P^*, B))}.$$

□

Teorema 4.33. Teorema de Ceva.

Sean P, Q, R tres puntos en los lados BC, AC y AB de un triángulo hiperbólico ABC . Entonces las rectas hiperbólicas AP, BQ, CR concurren en un mismo punto X si y solo si

$$\frac{\sinh(|AR|^*)}{\sinh(|RB|^*)} \frac{\sinh(|BP|^*)}{\sinh(|PC|^*)} \frac{\sinh(|CQ|^*)}{\sinh(|QA|^*)} = 1.$$

Demostración.

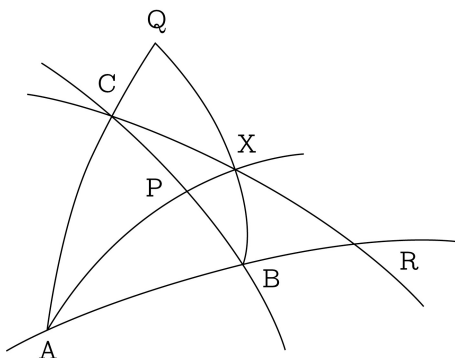


FIGURA 4.23. Ceva hiperbólico

Supongamos que las tres rectas concurren en X . Por el Teorema de Menelao en $\triangle APC$ y transversal BXQ

$$\left| \frac{\sinh(|PB|^*)}{\sinh(|CB|^*)} \frac{\sinh(|QA|^*)}{\sinh(|QC|^*)} \frac{\sinh(|XP|^*)}{\sinh(|XA|^*)} \right| = 1,$$

y por el Teorema de Menelao en $\triangle APB$ y transversal CXR

$$\left| \frac{\sinh(|RA|^*)}{\sinh(|RB|^*)} \frac{\sinh(|CB|^*)}{\sinh(|CP|^*)} \frac{\sinh(|XA|^*)}{\sinh(|XP|^*)} \right| = 1.$$

Multiplicando esas expresiones se obtiene, salvo el signo, la igualdad del teorema. Dadas las intersecciones como en la figura, por ejemplo, dos razones son negativas y la tercera positiva, obteniéndose $+1$, por lo tanto. El recíproco se establece tal como en el Teorema de Menelao, pues la razón $\sinh(d(A, X))/\sinh(d(X, B))$ es una función continua y uno-a-uno en el intervalo AB : un valor de la razón determina un único punto en la recta hiperbólica.

□

Teorema 4.34. Teorema de Steward.

En un triángulo ABC sea D un punto en el lado (interno) BC . Si $d(A, D) = d(B, D) = m$, $d(D, C) = n$ entonces

$$\sinh(a) \cosh(d) = \sinh(m) \cosh(b) + \sinh(n) \cosh(c).$$

En particular, si D es el punto medio de BC entonces

$$\cosh(d) = (\cosh(b) + \cosh(c))/2 \cosh(a/2).$$

Demostración.

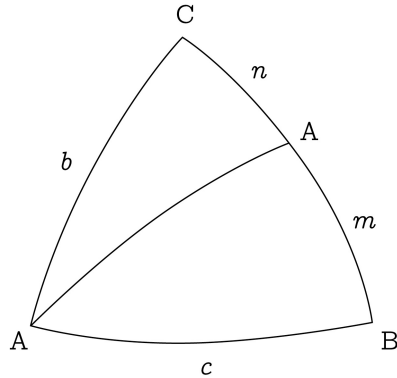


FIGURA 4.24. Steward hiperbólico

Por el Teorema de Cosenos en $\triangle ABD$

$$\cosh(c) = \cosh(d) \cosh(m) - \sinh(d) \sinh(m) \cos \angle ADB,$$

y, por el mismo teorema, en $\triangle ADB$

$$\begin{aligned}\cosh(b) &= \cosh(d) \cosh(n) - \sinh(d) \sinh(n) \cos \angle ADC \\ &= \cosh(d) \cosh(n) + \sinh(d) \sinh(n) \cos \angle ADB.\end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\sinh(n) \cosh(c) + \sinh(m) \cosh(b) &= \cosh(d) (\cosh(m) \sinh(n) + \cosh(n) \sinh(m)) \\ &= \cosh(d) \sinh(a).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.35. Teorema de Steward. *(Bis)*

En un triángulo ABC sea D un punto en el lado (interno) BC . Si $\angle BAD = \mu$, $\angle DAC = \nu$, $\angle ADB = \delta$ entonces

$$\sin \alpha \cos \delta = (\cos \gamma \sin \mu - \cos \beta \sin \nu).$$

En particular si AD es la bisectriz del ángulo α entonces

$$\cos \delta = (\cos \gamma - \cos \beta) / 2 \cos(\alpha/2).$$

Demostración. Por el Teorema de Cosenos II en el triángulo ABD

$$\cos \beta = -\cos \mu \cos \delta + \sin \mu \sin \delta \cosh(d(A, D)),$$

y de igual forma en el triángulo ADC

$$\cos \gamma = +\cos \nu \cos \delta + \sin \nu \sin \delta \cosh(d(A, D)).$$

Obtenemos

$$\sin \nu \cos \beta - \sin \mu \cos \gamma = -\cos \delta (\cos \mu \sin \nu + \cos \nu \sin \mu) = -\cos \delta \sin \alpha.$$

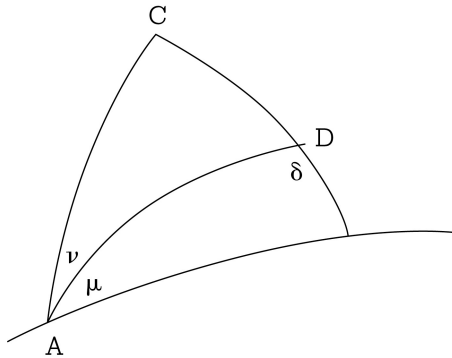


FIGURA 4.25. Lados internos hiperbolicos

□

Ejercicios 4.36.

1. Calcule la distancia en el semiplano superior entre los puntos

a) $P = 4 + 4i$, $Q = 5 + 3i$;

b) $P = i$, $Q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

2. Directamente a partir de la definición

$$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2, \quad \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

demuestre que

$$\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x),$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$

$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y).$$

3. Demuestre que en un triángulo rectángulo en C

a) $\cos \alpha = \cosh(a) \operatorname{sen} \beta$;

b) $\cot \alpha \cot \beta = \cosh(c)$.

4. a) Demuestre que el conjunto de puntos que están a una distancia r de un punto c es una circunferencia.

b) En el semi-plano superior considere la circunferencia hiperbólica de centro i y radio 1. Encuentre el centro euclideano de esa circunferencia.

c) ¿Cuáles son las tangentes a la circunferencia anterior en los puntos del eje imaginario?

5. Si A, B y X son puntos en una recta hiperbólica se define

$$h(A, X, B) = \sinh(d(A, X)) / \sinh(d(X, B))$$

si X está entre A y B , y

$$h(A, X, B) = -\sinh(s(A, X)) / \sinh(d(X, B))$$

si X está fuera del segmento AB . Demuestre las propiedades

a) $h(A, X, B) = h(B, X, A)^{-1}$;

b) si X está entre A y B , $h(A, X, B) \in (0, \infty)$;

c) si X está más allá de B , $h(A, X, B) \in (-\infty, -1)$;

d) si X está más allá de A , $h(A, X, B) \in (-1, 0)$.

6. Extienda el Teorema de Steward al caso del punto D fuera del intervalo AB .

7. En el siguiente cuadrilátero tres ángulos son rectos. Demuestre que $\cos \varphi = \sinh(a) \sinh(b)$.

Bibliografía



- [1] Chuaqui, R. *¿Qué son los números?*, Editorial Universitaria, 1980.
- [2] Dedekind, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Brunswick, 1888.
Traducido al castellano en *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos*, Edición de J. Ferreirós. Madrid, Alianza, 1997. Ver también [1].
- [3] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory*, Academic Press, 1977.
- [4] Halmos, P. *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*, Editorial Continental, México, 1965.
- [5] Hamilton, A. G. *Numbers, sets and axioms*, Cambridge University Press, 1982.
- [6] Lewin, R. *Introducción al Álgebra*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [7] Lewin, R. *Teoría Axiomática de Conjuntos*, Apuntes Facultad de Matemáticas, 1988, <http://www.mat.puc.cl/~rlewin>
- [8] Lewin, R. *¿Cuál es el primer natural?*, Revista del profesor de Matemáticas, Sociedad de Matemática de Chile, **1**, (1994), 3–7.
- [9] Monk, H. B. *Introduction to Set Theory*, McGraw–Hill, 1969.
- [10] Moore, G. *Zermelo’s Axiom of Choice, its origins development and influence*, Springer–Verlag, 1982.
- [11] Peano, G. *Aritmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Turín, 1889. (Traducido al inglés en Van Heijenoort [14], 83–97).
- [12] Suazo, A. y Labra, A. *Elementos de la Teoría de Cuerpos*, J.C. Sáez Editor, Santiago, 2011.
- [13] Torretti, R. *El Paraíso de Cantor*, Editorial Universitaria, 1998.
(http://www.memoriachilena.cl/temas/documento_detalle.asp?id=MC0031052)
- [14] van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Harvard Univ. Press, 1967.
- [15] Zermelo, E. *Beweiss, dass Jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Mathematische Annalen 59, (1904), 514–516. (Traducido al inglés en Van Heijenoort [14], 139–141).
- [16] Zermelo, E. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*, Mathematische Annalen 65, (1908), 261–281. (Traducido al inglés en Van Heijenoort [14], 199–215).

Índice de figuras



1.1. Vectores equivalentes	21
1.2. Puntos reflejados	25
1.3. Triángulos congruentes	26
1.4. Una rotación	27
1.5. Rotaciones	27
1.6. Traslación	28
1.7. La compuesta	28
1.8. Centros distintos	29
1.9. Isometrías	30
1.10. Bisectriz	31
1.11. Puntos imágenes	31
1.12. Homotecias	33
1.13. Proporcionalidad	34
1.14. Thales	35
1.15. Nueve puntos	37
1.16. Inversión	39
1.17. Inversión con compás	39
1.18. Recta imagen	40
1.19. Otra recta imagen	41
1.20. Configuración imagen	42
1.21. Ángulos iguales	42
1.22. Haz de circunferencias	43
1.23. Aparato de Peaucellier	44
2.1. Un complejo	46
2.2. La suma y resta	48
2.3. Representación polar	49
2.4. Proyección estereográfica	60
2.5. Traslación compleja	66

2.6. Configuración de un grupo	67
2.7. Rotación en la esfera	68
2.8. Dilatación	71
2.9. Hiperbólica	72
2.10. Rotación	73
2.11. Elíptica	73
2.12. Traslación	74
2.13. Loxodrómica	75
2.14. Razón simple	77
2.15. Razón doble	78
2.16. Configuración armónica	81
3.1. Rectas por p paralelas a L	87
3.2. Rectas paralelas asintóticas	87
3.3. Rectas en el modelo \mathbb{H}	88
3.4. Una recta por dos puntos	89
3.5. El ángulo entre dos rectas	89
3.6. Coseno de un ángulo	90
3.7. Distancia no-euclidiana	91
3.8. Una circunferencia no euclidiana	96
3.9. Distancia menor	96
3.10. La simetral de un segmento	97
3.11. Inicio de Cinderella	99
3.12. Medida de ángulo	99
3.13. Un triángulo hiperbólico	100
3.14. Un vértice que tiende al infinito	100
3.15. Un cuadrilátero hiperbólico	101
3.16. Construir un triángulo dados sus tres lados	102
3.17. Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido	103
3.18. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y el lado comprendido	103
3.19. Área de un triángulo	104
3.20. Simetrales y la circunferencia circunscrita al triángulo ABE	105
3.21. Transversales y el centro de gravedad del triángulo ABE	106
3.22. Alturas y el ortocentro del triángulo ABC	106
3.23. Bisectrices y la circunferencia inscrita al triángulo ABC	107

3.24. Las últimas perpendiculares	108
3.25. Rectas “cartesianas” que no se intersectan	108
3.26. Rango de las coordenadas cartesianas	109
3.27. Coordenadas cartesianas de B	109
3.28. Triángulo hiperbólico	112
3.29. Un ángulo cero	113
3.30. Área	113
3.31. Caso general	114
3.32. Pitágoras	115
3.33. El ángulo de paralelismo	115
4.1. Senos	118
4.2. Cosenos	118
4.3. Ángulo medio	119
4.4. Fórmula de suma	120
4.5. Circunferencia inscrita	124
4.6. Menelao	125
4.7. Ceva	127
4.8. Steward	128
4.9. Un triángulo esférico	130
4.10. Sector angular	131
4.11. Un triángulo esférico rectángulo	132
4.12. Un triángulo esférico rectángulo	133
4.13. Menelao esférico	135
4.14. Configuración esférica	136
4.15. Ceva esférico	138
4.16. Steward esférico	138
4.17. Lado interno	139
4.18. Pitágoras hiperbólico	142
4.19. Sumas y coordenadas	142
4.20. Senos hiperbólicos	143
4.21. Circunferencia inscrita hiperbólica	145
4.22. Menelao hiperbólico	146
4.23. Ceva hiperbólico	147
	155

4.24. Steward hiperbólico	148
4.25. Lados internos hiperbolicos	149

Índice de Términos



- álgebra, 17, 18, 45
- ángulo, 19, 20, 25–29, 31–34, 39, 40, 42, 43
- ángulo de paralelismo, 115
- ángulo medio, 119
- ángulos, 17, 19, 20, 26, 28, 29, 33, 36, 40, 42, 45, 87
- área, 104

- abeliano, 22, 24
- afín, 20, 36
- argumento, 48
- asintóticas, 86
- August Ferdinand Möbius, 62

- banda de Möbius, 62
- Bolyai, 85

- Cabri, 98
- centro, 23, 26, 28–30, 32–39, 41, 43, 44
- Ceva, 137, 147
- Cinderella, 98
- circunferencia, 30, 32, 34, 37–44, 52, 65
- circunferencias, 17
- circunscrita, 118
- clasificación, 68
- colineación, 20, 21, 23, 25, 26, 29, 33, 36
- colineaciones, 17, 20, 22–24, 26, 29, 30, 45
- complejos, 18, 45
- composición, 20, 23, 26–28, 35
- compuesta, 55
- congruencia, 19
- conjugación, 23
- coordenadas, 21, 22, 43
- cosenos, 118, 133, 143, 144
- cuerpo, 18

- diagonales, 34
- distancia, 18, 21, 26, 34, 36, 85, 93
- distancia esférica, 129

- ecuaciones de rectas, 51
- Elípticas, 72
- elíptico, 94
- elíptica, 75
- elemento de área, 112
- elemento de longitud, 109, 111
- equidista, 104
- esférica, 18
- esfera de Riemann, 61
- Euclides, 17, 19, 20, 85
- euclidiana, 18–20
- Euler, 37
- exterior, 38, 40, 43

- Gauss, 85
- geodésicas, 86
- geometría, 17–21
- geometría analítica, 45
- geometría no euclidenana, 45
- Geometría no-Euclidiana, 81
- grados, 22
- grupo, 17–20, 23–26, 93
- grupo abeliano, 46

- hiperbólica, 18, 75
- Hiperbólicas, 71
- hiperbólico, 94
- homotecia, 33–37, 41, 44, 56
- homotecias, 17, 19, 20, 32–37, 64

- infinito, 18, 38, 81
- interior, 37–40, 43
- invariante, 79

inversa, 20, 23, 26, 33, 38, 158, 162
 inversa, 38
 inversión, 19, 38–45, 57
 inversiones, 17, 18, 44
 involutiva, 25, 38
 isometrías, 56, 93
 isometría, 29–32, 36
 isometrías, 17, 19, 29, 30, 36
 línea, 20, 33, 34, 37, 44
 lado, 25, 26, 30, 38, 39
 largo, 28, 85
 loxodrómica, 75
 Loxodrómicas, 74
 loxodrómico, 94
 matriz, 62
 Menelao, 117, 135, 136, 146, 147
 modelo, 87, 88, 110
 movimiento rígido, 29
 movimientos rígidos, 17–19
 multiplicador, 70
 números complejos, 51
 Nikolái Ivánovich Lobachevski, 85
 no euclidiana, 85
 ortogonal, 66
 parabólica, 75
 Parabólicas, 72
 parabólico, 94
 parte imaginaria, 46
 parte real, 45
 Peaucellier, 44
 perpendicular, 25–28, 37, 38, 40, 42
 Pitágoras, 119
 Poincaré, 86
 postulado, 85
 preserva ángulos, 67
 preservan, 45, 87
 preservar, 36
 proyección, 60
 proyección estereográfica, 18, 38, 59
 punto, 17–26, 28–41, 43, 44
 punto al infinito, 59
 punto fijo, 68
 puntos inversos, 82
 quinto postulado, 85
 razón, 33–39, 41
 razón doble, 76, 78
 razón simple, 77
 recta, 44, 65
 reflexión, 25, 26, 30–32, 36, 38, 41, 56
 reflexiones, 20, 26, 27, 29, 30, 32, 36, 38
 relación armónica, 81
 rotación, 26, 27, 29, 32, 55
 rotaciones, 36, 64
 segmento, 21, 24, 25, 29, 30, 37
 semejanza, 19
 semiplano superior, 87
 senos, 132, 143
 simetría, 55
 simetría, 22–25, 32, 38
 simetrías, 20, 23–25
 Steward, 127, 137, 139, 148, 149
 subgrupo, 18–20, 22–26, 29, 30, 45
 Thales, 34
 transformación, 19–21, 23, 33, 36, 38
 transformaciones de Möbius, 45
 traslación, 20–29, 32, 35, 54
 traslaciones, 20, 22, 24, 25, 36, 64
 traza, 70
 triángulo, 24, 31, 32, 37, 44
 triángulo esférico, 129, 131
 triángulo hiperbólico, 112
 trigonometría, 117